Sistemas de ecuaciones lineales

Ecuación lineal

Es una ecuación polinómica de grado 1 con una o varias variables.

Ejemplos

$$3x - 2y - \frac{1}{2}z = 7$$

$$s - 4t = \sqrt{2}$$

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones.

Podemos generar una ecuación equivalente a otra si multiplicamos (o dividimos) los miembros de una ecuación por un número distinto de cero.

Ejemplos

$3x + 2y - 4z = 3$ es equivalente a $6x + 4y - 8z = 6$, la segunda ecuación se ha obtenido multiplicando por 2 los dos miembros de la primera ecuación.

Sistemas (de ecuaciones) lineales

Un sistema de ecuaciones lineales consta de varias ecuaciones. Las posibles soluciones del sistema deben verificar todas y cada una de las ecuaciones que forman el sistema.

Sistemas equivalentes

Un sistema de ecuaciones lineales consta de varias ecuaciones. Las posibles soluciones del sistema deben verificar todas y cada una de las ecuaciones que forman el sistema.

Transformación de un sistema de ecuaciones

Una transformación permite transformar un sistema de ecuaciones en otro equivalente. Las transformaciones se realizan con el objetivo de resolver el sistema.

Las transformaciones válidas son:

Sustituir una ecuación por el resultado de multiplicarla por un número.

Eliminar o añadir una ecuación que sea combinación lineal de otras ecuaciones del sistema

Sustituir una ecuación por una combinación lineal de ésta por otras que formen parte del sistema.

Ejemplos

Dado el sistema $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ x + y - z = 5 \end{cases}$ podemos sustituir la segunda ecuación por el resultado de multiplicar la ecuación por -2, resultando un sistema equivalente:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ -2x - 2y + 2z = -10 \end{cases}$$

Dado el sistema $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-3y+4z=5 \\ x-4y+3z=3 \end{cases}$ podemos observar que la tercera ecuación es combinación lineal de las anteriores (es la diferencia entre la segunda y la primera ecuación), por tanto, el sistema que resulta de eliminar la tercera ecuación es equivalente $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-3y+4z=5 \end{cases}$..

Dado el sistema $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-3y+4z=5 \\ 2x-y-z=1 \end{cases}$ podemos reemplazar la tercera ecuación por la que resulta de multiplicar por -2 la primera ecuación y sumarla a la tercera ecuación:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-3y+4z=5 \\ -3y-3z=-3 \end{cases}$$

El método de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Un sistema escalonado es aquel en los que cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior.

El método de Gauss consiste en transformar un sistema lineal en otro equivalente y escalonado realizando las siguientes transformaciones:

Multiplicar una ecuación por un número (distinto de cero)

Sumar a una ecuación otra multiplicada por un número.

Ejemplo de sistema escalonado

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 3y+4z=5 \\ 3z=-3 \end{cases}$$

Los sistemas escalonados son fáciles de resolver. En este caso empezamos resolviendo $3z=-3; z=-1$.

Sustituimos en la segunda ecuación: $3y+4\cdot(-1)=5\,; y=3$

Finalmente sustituimos en la primera ecuación: $x+y+z=2\,;\ x+3\pm 1=2\,; x=0$

Ejemplo: transformación de un sistema en escalonado

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ 2x+y+z=2 \\ x+2y+z=3 \end{cases}$$

Las dos primeras transformaciones que realizaremos serán:

Sustituir la segunda fila por el producto de -2 y la primera ecuación más la segunda ecuación. Lo notaremos como $-2E_1+E_2 \to E_2$

Sustituir la tercera ecuación por el resultado de restar de la primera ecuación la tercera ecuación. Lo notaremos como $E_1 - E_3 \to E_3$

El sistema equivalente obtenido será:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ -y - 3z = 0 \\ -y + z = -2 \end{cases}$$

Ahora, sólo intervendrán las ecuaciones 2 y 3, pues no tienen la variable x (de utilizar la primera ecuación introduciríamos de nuevo la incógnita x).

La transformación que realizaremos será sustituir la tercera ecuación por la diferencia entre la segunda y la tercera ecuación. Lo notaremos por $E_2 - E_3 \to E_3$.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ -y - 3z = 0 \\ -4z = 2 \end{cases}$$

Hemos obtenido el sistema escalonado. Resolvemos:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ -y - 3z = 0 \\ -4z = 2 \end{cases} \quad de\ la\ tercera\ ecuación\ z = -\frac{1}{2};$$

$$sustituyendo\ en\ la\ segunda\ ecuación:\ -y - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0; y = \frac{3}{2}$$

$$sustituyendo\ en\ la\ primera\ ecuación: x + \frac{3}{2} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1; x = \frac{1}{2}$$

Posibles resultados

Tras utilizar el método de Gauss para resolver un sistema, podemos llegar a los siguientes resultados:

- Hay tantas ecuaciones como incógnitas: el sistema es compatible (tiene solución) determinado (la solución es única).
- Hay menos ecuaciones válidas que incógnitas: el sistema es compatible (tiene solución) indeterminado (tiene más de una solución)
- Se obtiene una igualdad "imposible" en una de las incógnitas. El sistema es incompatible (no tiene solución)

Ejemplos

$$\begin{cases} 2x + 3z = -1 \\ 3x - 2y - 2z = 5 \\ x - 2y - 5z = 6 \end{cases}$$

Realizamos las siguientes transformaciones: $E_2 - 3E_3 \to E_2$ y $E_1 - 2E_3 \to E_3$

$$\begin{cases} 2x+3z=-1 \\ 4y+13z=-13 \\ 4y+13z=-13 \end{cases}$$

Podemos observar que la segunda y tercera ecuación son iguales, por tanto, podemos eliminar una de estas ecuaciones, pues si seguimos aplicando el método de Gauss llegaremos a obtener la identidad 0 = 0.

$$\begin{cases} 2x+3z=-1 \\ 4y+13z=-13 \\ 0=0 \end{cases}$$

Por tanto, el sistema es compatible indeterminado. Para expresar el conjunto de soluciones podemos parametrizar, que consiste en asignar un parámetro distinto a tantas incógnitas como número de ecuaciones falten para que el sistema sea determinado. En este caso asignaremos un parámetro a ***z*** y resolveremos como si dicho parámetro sea un valor numérico:

$z=\alpha$; *de la segunda ecuación* $4y+13\alpha=-13$; *despejando* $y=-\frac{13\alpha+13}{4}$

de la primera ecuación $2x+3\alpha=-1$; *despejando* $x=-\frac{1+3\alpha}{2}$

Siendo el conjunto de soluciones: $\left(-\frac{1+3\alpha}{2},-\frac{13\alpha+13}{4},\alpha\right)$

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-2y+z=0 \\ 3x-y=2 \end{cases}$$

Realizamos las siguientes transformaciones: $2E_1-E_2\to E_2$ y $3E_1-E_3\to E_3$

$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 4y-3z=2 \\ 4y-3z=1 \end{cases}$ Aplicando la transformación $2E_2-E_3\to E_3$ queda $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 4y-3z=2 \\ 0=1 \end{cases}$. La última ecuación (se trata de una identidad falsa) indica que el sistema es incompatible (no tiene solución).

Notación matricial

El procedimiento de resolución puede ser más “ligero” si utilizamos la notación matricial para realizar las distintas transformaciones en el sistema. Veamos un ejemplo:

El sistema $\begin{cases} x+y+2z=1 \\ -y-3z=0 \\ -y+z=-2 \end{cases}$ puede expresarse en notación matricial como:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, donde la matriz de coeficientes es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz de términos independientes es $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

En una matriz disponemos los coeficientes junto con los términos independientes en orden, para mayor claridad, separaremos ambas por una línea:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$ y ahora aplicamos las transformaciones, lo que nos ahorra tener que estar reescribiendo constantemente las variables. Realizando la transformación $E_2 - E_3 \rightarrow E_3$, quedará:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right)$ Ahora solo falta reinterpretar el resultado: $z = -\frac{1}{2}$ $y = \frac{3}{2}$ $x = \frac{1}{2}$.

Cálculo del rango de una matriz por el método de Gauss

El rango de una matriz es el número máximo de filas, o columnas, linealmente independientes. Da igual tomar como referencia filas o columnas, el rango siempre es el mismo, el rango de una matriz es igual al rango de la matriz traspuesta.

Ejemplo

La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ está formada por tres filas que son linealmente dependientes. La tercera fila se puede obtener restando las dos primeras filas:

$F_3 = F_2 - F_1$;

De forma análoga, la primera columna puede obtenerse como combinación de la segunda y tercera columna:

$C_1 = \frac{1}{3}C_2 + \frac{1}{3}C_3$;

Por tanto, esta matriz tiene rango 2.

Ejemplo

La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ tiene 3 filas y 4 columnas, por tanto, su máximo rango posible es 3. Podemos observar que la tercera columna se puede obtener multiplicando por 3 la primera columna y que la segunda columna se puede obtener multiplicando por 2 la primera columna. Por tanto, las dos únicas columnas que son linealmente independientes son la primera y la cuarta. El rango de la matriz es 2.

De forma análoga, la segunda fila se puede obtener multiplicando por 2 la segunda fila, así, el número de filas linealmente independientes (como ya sabíamos). Por tanto, el rango de la matriz es 2 (como ya sabíamos).

El procedimiento para el cálculo del rango de una matriz puede realizarse utilizando el método de Gauss, lo que nos evita la búsqueda de combinaciones lineales entre filas o columnas.

El método de Gauss consiste en hacer ceros todos los elementos por debajo de la diagonal principal mediante transformaciones elementales:

Multiplicar una fila por un número (distinto de cero)

Sumar a una fila otra multiplicada por un número.

El rango de la matriz será el número de filas distintas de cero.

Ejemplo

Para calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 & 0 & 7 \\ 1 & \mathbf{0} & 1 & 3 \\ 3 & 2 & \mathbf{7} & 7 \end{pmatrix}$ haremos ceros en la primera columna de las filas 2 y 3 (la diagonal principal se encuentra en rojo).

Las transformaciones serán: $E_1 - 2E_2 \rightarrow E_2$ y $E_3 - 3E_2 \rightarrow E_3$, que dejan la matriz:

$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 & 0 & 7 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & 1 \\ 0 & 2 & \mathbf{4} & -2 \end{pmatrix}$ La siguiente transformación tendrá en cuenta únicamente las filas 2 y3. $2E_1 + E_3 \rightarrow E_3$. $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & -1 & 0 & 7 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}$. Por tanto, esta matriz tiene rango 2.