Determinantes y sistemas lineales: ejercicios resueltos (2º Bachillerato CC)

1. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ -2x - (m+1)y + z = -1 \\ x + (2m-1)y + (m+2)z = 2 + 2m \end{cases}$$

   a) Discutir el sistema en función del **parámetro *m***.
   b) Resolver el sistema para ***m=0***.

Solución

a) Expresemos el sistema en formato matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ -2 & -(m+1) & 1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2+2m \end{pmatrix}$$

Calculemos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ -2 & -(m+1) & 1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 \end{vmatrix} = m^2 - 1$$

Calculamos el valor de m para los que el determinante se hace cero.

$$m^2 - 1 = 0 \implies m^2 = 1 \implies \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

Ahora, aplicaremos el teorema de Rouché-Frobenius a cada uno de los casos que se nos presenta:

i. **Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$**

El sistema es compatible por ser el rango de la matriz de coeficientes igual a 3, igual al rango de la matriz ampliada. Es determinado, pues el número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas.

ii. **Si m = 1**

La matriz de coeficientes queda:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ Podemos observar que la primera y la segunda fila son iguales por tanto el rango debe ser menor que 3. Como hay un menor de orden 2 distinto de cero, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, el rango de la matriz de coeficientes es 2.

Calculamos ahora el coeficiente de la matriz ampliada:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$, calculemos el determinante de orden 3 formado por las columnas 2,3 y 4:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$ (la columna 3 es la suma de la 1 y la 2).

Por tanto, el rango de ambas matrices es 2, coinciden, por el teorema de Rouché-Frobenius el sistema es compatible, como el rango es menor que el número de ecuaciones, el sistema es indeterminado.

iii. **Si m = -1**

La matriz de coeficientes queda:

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ siendo su determinante igual a cero.

Como hay un menor de orden 2 distinto de cero $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, el rango es 2.

La matriz ampliada queda:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$, puesto que la columna de coeficientes es igual que la tercera columna, la matriz ampliada tiene rango 2, por tanto, por el teorema de Rouché-Frobenius el sistema es compatible. Es indeterminado pues el rango es menor que el número de incógnitas.

b) Para **m=0**, el sistema queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aprovechando que la primera fila ya tiene dos ceros en la segunda y tercera columna, resolveremos por el método de Gauss:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)$ Aplicando la transformación

$-2F_2 + F_3 \longrightarrow F_2$

$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 0 & 4\\ 1 & -1 & 2 & 2\end{array}\right)$, resolvemos. De la primera fila $x = 1$; de la segunda fila $5 + y = 4 \Rightarrow y = -1$; de la tercera fila

$1 - (-1) + 2z = 2 \Rightarrow y = 0$

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2\\ -2 & 4 & m\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$ $y\ B = \begin{pmatrix}-2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$. Se pide:
   a) Obtener los valores del parámetro **m** para los que la matriz A admite inversa.
   b) Para m = 0, calculad $A \cdot B\ y\ A^{-1} \cdot B$
   c) Calculad $B^t \cdot B\ y\ \ B \cdot B^t$.

Solución

a) A tiene inversa y su determinante es distinto de cero.
   Calculemos el determinante:
   $\begin{vmatrix} m & 0 & 2\\ -2 & 4 & m\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix} = -m^2 - 4m - 4$
   Resolvemos la ecuación de segundo grado:
   $-m^2 - 4m - 4 = 0 \implies -(m+2)^2 = 0 \implies m = -2$
   Por tanto, la matriz no tiene inversa para $m = -2$.
b) Para m=0, la matriz queda:
   $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\\ -2 & 4 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, siendo su inversa, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 2\\ 1/2 & 0 & 1\\ 1/2 & 0 & 0\end{pmatrix}$
   $A \cdot B = \begin{pmatrix}0\\ 4\\ 0\end{pmatrix}$
   $A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix}-2\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$
c) $B^t \cdot B = (4)\ y\ \ B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10\\ 0 & 7 & 5\\ 3 & 4 & 5k\end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\ y\ B = \begin{pmatrix}2\\ 37/2\\ 11\end{pmatrix}$. Se pide:
   a) Discutir el rango de la matriz A, en función de los valores del parámetro ***k***.
   b) Para ***k=0***, calculad, si es posible, A^{-1}.
   c) Resolved, si es posible, el sistema $AX = B, para\ k = 1$.

Solución

a) Calcularemos el determinante de A:
   $|A| = 490k - 490$
   Si el determinante es distinto de cero el rango de A será 3:

$490k - 490 = 0 \implies k = 1$

Por tanto, si $k \neq 1$ el rango de la matriz será 3

Si $k = 1$, la matriz A queda: $A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Como hay un menor de orden 2 distinto de cero, $\begin{vmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 98 \neq 0$, el rango de la matriz será 2.

b) Por el anterior aparado, el determinante de A es distinto de cero para k=0. Por tanto, existe su inversa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{49} & -\frac{4}{49} & \frac{1}{7} \\ -\frac{3}{98} & \frac{3}{49} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{70} & \frac{4}{35} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

c) Para ***k=1*** la matriz A no tiene inversa (primer apartado), por tanto, el sistema no será compatible determinado.
Calculemos el rango de la matriz ampliada, utilizaremos el método de Gauss:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & \frac{37}{2} \\ 3 & 4 & 5 & 11 \end{array}\right)$ transformación $-3F_1 + 14F_3 \longrightarrow F_3$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 14 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & \frac{37}{2} \\ 0 & 56 & 40 & 148 \end{array}\right)$ Podemos observar que la tercera fila se puede obtener al multiplicar por 8 la segunda. Por tanto, se trata de un sistema compatible indeterminado. Expresaremos el conjunto de soluciones mediante un parámetro:

$z = k$; de la segunda ecuación $7y + k = \frac{37}{2} \implies y = \frac{37-2k}{14}$, de la tercera ecuación: $14x + 10k = 2 \implies x = \frac{1-5k}{7}$. Por tanto, el conjunto de soluciones es:

$\left(\frac{1-5k}{7}, \frac{37-2k}{14}, k\right) \ \forall k \in \mathbb{R}$

4. Dado el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + ay + z = a \\ x - 4y + (a+1)z = 1 \\ 4y - az = 0 \end{cases}$

a) Discutirlo en función de los valores del parámetro ***a***.
b) Resolver el sistema para ***a=1***.

c) Resolver el sistema para ***a=2***.

Solución

a) La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix}2 & a & 1\\ 1 & -4 & a+1\\ 0 & 4 & -a\end{pmatrix}$, calculemos su determinante: $|A|=a^2-4$.

Igualamos a cero para saber cuando el rango de la matriz de coeficientes es igual a 3.

$a^2-4=0 \implies \begin{cases} a=2\\ a=-2\end{cases}$

Por tanto, si $\boldsymbol{a\neq 2\ y\ a\neq -2}$, el determinante de A es distinto de cero, el rango es 3, el rango de la matriz ampliada (3x4) también es 3, por tanto, el sistema es compatible por el teorema de Rouché-Frobenius. Es determinado pues el rango coincide con el número de incógnitas del sistema.

Si $\boldsymbol{a}=\mathbf{2}$ la matriz de coeficientes es $\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & -4 & 3\\ 0 & 4 & -2\end{pmatrix}$ y su determinante es cero, el menor $\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-8-2=-10\neq 0$, por tanto el rango es 2.

La matriz ampliada es $\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 2 & 1 & 2\\ 1 & -4 & 3 & 1\\ 0 & 4 & -2 & 0\end{array}\right)$, como la columna de términos independientes es igual a la primera columna, la matriz ampliada también tiene rango 2. Por el teorema de Rouche-Frobenius el sistema es compatible. Es indeterminado, pues el número de incógnitas es mayor que el rango.

Si $\boldsymbol{a}=-\mathbf{2}$, la matriz de coeficientes es $\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 1 & -4 & -1\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}$ y su determinante es cero, el menor $\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-8+2=-6\neq 0$, por tanto su rango es 2.

La matriz ampliada es $\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -2 & 1 & -2\\ 1 & -4 & -1 & 1\\ 0 & 4 & 2 & 0\end{array}\right)$, calculemos su rango utilizando el método de Gauss. Aplicamos la transformación $F_1-2F_2\longrightarrow F_2$:

$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 6 & 3 & -4\\ 0 & 4 & 2 & 0\end{array}\right)$ Aplicamos la transformación $2F_2-3F_3\longrightarrow F_3$

$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & -2 & 1 & -2\\ 0 & 6 & 3 & -4\\ 0 & 0 & 0 & -8\end{array}\right)$ Por tanto, el rango de la matriz ampliada es 3. Como el rango de la matriz de coeficientes es distinto del rango de la matriz ampliada el sistema es incompatible (Teorema de Rouché-Frobenius).

b) Para ***a=1*** el sistema es compatible determinado, por tanto, la matriz de coeficientes tiene inversa:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -4 & 2\\ 0 & 4 & -1\end{pmatrix};\ A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & -5 & -6\\ -1 & 2 & 3\\ -4 & 8 & 9\end{pmatrix}$$

Por tanto, $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}4 & -5 & -6\\ -1 & 2 & 3\\ -4 & 8 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

c) Para ***a=2*** el sistema es compatible indeterminado (véase el estudio del apartado a).

La matriz ampliada es: $\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 2 & 1 & 2\\ 1 & -4 & 3 & 1\\ 0 & 4 & -2 & 0\end{array}\right)$. Utilizaremos el método de Gauss para resolver el sistema.

Aplicamos la transformación $F_1-2F_2\longrightarrow F_2$

$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 10 & -5 & 0\\ 0 & 4 & -2 & 0\end{array}\right)$ Aplicamos la transformación $2F_2-5F_3\longrightarrow F_3$

$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 10 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$ Igualamos $z=k$;

De la segunda ecuación $10y-5k=0\implies y=\frac{1}{2}k$

De la primera ecuación: $2x+k+k=2\implies x=1-k$.

Por tanto, el conjunto de soluciones es:

$\left(1-k,\frac{k}{2},k\right)\ \forall k\ \in\mathbb{R}$.

5. Dadas las matrices $P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}$ y $J=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, se pide:

a) Determinar la matriz P^{-1}

b) Determinar la matriz B^{-1}, inversa de la matriz $B=P^{-1}\cdot J^{-1}$

c) Calcular el determinante de la matriz A^2, siendo $A=PJP^{-1}$

Solución

a) $P^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 2 & 0 & -1\\ -5 & -1 & 4\end{pmatrix}$

b) Es muy fácil calcular J^{-1} pues J es una matriz diagonal:

$$J^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B=P^{-1}\cdot J^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 2 & 0 & -1\\ -5 & -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & \frac{1}{2} & -2\\ -2 & 0 & -1\\ 5 & -\frac{1}{2} & 4\end{pmatrix}$$

c) $A^2 = PJP^{-1} \cdot PJP^{-1} = PJP^{-1}$, por las propiedades de los determinantes:

$$|A^2| = |PJP^{-1}| = |P||J||P^{-1}| = |P||J| \cdot \frac{1}{|P|} = |J| = -1 \cdot 2 \cdot 1 = -2$$

6. Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta:

	Oro (%)	Plata (%)
A	100	0
B	75	15
C	60	22

Se quiere obtener un lingote de 25 gramos, con una proporción del 72% de oro y una proporción del 16% de plata, tomando x gramos de A, y gramos de B y z gramos de C. Determínense las cantidades x, y, z.

Solución

Ya se definen el significado de cada una de las variables. La suma de las masas debe ser la total del lingote:

$x + y + z = 25$

El oro procede de los gramos tomados de cada una de las aleaciones:

$x + 0.75y + 0.6z = 0.72 \cdot 25$

La plata procede de los gramos tomados de cada una de las aleaciones:

$0.15y + 0.22z = 0.16 \cdot 25$

El sistema lineal queda:

$$\begin{cases} x + y + z = 25 \\ x + 0.75y + 0.6z = 18 \\ 0.15y + 0.22z = 4 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0.75 & 0.6 \\ 0 & 0.15 & 0.22 \end{pmatrix} = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 100 & 100 & 100 \\ 100 & 75 & 60 \\ 0 & 15 & 22 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & -14 & -30 \\ -44 & 44 & 80 \\ 30 & -30 & -50 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -14 & -30 \\ -44 & 44 & 80 \\ 30 & -30 & -50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 18 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Por tanto, se necesitan 3 gramos de la aleación A, 12 de B y 10 de C.

7. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y al matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:
   a) Calcula la matriz $B = (A - I)(2I + 2A)$
   b) Determinar el rango de las matrices $A - I, A^2 - I\ y\ A^3 - I$
   c) Calcular la matriz inversa de A^6, en caso de que exista.

Solución

a) $B = (A - I)(2I + 2A) = 2(A^2 - I^2) = 2(A^2 - I) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot$

$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $|A - I| = 0$

$(la\ segunda\ y\ tercera\ fila\ son\ linelamente\ dependientes)$.

Hay un menor de orden 2 distinto de cero, por tanto, el rango es 2.

$A^2 - I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ el rango de esta matriz es 1.

$A^3 - I = AA^2 - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ tiene rango 2, la segunda y tercera fila son linealmente dependientes.

c) $A^6 = A^3 \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-6} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

8. Despeje X en la ecuación matricial $X(CD)^{-1} = A + X(D^{-1}C^{-1} - B)$, siendo A, B, C, D matrices cuadradas invertibles. Expresar X de la forma más simple posible.

Solución

$X(CD)^{-1} = A + X(D^{-1}C^{-1} - B) \implies X(CD)^{-1} = A + X(CD)^{-1} - XB \implies XB = A$

$\implies X = AB^{-1}$

9. Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\ y\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ determinar la matriz Y tal que YB=A.

Solución

Calcularemos el determinante de B para saber si la matriz tiene inversa:

$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, por tanto, existe la matriz inversa:

$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{YB} = \mathrm{A} \Longrightarrow Y = AB^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

10. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 3x + y + mz = 1 \\ x - y + 2z = -2 \\ 5x + (m+1)y + 2z = 4 \end{cases}$

   a) Discutirlo según los valores del parámetro m.
   b) Resolverlo en el caso $m=0$.
   c) Resolverlo en el caso $m=2$

Solución

a) La matriz de coeficientes es: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & m+1 & 2 \end{pmatrix}$

Calcularemos el determinante: $|A| = m^2 - 4$

Igualando a cero: $m^2 - 4 = 0 \Longrightarrow m = \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}$

Por tanto, si $\boldsymbol{m} \neq \begin{cases} \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} \end{cases}$ el rango de la matriz de coeficientes es 3 y la de la matriz ampliada también (es una matriz de 3x4), por el teorema de Rouché-Frobenius el sistema es compatible. Como el número de incógnitas es igual al rango, el sistema es determinado.

Si $\boldsymbol{m} = \mathbf{2}$, la matriz de coeficientes queda:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ el rango es 2 (la tercera columna se puede obtener restando a la primera columna la segunda columna) pues hay un menor de orden 2 distinto de cero.

La matriz ampliada queda: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$. Calcularemos su rango utilizando el método de Gauss:

Aplicamos las transformaciones $F_1 - 3F_2 \rightarrow F_2$ y $5F_2 - F_3 \rightarrow F_3$.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 7 \\ 0 & -8 & 8 & -14 \end{array}\right)$ Aplicamos la transformación $2F_2 + F_3 \rightarrow F_3$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Por tanto, el rango de esta matriz es 2. Por tanto, el sistema es compatible (el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada es el mismo). El sistema será indeterminado, pues el número de variables es mayor que el rango.

Si $\boldsymbol{m}=-\mathbf{2}$, la matriz de coeficientes queda:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 2\\ 5 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

El rango de esta matriz es 2 pues hay un menor de orden 2 distinto de cero (nótese que la segunda y tercera columna son combinación lineal una de otra).

La matriz ampliada queda: $\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 1 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 2 & -2\\ 5 & -1 & 2 & 4\end{array}\right)$. Calcularemos su rango utilizando el método de Gauss:

Aplicamos las transformaciones $F_1-3F_2\longrightarrow F_2$ y $5F_2-F_3\longrightarrow F_3$.

$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 4 & -8 & 7\\ 0 & -4 & 8 & -14\end{array}\right)$ Aplicamos la transformación $F_2+F_3\longrightarrow F_3$

$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 4 & -8 & 7\\ 0 & 0 & 0 & -7\end{array}\right)$ El rango de la matriz ampliada es 3 y al ser distinto del rango de la matriz de coeficientes el sistema será incompatible.

b) Para ***m=0*** el sistema es compatible determinado.
Calcularemos la solución utilizando el método de Cramer:

$$x=\frac{\left|\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -2 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}\right|}{|A|}=\frac{8}{-4}=-2$$

$$y=\frac{\left|\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 2\\ 5 & 4 & 2\end{pmatrix}\right|}{|A|}=\frac{-28}{-4}=7$$

$$z=\frac{\left|\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -2\\ 5 & 1 & 4\end{pmatrix}\right|}{|A|}=\frac{-14}{-4}=\frac{7}{2}$$

c) Para ***m=2*** el sistema es compatible indeterminado.
Utilizaremos la matriz transformada que hemos utilizado para calcular el rango en el apartado “a”:

$\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & -4 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$ El conjunto de soluciones es: $z=k$;

De la segunda fila: $4y-4k=7\implies y=\frac{7+4k}{4}$

De la primera fila: $3x + \frac{7+4k}{4} + 2k = 1 \Longrightarrow x = -\frac{1+2k}{4}$
Por tanto, el conjunto de soluciones es:
$\left(-\frac{1+2k}{4}, \frac{7+4k}{4}, k\right)\ \forall k\ \in \mathbb{R}$.

11. Determine, si es posible, los parámetros a y b de modo que se verifique la siguiente igualdad:
$a\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

Solución

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$a\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$. Por tanto, resulta el sistema:

$\begin{cases} 3a + b = 3 \\ -4a = -8 \\ 5a + 4b = -2 \\ -a + b = -5 \end{cases}$

De la segunda ecuación: $a = 2$; de la primera ecuación $b = -3$. De la tercera ecuación $5 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = 10 - 12 = -2$ (verifica la tercera ecuación)
De la cuarta ecuación, $-2 + (-3) = -5$ (verifica la cuarta ecuación).
Por tanto, la solución es $a = 2$ y $b = -3$.

12. Determinar el valor de ***a*** para que el rango de la matriz A sea 2:
$A = a\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución

$A = \begin{pmatrix} 2a+1 & 2a \\ a & -a+1 \end{pmatrix}$. El determinante de A vale: $|A| = -4a^2 + a + 1$

Resolvemos la ecuación $-4a^2 + a + 1 = 0 \Longrightarrow a = \frac{1 \mp \sqrt{17}}{8}$

Por tanto, si $a \neq \frac{1 \mp \sqrt{17}}{8}$, el rango de la matriz será 2.

13. Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x + (a-1)y - 2z = a \\ 2x + y - az = 2 \\ -x + y + z = 1 - a \end{cases}$

a) Discutirlo según los valores del parámetro *a*.
b) Resolverlo cuando sea posible.

Solución

a) La matriz de coeficientes es: $A = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -2 \\ 2 & 1 & -a \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculemos el determinante: $|A| = a^2 - a - 2$. Resolvemos la ecuación $a^2 - a - 2 = 0\,; a = -1\ y\ a = 2$
Por tanto, para cualquier valor distinto de -1 y 2 el sistema es compatible pues el rango de la matriz de coeficientes es 3.

Para **a=-1**, $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ el rango de la matriz de coeficientes es 2. Calculemos el rango de la matriz ampliada:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$ Aplicamos las transformaciones:

$F_1 - F_2 \to F_2 \ y \ F_2 + 2F_3 \to F_3$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{array}\right)$ Aplicando la transformación $F_2 + F_3 \to F_3$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$ Por tanto, el rango de la matriz ampliada es 3.

Al ser los rangos de la matriz de coeficientes y de la ampliada distintos el sistema es incompatible.

Para **a=2** , $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ el rango de la matriz de coeficientes es 2. Calculemos el rango de la matriz ampliada:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$ Aplicamos las transformaciones:

$F_1 - F_2 \to F_2 \ y \ F_2 + 2F_3 \to F_3$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Por tanto, el rango de la matriz ampliada es 2. Al coincidir el rango de la matriz ampliada y el de la matriz de coeficientes, el sistema es compatible. Al ser el rango menor que el número de variables el sistema es indeterminado.

b) Para **a=2** y teniendo en cuenta la matriz ampliada utilizada para calcular el rango, tenemos:

$z = k \ ; \ y = 0; x = k + 1$

Por tanto, el conjunto de soluciones es:

$(k + 1, 0, k) \ \forall k \ \in \mathbb{R}$.

Para para cualquier valor distinto de -1 y 2, como el sistema es compatible determinado puede asegurarse que el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero, por lo que es lícito dividir por su determinante $|A| = a^2 - a - 2$. Expresaremos las soluciones en función del parámetro ***a*** utilizando el método de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & a-1 & -2 \\ 2 & 1 & -a \\ 1-a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a^3 - a^2 - 2a}{a^2 - a - 2} = \frac{a(a^2 - a - 2)}{a^2 - a - 2} = a$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a & -2 \\ 2 & 2 & -a \\ -1 & 1-a & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a^2 + 4a - 4}{a^2 - a - 2} = \frac{2 - a}{a + 1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a-1 & a \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1-a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2a^2 - 5a + 2}{a^2 - a - 2} = \frac{2a-1}{a+1}$$