Matrices: ejercicios resueltos (2º Bachillerato CC)

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ encuentra todas las matrices B cuadradas de 2x2 tales que $AB = BA$.

Solución

Sea $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, como el producto de matrices es no conmutativo calcularemos los productos de ambas matrices:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a + b \\ c & 2c + d \end{pmatrix}$$

Igualando ambas expresiones, queda el siguiente sistemas de ecuaciones:

$\begin{cases} a + 2c = a \\ b + 2d = 2a + b \\ c = c \\ d = 2c + d \end{cases}$, de la primera y cuarta ecuación se obtiene $c = 0$, de la segunda ecuación se obtiene $a = d$, pudiendo ser b cualquier valor. Por tanto, la matriz B buscada tiene la forma: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

2. Sean las matrices A, B y C. tales que el producto $A \cdot B \cdot C$ es una matriz 3x2 y el producto $A \cdot C^t$ es una matriz cuadrada. Calcula, razonando la respuesta, las dimensiones de A, B y C.

Solución

La matriz A tiene por dimensión **3xn**, pues el resultado final es una matriz de 3x2 y el número de filas debe coincidir.

La matriz C tiene por dimensiones **mx2** pues el número de columnas debe coincidir con el de la matriz resultado, que es 3x2.

La matriz B debe tener por dimensiones **nxm** para poder realizar el producto.

La matriz C^t tiene por dimensiones 2xm y por tanto al poder ser multiplicada por B, B tiene que tener 2 columnas. Como el resultado tiene que ser una matriz cuadrada, la matriz B tiene que ser de 2x2.

Por tanto: $A \in M_{3x2}\,; B \in M_{2x2}\;\; y\; C \in M_{2x2}\,;$

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, obtener todas la matrices X que conmutan con A.

Solución

Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, obtengamos los productos:

$$AX = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ a-c & b-d \end{pmatrix}$$

$$XA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+b & -b \\ -c+d & -d \end{pmatrix}$$

Igualando componente a componente, queda el sistema:

$\begin{cases} -a = -a + b \\ -b = -b \\ a - c = -c + d \\ b - d = -d \end{cases}$ por tanto, de la primera ecuación obtenemos $b = 0$, de la tercera $a = d$.

Por tanto, las matrices buscadas son de la forma: $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$ siendo $a, c \in \mathbb{R}$

4. Calcula la matriz Y que verifica $M \cdot Y + M^{-1} \cdot Y = I$ siendo $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución

Calcularemos la inversa de M mediante el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) F_1 + F_2 \to F_2 \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) -1 \cdot F_1 \to F_1 \text{ y } -1 \cdot F_2 \to F_2 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Por tanto, $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$M \cdot Y + M^{-1} \cdot Y = I \implies Y(M + M^{-1}) = I$$

Por tanto, $M + M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$Y = (M + M^{-1})^{-1} I = (-2 \cdot I)^{-1} I = -\frac{1}{2} I = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

5. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

   a) Comprobad que verifica $A^3 - I = O$, siendo A la matriz identidad y O la matriz nula.

   b) Calcula A^{13}

c) Basándose en los apartados anteriores y sin recurrir al cálculo de inversas halla la matriz X que verifica: $A^2X + I = A$.

Solución

a) En definitiva se trata de verificar que $A^3 = I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Por tanto se verifica $A^3 - I = O$

b) Para calcular $A^{13} = (A^3)^4 \cdot A = I \cdot A = A$

c) Multiplicando por A ambos términos de la igualdad queda:

$$A(A^2X + I) = AA \Longrightarrow A^3X + A = A^2 \Longrightarrow X + A = A^2 \Longrightarrow X = A^2 - A$$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Encontrad las condiciones que deben cumplir a,b y c para que se verifique $AB = BA$

b) Para a=b=c=1 calculad B^{10}

Solución

a) $AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a + 2c & 5b + 2c & 0 \\ 2a + 5c & 2b + 5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$BA = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a + 2b & 2a + 5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando ambas matrices término a término queda el siguiente sistema lineal de ecuaciones.

$$\begin{cases} 5a+2c=5a+2b \\ 5b+2c=2a+5b \\ 2a+5c=7c \\ 2b+5c=7c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b-2c=0 \\ 2a-2c=0 \\ 2a-2c=0 \\ 2b-2c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c \\ b=c \end{cases}$$ Por tanto, B queda como:

$$B=\begin{pmatrix} x & x & 0 \\ x & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; con\; x \in \mathbb{R}$$

b) En este caso $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculemos $B^2=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculemos $B^3=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculemos $B^4=\begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ por inducción, $B^n=\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto, $B^{10}=\begin{pmatrix} 2^{10-1} & 2^{10-1} & 0 \\ 2^{10-1} & 2^{10-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 512 & 512 & 0 \\ 512 & 512 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. Comprobar que si A es una matriz cuadrada tal que $A^2=2A-I$, donde I es la matriz identidad, entonces A es invertible.
   a) ¿Cuál es la expresión de A^{-1}
   b) Utilizar el apartado anterior para calcular la inversa de la matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución

a) $A^2=2A-I$ *multiplicando por la inversa en ambos miembros*

$$A^{-1}\cdot A^2=A^{-1}\cdot(2A-I)=2A^{-1}A-A^{-1} \;\Rightarrow A=2I-A^{-1}$$

$$\Rightarrow\; A^{-1}=2I-A$$

Comprobemos que es inversible (tiene el determinante distinto de cero)

$$1=\det(I)=\det(A\cdot A^{-1})=\det\big(A(2I-A)\big)=\det(A)\det(2I-A)$$
$$\Rightarrow \det(A)\neq 0$$

b) Comprobemos que se dan las condiciones del enunciado:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2A - I = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = 2I - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

8. Sea una matriz cuadrada tal que $A^2 = A + I$, donde I es la matriz identidad. ¿Se puede asegurar que A admite inversa? Razonar la respuesta.

Solución

$A^2 = A + I \;\; \Rightarrow A^2 - A = I \;\Rightarrow A(A - I) = I$, es decir, de existir inversa ésta es la matriz $A - I$.
¿Es el determinante de $A - I$ distinto de cero?
$1 = \det(I) = \det\big(A(A - I)\big) = \det(A)\det(A - I)$ por tanto, ambos determinantes son distintos de cero y por tanto A es invertible.