Los vectores del espacio

El conjunto $\mathbb{R}^3$

El conjunto está formado por todas las ternas de número reales y puede definirse como:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

A cada elemento de la terna se le nombra como componente y la posición que ocupa.

El orden de los elementos de una terna es importante, así, dos ternas son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos en cada una de las posiciones.

Operaciones en $\mathbb{R}^3$

Suma en $\mathbb{R}^3$

$Dada\ las\ ternas\ (a,b,c)\ y\ (a',b',c')\ definimos\ la\ operción\ suma\ como\ \ otra\ terna:$

$$(a,b,c) + \ (a',b',c') = (a+a',b+b',c+c')$$

Producto de un número real por un elemento de $\mathbb{R}^3$

$Dada\ la\ terna\ (a,b,c)\ y\ k \in\ \mathbb{R}\ definimos\ la\ operción\ producto\ por\ un\ real\ como\ \ otra\ terna:$

$$k \cdot (a,b,c) = (k \cdot a, k \cdot b, k \cdot c)$$

Ejemplos

$$\left(2, \sqrt{3}, -2\right) + \ (1, 5\ , 2) = \left(2+1, 5+\sqrt{3}, -2+2\right) = \left(3, 5+\sqrt{3}, 0\right)$$

$$3 \cdot (1, 4, -2) = \ \left(3 \cdot 1, 3 \cdot 4\ , 3 \cdot (-2)\right) = (3, 12, -6)$$

$$5 \cdot \left(\left(-1, \sqrt{2}, 3\right) - \ (0, 5\ , -2)\right) + (0, 5\ , -2) = 5 \cdot \left(-1, -5+\sqrt{2}, 5\right) + (0, 5\ , -2) =$$

$$5 \cdot \left(-1, -5+\sqrt{2}, 5\right) + (0, 5\ , -2) = \left(-5, -25+5\sqrt{2}, 25\right) + (0, 5\ , -2) = \left(-5, -20+5\sqrt{2}, 23\right)$$

Vectores fijos del espacio

Un vector $\overrightarrow{AB}$ es un segmento orientado que tiene su origen en el punto A y su extremo en el punto B.

Las características de un vector son:

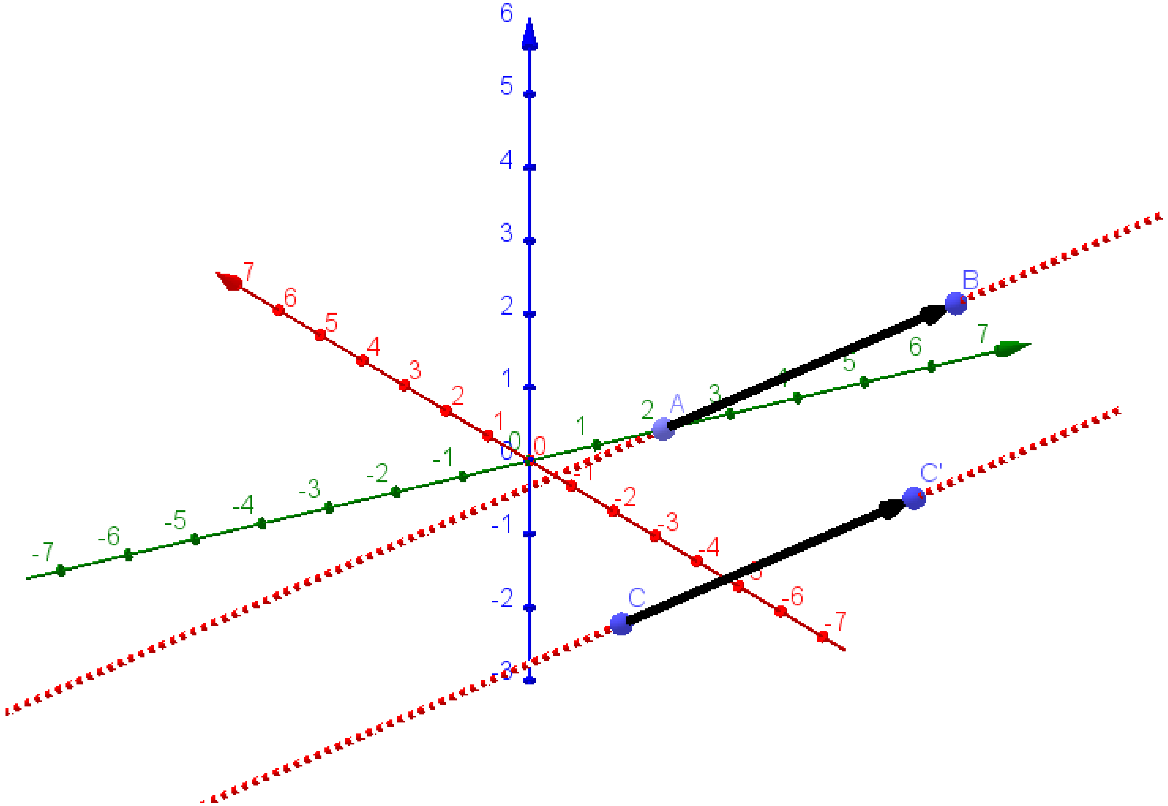
Módulo: se define como la longitud del segmento AB y se representa por $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

Dirección: se trata de la dirección de la recta que pasa por los puntos *A* y *B*. Dos vectores tienen la misma dirección si las rectas que les corresponden son paralelas.

Sentido: es el recorrido de la recta cuando avanzamos de *A* a *B* (en una recta hay dos sentidos).

Equipolencia de vectores

Dos vectores fijos, no nulos, son equipolentes si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.



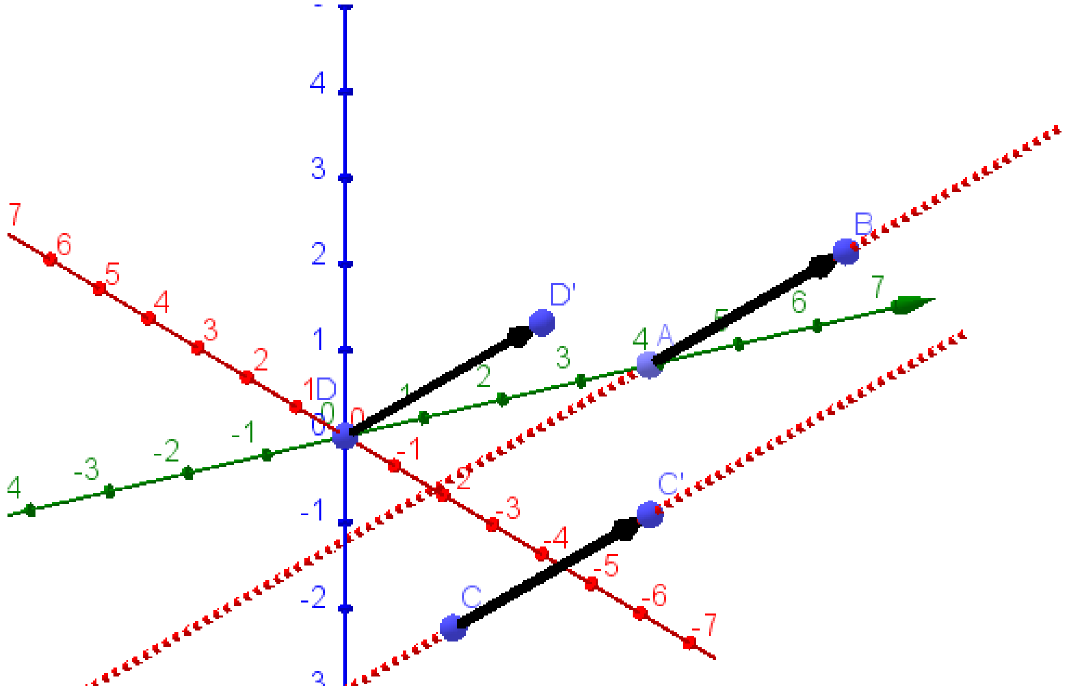
Vectores libres del espacio

Podemos definir una relación de equivalencia en el conjunto de los vectores fijos del espacio, agrupando en cada clase a todos los vectores equipolentes entre sí. A cada clase de vectores fijos se denomina vector libre, se suele representar con una letra minúscula $\vec{u}$.

Al conjunto de todos los vectores libres del espacio se le nombra como $\boldsymbol{V^3}$.

El módulo, la dirección y el sentido de un vector libre coincide con el de cualquiera de sus representantes.

Dado un punto fijo del espacio y dado un vector libre, existe un único representante de dicho vector con origen en dicho punto.



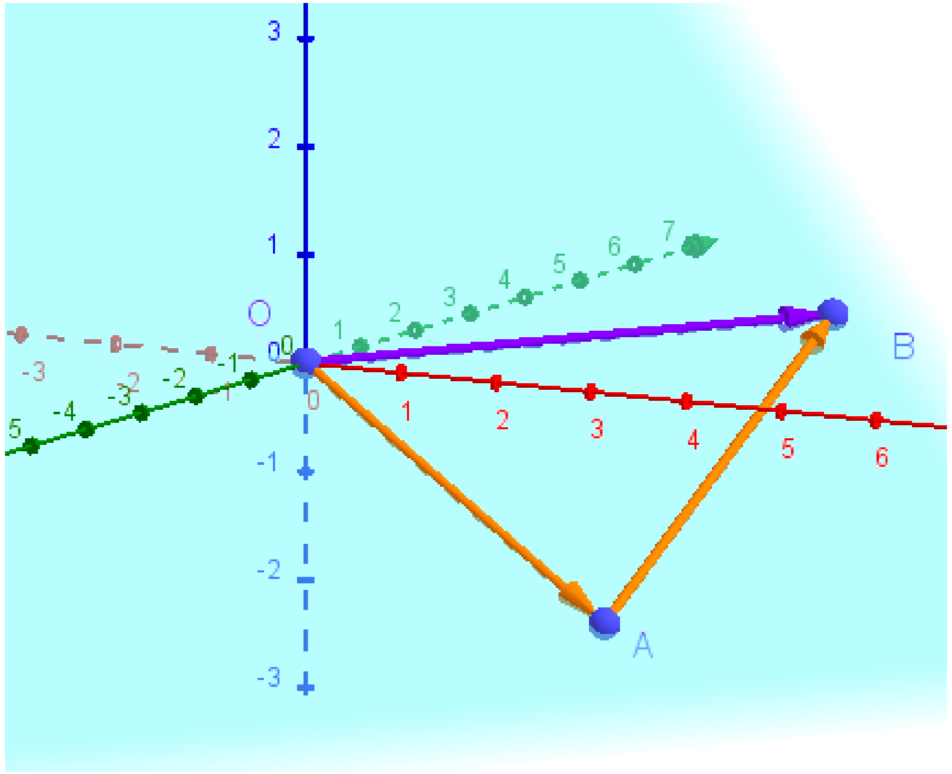
Suma de vectores libres

Dados dos vectores libres $\vec{u}$ y $\vec{v}$, la suma de ambos vectores es otro vector que se forma del siguiente modo:

Se toma un representante del vector $\vec{u}$, con extremos en O y A $\overrightarrow{OA}$.

Se toma un representante del vector $\vec{v}$ con origen en A, $\overrightarrow{AB}$.

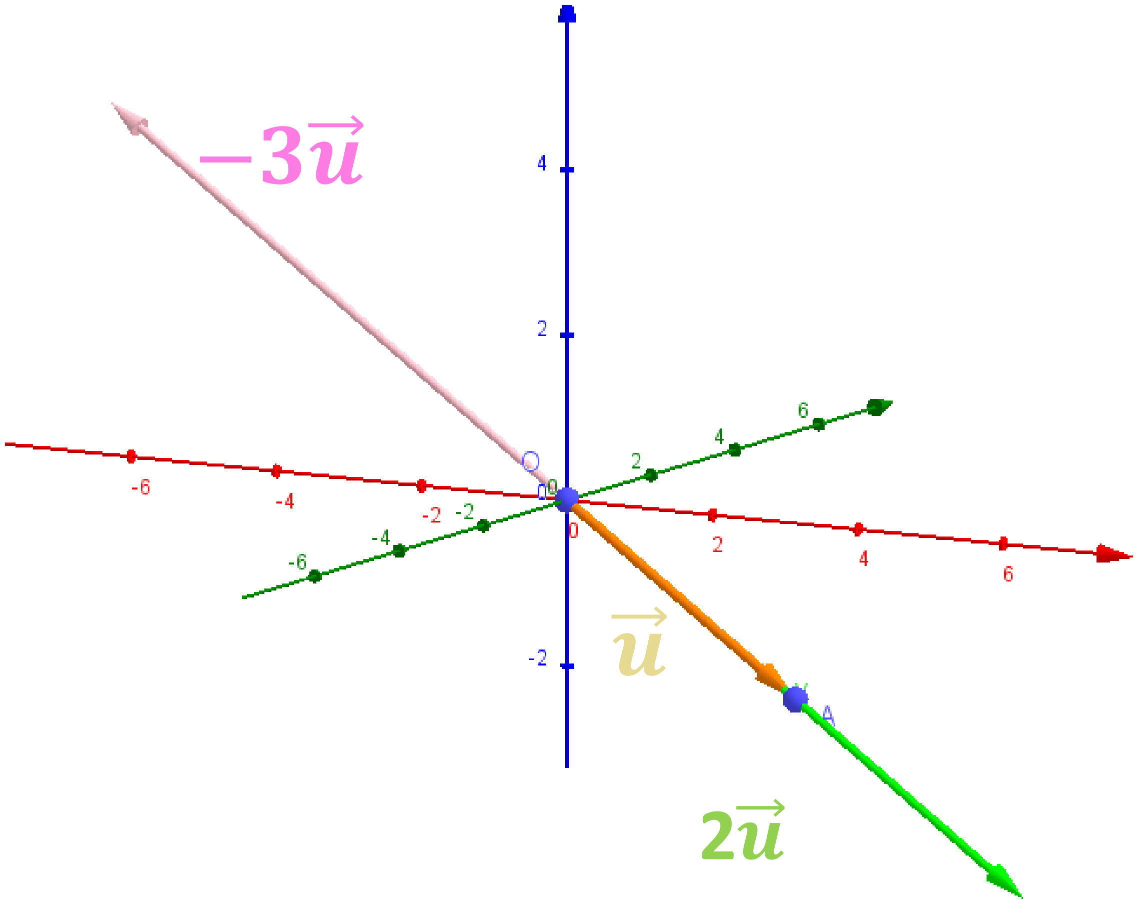
Un representante del vector $\vec{u} + \vec{v}$ es el vector fijo $\overrightarrow{OB}$



Producto de un número por un vector libre

Dado un vector libre $\vec{u}$ (no nulo) y un número real k distinto de cero. El producto $\mathrm{k} \cdot \vec{u}$ es otro vector libre con:

- El módulo $|\mathrm{k}\vec{u}| = |k| \cdot |\vec{u}|$
- Dirección del vector $\mathrm{k}\vec{u}$ la misma que $\vec{u}$
- El sentido del vector $\mathrm{k}\vec{u}$ el mismo que $\vec{u}$ si k>0 y opuesto a $\vec{u}$ si k<0.
- Si el vector es el vector nulo $(\vec{0})$ o k=0 el resultado es el vector nulo.



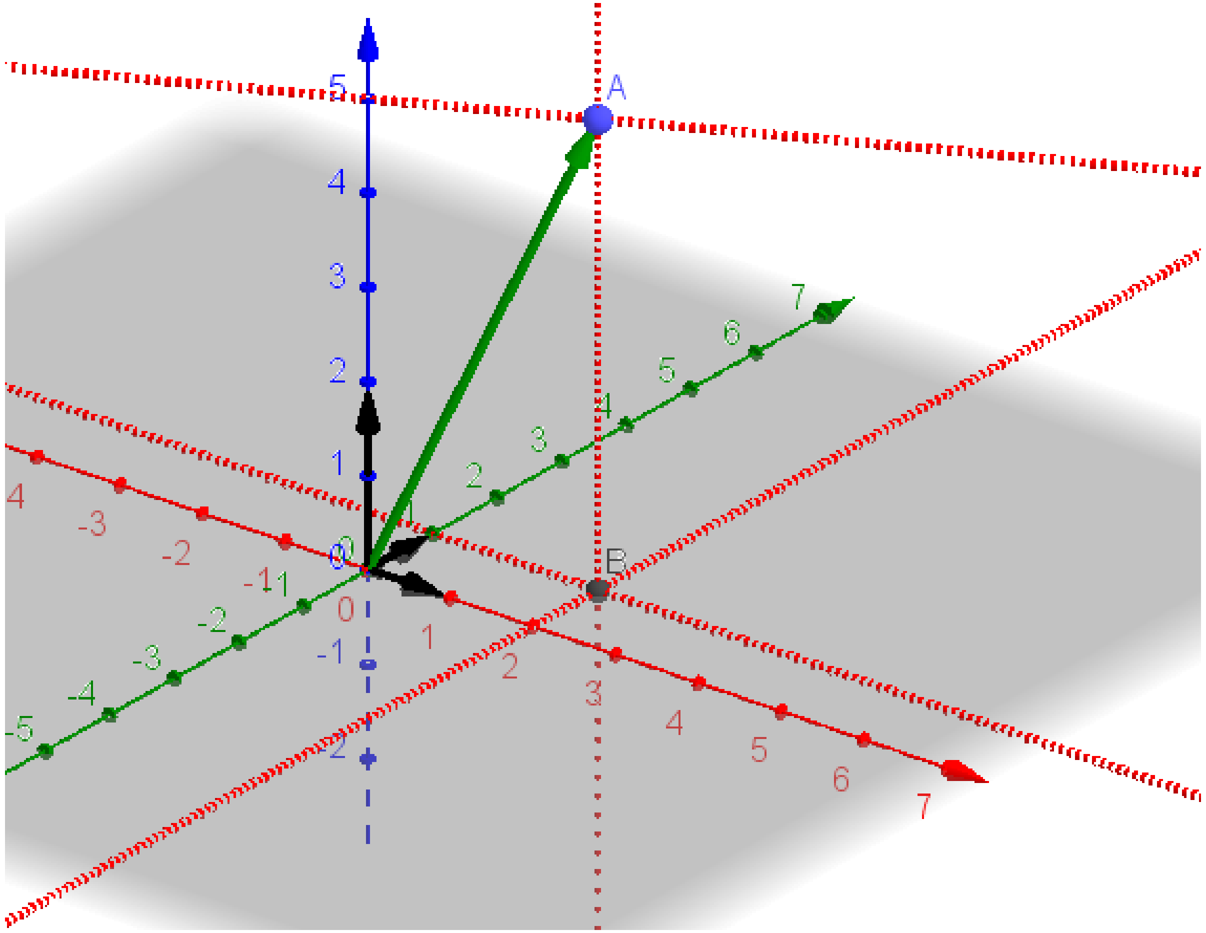
Combinación lineal

Un vector $\vec{v} \in V^3$ es combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \; y \; \vec{u}_3 \in V^3$, si existen $m, n \; y \; k \; \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\vec{v} = m\vec{u}_1 + n\vec{u}_2 + k\vec{u}_1$$

Se dice que $\vec{v}$ depende linealmente de $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \; y \; \vec{u}_3$.

Si un vector no depende linealmente de otros, se dice que son linealmente independientes.



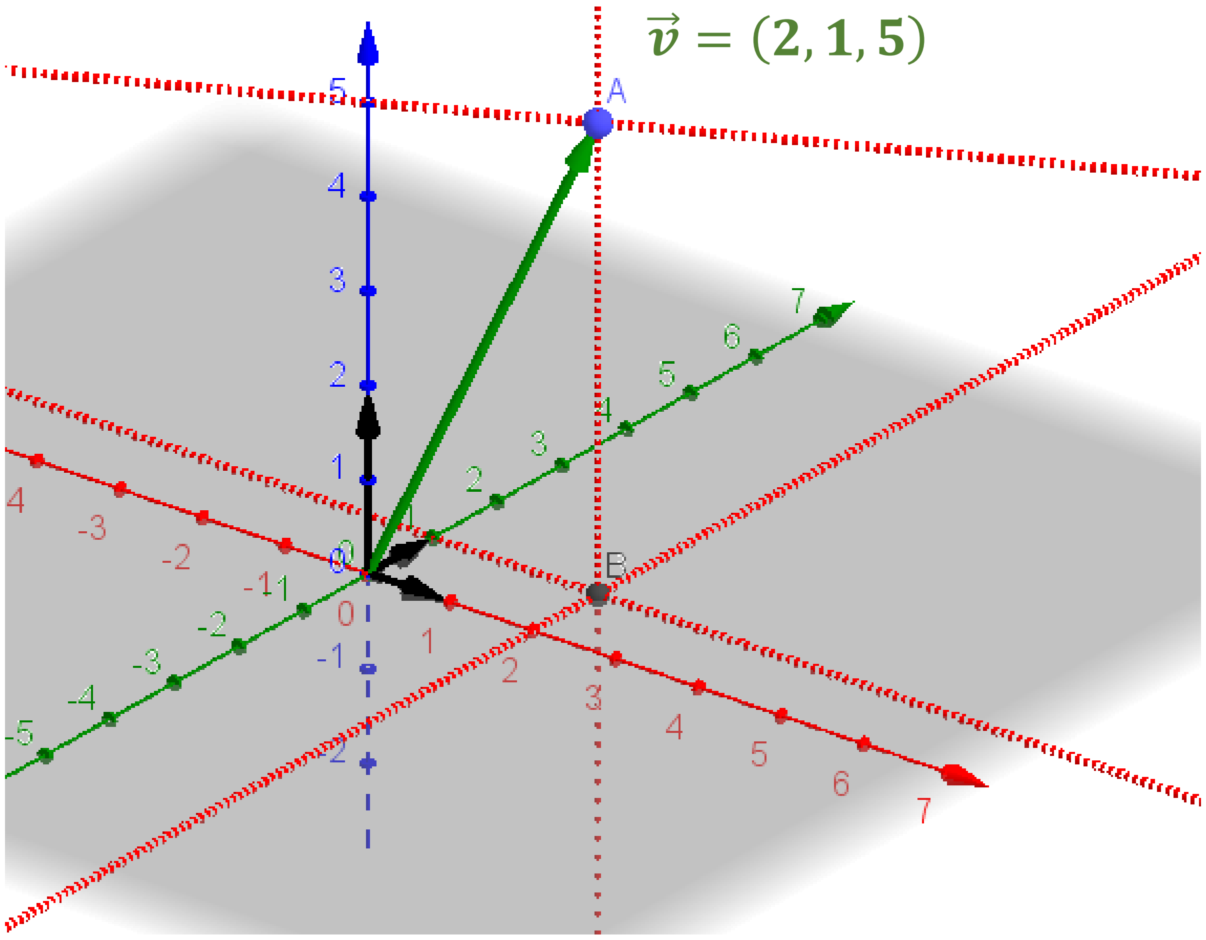
Ejemplo

Sean los vectores $\vec{\mathbf{u}}_1 = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$, $\vec{\boldsymbol{u}}_2 = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$ y $\vec{\boldsymbol{u}}_3 = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{2})$

El vector $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{5})$ es combinación lineal de los anteriores.

$$(\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{5}) = \mathbf{2} \cdot (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) + (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0}) + \frac{5}{2}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{2})$$

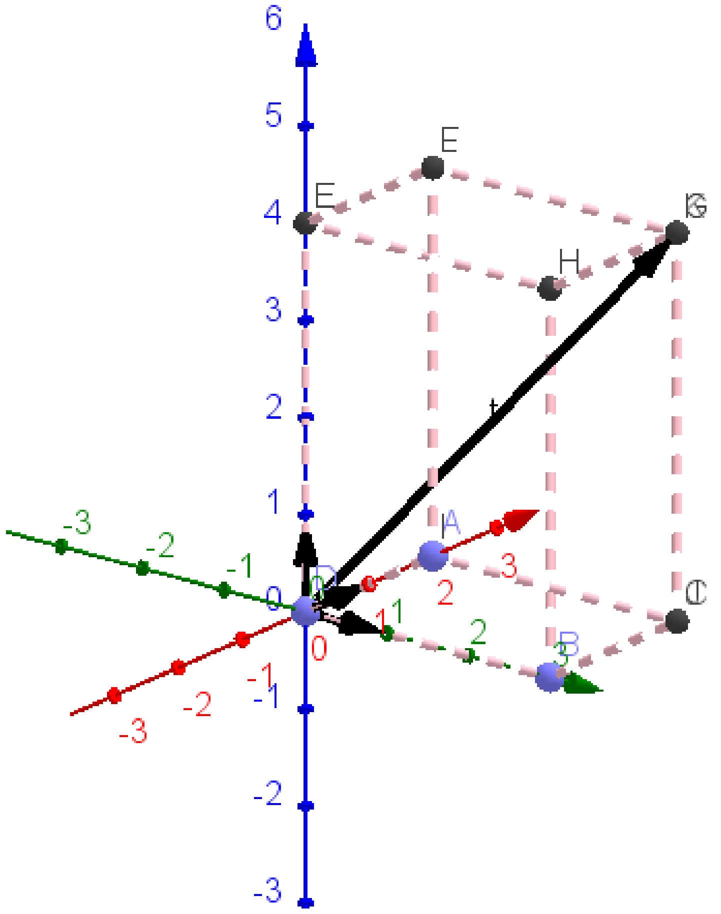
$$\vec{\boldsymbol{v}} = \mathbf{2}\vec{\mathbf{u}}_1 + \vec{\boldsymbol{u}}_2 + \frac{5}{2}\vec{\boldsymbol{u}}_3$$



Bases de V^3: Coordenadas de un vector

Tres vectores no coplanarios (linealmente independientes), no nulos, forman una base de V^3.

Cualquier vector de V^3 puede expresarse como combinación lineal de una base. A los números que permiten expresar un vector como combinación lineal de la base se denomina coordenadas cartesianas del vector.



$$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}, \qquad \vec{v} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3$$

$\textit{Coordenadas de } \vec{v} \textit{ respecto de } B\ (x, y, z)$

Producto escalar de dos vectores libres

El producto escalar de dos vectores libres se notará por $\vec{u} \cdot \vec{v}$ se define como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Si uno de los vectores es nulo el producto escalar sería nulo.

Propiedades:

El producto escalar de un vector por si mismo siempre es positivo: $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$

El producto escalar es conmutativo: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

El producto escalar es homogéneo: $\mathrm{k} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$

El producto escalar es distributivo respecto de la suma de vectores

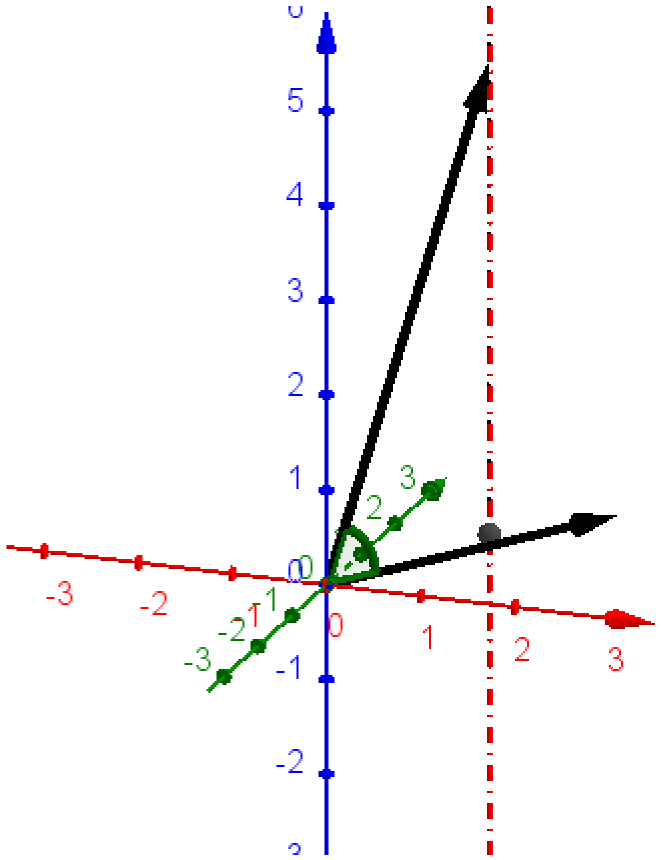
$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Interpretación geométrica

El valor $|\vec{u}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$ es el módulo de la proyección del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$.

Dos vectores son ortogonales si forman un ángulo de 90^o, por tanto su producto escalar será 0 ($cos(90^o) = 0$).

Dos vectores tienen la misma dirección si su producto escalar coincide con el producto de sus módulos ($cos(0^o) = 1$)



Base ortonormal

Una base se dice normada cuando sus vectores son unitarios (tienen módulo 1)

Una base se dice ortogonal cuando sus vectores forman ángulos de 90º.

Una base se dice ortonormal cuando sus vectores son unitarios y ortogonales.

La base formada por los vectores $\vec{\imath} = (1,0,0); \vec{\jmath} = (0,1,0); \vec{k} = (0,0,1)$ es una base ortonormal.

La expresión analítica del producto escalar de dos vectores cuando se utiliza una base ortonormal es:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

Módulo de un vector. Ángulo de dos vectores

El módulo de un vector en función del producto escalar puede expresarse como:

$$\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}) \cdot (\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u_3}) = \boldsymbol{u_1}^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{u_2}^{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{u_3}^{\boldsymbol{2}} = |\vec{\boldsymbol{u}}|^{\boldsymbol{2}}$$

El coseno del ángulo que forman dos vectores puede expresarse como:

$$cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3}{\sqrt{u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2} + \sqrt{v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_3{}^2}}$$

Producto vectorial

El producto vectorial de dos vectores libres $\vec{u}\ y\ \vec{v}$, es otro vector, que se notará por $\vec{u}\ x\ \vec{v}$ y que tiene las siguientes características:

Si $\vec{u}\ o\ \vec{v}$ son el vector nulo, o son linealmente dependientes, el producto es el vector $\vec{0}$

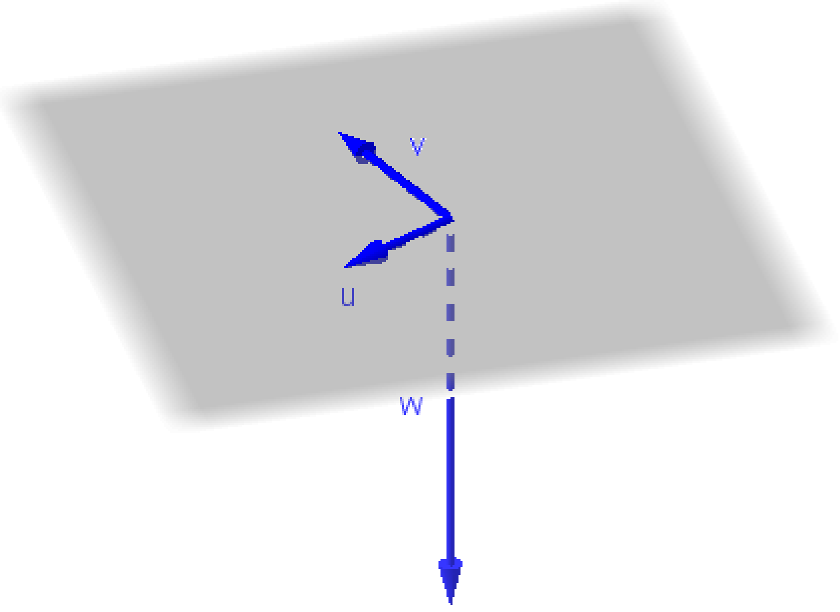
Si $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ no son el vector nulo y son linealmente independientes, el producto vectorial es otro vector que:

Tiene por **módulo** $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen(\vec{u}\ , \vec{v})$

Su **dirección** es perpendicular a los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$.

Su **sentido** es el de avance de un sacacorchos que

gira en sentido positivo de $\vec{u}\ a\ \vec{v}$.



Propiedades del producto vectorial

Propiedades

Anticonmutativa $\vec{u}\,x\,\vec{v} = -(\vec{v}\,x\,\vec{u})$

Homogéneo: $\mathrm{k}\cdot(\vec{u}\,x\,\vec{v}) = (k\vec{u})\,x\,\vec{v} = \vec{u}\,x\,(k\vec{v})$

El producto escalar es distributivo respecto de la suma de vectores $\vec{u}\,x\,(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\,x\,\vec{v}+\vec{u}\,x\,\vec{w}$

Expresión analítica del producto vectorial:

Siendo B la base ortonormal formada por los vectores $\vec{i} = (1,0,0); \vec{j} = (0,1,0); \vec{k} = (0,0,1)$, las

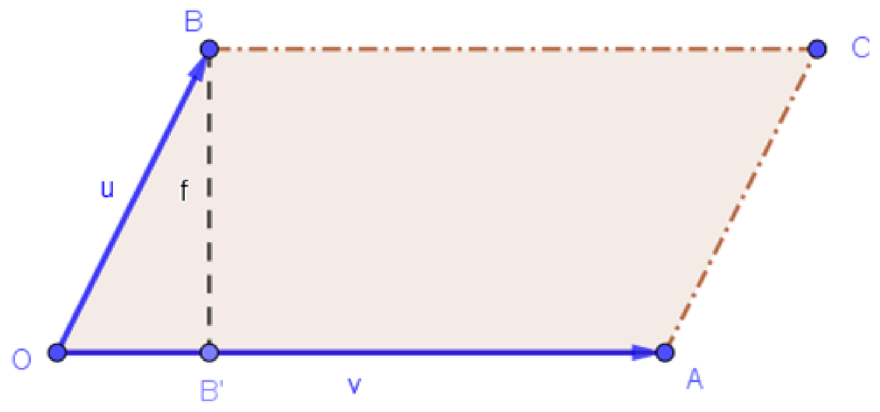
coordenadas del vector resultante vienen dadas por

$$\vec{u}\,x\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

Interpretación geométrica del producto vectorial

Teniendo en cuenta la imagen:

$$\operatorname{sen}(\vec{u},\vec{v}) = \frac{|BB'|}{|\vec{u}|}, \text{por tanto}, |BB'| = |\vec{u}|\operatorname{sen}(\vec{u},\vec{v})$$



Multiplicando ambos miembros por el módulo del vector $\vec{v}$

$$|\vec{v}||BB'| = |\vec{u}||\vec{v}|\operatorname{sen}(\vec{u},\vec{v}) = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

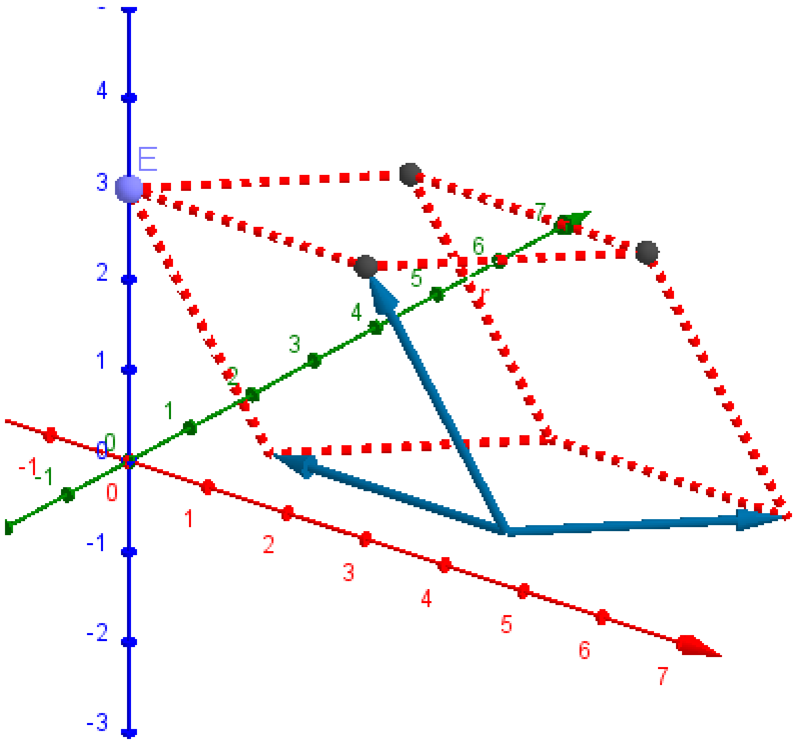
Por tanto, el módulo del producto vectorial de dos vectores se corresponde con el área del paralelogramo que tiene por lados ambos vectores.

Producto mixto de tres vectores

El producto mixto de tres vectores libres $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, es un número real, que notaremos por $[\vec{u}\,,\vec{v},\vec{w}]$ y está definido por:

$$[\vec{u}\,,\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}\cdot(\vec{v}\;x\;\vec{w})$$

$$|[\vec{u}\,,\vec{v},\vec{w}]| = |\vec{u}||\vec{v}\;x\;\vec{w}|cos(\vec{u},\vec{v}\;x\;\vec{w})$$



La expresión $|\vec{u}|cos(\vec{u},\vec{v}\;x\;\vec{w})$ es la altura del paralelepípedo y $|\vec{v}\;x\;\vec{w}|$ es el área de la base. Por tanto, el producto mixto es el volumen del paralelepípedo.

$$[\vec{u}\,,\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$ expresión analítica del producto mixto