

Determinantes (2º Bachillerato CC)

1. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -9 & 3 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & x \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} x-4 & 2 \\ 6 & x-3 \end{vmatrix}$

2. Calcula el valor de la incógnita para que se verifique la igualdad.

a) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & x \end{vmatrix} = 26$

b) $\begin{vmatrix} x & 4 \\ 3x & -3 \end{vmatrix} = 45$

c) $\begin{vmatrix} x & 3x-1 \\ 4 & x \end{vmatrix} = 32$

d) $\begin{vmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{2}{x} \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 7$

e) $\begin{vmatrix} \sqrt{x} & 2 \\ 2 & \sqrt{x-6} \end{vmatrix} = 0$

f) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \\ \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \end{vmatrix} = 26$

3. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ -8 & 17 & 9 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} x-1 & 2 & x \\ x+1 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

4. Calcula los valores de la incógnita para que se cumplan las igualdades:

a) $\begin{vmatrix} 3 & x & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & x & -2 \end{vmatrix} = 2$

b) $\begin{vmatrix} -2 & x & -1 \\ x & 1 & x \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -5$

c) $\begin{vmatrix} x-1 & x+2 & 0 \\ x & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -197$

d) $\begin{vmatrix} x & x^2 & x-1 \\ 2 & -1 & 0 \\ x & 0 & x \end{vmatrix} = -18$

5. Calcula el valor del determinante de la matriz $A + B$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

6. Calcula el valor del determinante de la matriz AB , siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 13 & -1 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 9 \\ 1 & -1 & 17 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

7. Expresa la relación que deben guardar m y n para que el determinante sea nulo:

$$\begin{vmatrix} m & -1 & 4 \\ n & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

8. Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & 8 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

9. Si M es una matriz cuadrada y $|M| = 6$, ¿es posible calcular $|M^3|$? ¿Y $|2M|$.

10. Demuestra, sin calcular el determinante, que $\begin{vmatrix} 2 & 9 & 21 \\ 5 & 2 & -3 \\ 6 & 8 & -12 \end{vmatrix}$ es múltiplo

de 6 y $\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 4 & 21 & 2 \\ 11 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ de 5.

11. Sabiendo que $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$, determina sin desarrollarlos el valor de los siguientes determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & -4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -5 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

12. Justifica sin desarrollar que los siguientes determinantes son nulos:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 5 & 4 & -10 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 8 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 8 & 5 & 9 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 9 & 14 & 3 \end{vmatrix}$

13. Demuestra sin desarrollar que los siguientes determinantes son nulos:

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2d & b+2e & c+2f \\ d-a & e-b & f-c \end{vmatrix}$



$$b) \begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

14. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}$. Sea la matriz B la que resulta de

realizar las siguientes transformaciones: primero se multiplica A por si misma; después, se permuta la fila segunda por la tercera, y finalmente, se multiplican todos los elementos de la segunda columna por -2.

Calcula el determinante de la matriz B, usando para ello las propiedades de los determinantes.

15. Calcula para qué valores de x se cumple que $|2A| = 8$, siendo la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Sea una matriz cuadrada de orden 2 verificando que $2A^2 = A$. Calculad razonadamente los posibles valores del determinante de A.

17. Estudia el rango de estas matrices:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 8 & 11 & -11 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 24 & 3 & 19 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -8 & 12 \\ 12 & -18 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 & 3 \\ 4 & -8 & -24 & 1 \end{pmatrix}$

18. Calcula el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

19. ¿Para qué valores de m el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 4 & m & 6 \\ -5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ es 2?

20. Calculad el valor de a para que el rango de la matriz A sea igual a 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & a \end{pmatrix}$$

21. Calcula el rango de cada matriz en función de cada una de los parámetros:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & a \\ -5 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

b)
$$\begin{pmatrix} b & 2 & -1 \\ 3 & 2 & b+1 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

22. Calcula el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ -1 & 2x & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

23. Calcula la matriz inversa de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -7 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

24. ¿Para qué valores del parámetro a la matriz no tiene inversa. Calcula la matriz inversa cuando $a=2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

25. Calcula, en cada caso, el valor de la matriz X .

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 30 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 0 \\ 14 & 4 & 16 \end{pmatrix}$

c) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 14 \\ -13 & -3 \end{pmatrix}$

d) $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ 0 & -11 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

e) $X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ 13 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -10 & -10 \\ -10 & 10 & -10 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 28 & 111 \\ 54 & 52 & 194 \end{pmatrix}$

26. Calcula la matriz X que verifica la ecuación $AX=X-B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Discusión de sistemas

27. Discútase en función del parámetro y resuelva, cuando sea posible, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

- a)
$$\begin{cases} 4x + 2y = a \\ x + y - z = 2 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$
- b)
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ 5x - y + az = 6 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$
- c)
$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 3x - y + z = 9 \\ 4x + y + az = 13 \end{cases}$$
- d)
$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ -3x + ay - 3z = 0 \end{cases}$$
- e)
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ ax + 3y - 2z = 0 \\ -x - 4z = 3 \end{cases}$$
- f)
$$\begin{cases} mx + 2z = 6 \\ 3x + y = 0 \\ 2x + mz = 6 \end{cases}$$
- g)
$$\begin{cases} x + my + z = 1 \\ x + y - z = m + 1 \\ mx + y + (m - 1)z = m \end{cases}$$
- h)
$$\begin{cases} x + y + mz = m \\ mx + my + z = 1 \\ x + my + z = m \end{cases}$$
- i)
$$\begin{cases} x + y + z = k \\ x + y + (k + 1)z = 0 \\ x + (k + 1)y + z = 2 \end{cases}$$
- j)
$$\begin{cases} x + y + mz = 0 \\ 3x + 2y + 4mz = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$
- k)
$$\begin{cases} ax + 2y = 2 \\ 2x + ay = a \\ x - y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{l)} & \begin{cases} 2x + y + mz = 4 \\ x + z = 2 \\ x + y + z = 2 \\ t = 5 \end{cases} \\ \text{m)} & \begin{cases} mx + z + t = 1 \\ my + z - t = 1 \\ my + 2z - 2t = 2 \\ mz - t = 0 \end{cases} \\ \text{n)} & \begin{cases} 2x - 4y - az = -2 \\ y - z = 0 \\ ax + 2z = 2 \end{cases} \\ \text{o)} & \begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases} \\ \text{p)} & \begin{cases} ax + y + z = 3 \\ x + ay + z = 3 \\ x + y + az = 3 \end{cases} \\ \text{q)} & \begin{cases} x + y + z = 1 \\ (a + 1)x + y + az = a \\ x + (a + 1)y + z = 1 \end{cases} \\ \text{r)} & \begin{cases} ax + y + z = 0 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

28. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ -2x - (m + 1)y + z = -1 \\ x + (2m - 1)y + (m + 2)z = 2 + 2m \end{cases}$$

- Discutir el sistema en función del **parámetro** m .
- Resolver el sistema para $m=0$.