Vectores en el espacio (2º Bachillerato CC)

1. Dados los vectores $\vec{u}=(4,-9,1), \vec{v}=(2,-5,1)\ y\ \vec{w}=(0,-1,1)$:
   a) Calcula los vectores $3\vec{u}-2\vec{v}+5\vec{w}\ y -\vec{u}+3\vec{v}-2\vec{w}$
   b) Calcula $m\ y\ n\ tales\ que\ \vec{u}=m\vec{v}+n\vec{w}$
2. Comprueba si los vectores $\vec{u}=(2,2,6), \vec{v}=(2,-1,0)\ y\ \vec{w}=(4,1,6)$ son linealmente independientes.
3. Calcula m tal que los siguientes vectores sean linealmente dependientes:
   a) $\vec{u}=(m,-3,2), \vec{v}=(2,3,m)\ y\ \vec{w}=(2,3,-2)$
   b) $\vec{u}=(3,2,5), \vec{v}=(-2-4,-7)\ y\ \vec{w}=(-1,1,m)$
4. Calcula un vector unitario con la misma dirección:
   a) $\vec{u}=(2,1,2)$
   b) $\vec{u}=(1,-3,2)$
5. Calcula el punto medio del segmento definido por los puntos $A=(-5,6,3)\ y\ B=(-3,4,7)$.
6. ¿Forman una base los vectores $\vec{u}=(3,-1,2), \vec{v}=(4,3,-1)\ y\ \vec{w}=(-2,5,1)$?.
7. Las coordenadas de tres vértices consecutivos de un paralelogramo son: $A=(4,7,-3)$, $B=(5,1,-2)\ y\ C=(3,2,-4)$. Calcula las coordenadas del vértice que falta.
8. Calcula el baricentro del triángulo cuyos vértices son los puntos siguientes: $A=(2,1,-4)$, $B=(-5,1,3)\ y\ C=(6,7,-5)$.
9.
10. Calcula el producto escalar de los siguientes vectores expresados en una base ortonormal:
    a) $\vec{u}=(3,-1,2), \vec{v}=(4,3,-1)$
    b) $\vec{u}=(6,0,1), \vec{v}=(2,-1,3)$
11. Sea $|\vec{u}|=3\ y\ |\vec{v}|=4$, sabemos que el ángulo que forman los vectores es de 60º, calcula:
    a) $\vec{u}\cdot\vec{v}$
    b) $\vec{u}\cdot\vec{u}$
    c) $\vec{v}\cdot\vec{v}$
    d) $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})$
12. Calcula la proyección del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$ en los siguientes casos:
    a) $\vec{u}=(3,-1,2), \vec{v}=(4,3,-1)$
    b) $\vec{u}=(3,1,5), \vec{v}=(2,-2,1)$
13. Calcula el ángulo que forman los siguientes vectores:
    a) $\vec{u}=(2,0,1), \vec{v}=(2,-2,1)$
    b) $\vec{u}=(-2,1,-3), \vec{v}=(-1,-5,-2)$
14. Calcula el valor de m para que los siguientes vectores sean ortogonales:
    a) $\vec{u}=(-5,2,m), \vec{v}=(-4,-1,3)$
    b) $\vec{u}=(2,m,-5), \vec{v}=(-1,-3,m)$
15. Calculad un vector unitario ortogonal a $\vec{u}=(-2,0,1)$

16.Calcula el producto vectorial de los siguientes vectores:
   a) $\vec{u}=(1,-2,4),\vec{v}=(-2,1,-3)$v
   b) $\vec{u}=(5,0,-1),\vec{v}=(-1,1,-2)$
17.Sean dos vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ perpendiculares entre sí y $|\vec{u}|=3\ y\ |\vec{v}|=4$, calcula $(\vec{u}+\vec{v})x(\vec{u}-\vec{v})$
18.Dados los vectores $\vec{u}=(1,-3,2),\vec{v}=(2,3,0)\ y\ \vec{w}=(2,3,-2)$ calcula:
   a) $(\vec{u}x\vec{v})\ x\ \ \vec{w}$
   b) $\vec{u}\ x\ (\vec{v}x\,\vec{w})$
19.Calcula un vector perpendicular a los siguientes $\vec{u}=(2,-1,0),\vec{v}=(5,1,-2)$
20.Dados los vectores $\vec{u}=(3,-1,-2),\vec{v}=(1,2,-1)$ calcula:
   a) $\vec{u}x\vec{v}$
   b) $(2\vec{u}+\vec{v})x\vec{v}$
21.Calcula el área del triángulo ABC tal que: $A=(1,2,1),\ B=(1,-1,0)y\ C=(2,1,1)$
22.Sean los puntos $A=(1,k,0),B=(1,1,k-2)y\ C=(1,-1,k)$
   a) Comprueba que los tres puntos no están alineados, cualquiera que sea el valor que tome k.
   b) Halla el área del triángulo determinada por los tres puntos.
23.Dados los puntos $A=(1,-1,3),B=(1,2,1)y\ C=(1,0,-1)$ calcula las coordenadas de todos los puntos posibles D para que ABCD formen un paralelogramo.
24.Sea el tetraedro cuyos vértices son los puntos $A=(1,0,0),B=(1,1,1)\ \ C=(-2,1,0)\ D=(0,1,3)$
   a) Calcula el área del triángulo ABC
   b) Calcula el volumen del tetraedro ABCD.
25.Sean los vectores $\vec{u}=(1,2,-1),\vec{v}=(1,-1,1)\ y\ \vec{w}=(2,5k,-3k)$. Calcular el valor de *k* para que los vectores sean linealmente dependientes. Para tal valor, expresar el vector $\vec{w}$ en función de los otros dos.
26.Determinar si los vectores $\vec{u}=(3,-1,0),\vec{v}=(0,5,4)\ y\ \vec{w}=(-1,1,2)$ son linealmente independientes. Expresar el vector $\vec{x}=(7,1,-4)$ como combinación lineal de los anteriores.
27.Calcula los vectores unitarios que son perpendiculares a $\vec{u}=(1,0,1)$ y forman un ángulo de 60º con $\vec{v}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$.
28.Dados los vectores $\vec{u}=(3,-1,0),\vec{v}=(0,5,4)\ y\ \vec{w}=(-1,1,2)$ comprobad que la definición de producto mixto coindice con su expresión analítica.
29.Dados los puntos A(1,-2,0), B(-2,4,4) y C(3,-1,-1), se pide:
   a) Calculad un vector perpendicular a $\overrightarrow{AB}y\ \overrightarrow{AC}$
   b) Calculad el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}y\ \overrightarrow{AC}$
   c) Calculad el área del triángulo formado por los anteriores puntos.
   d) Calculad el volumen del tetraedro de vértices el origen y los tres puntos anteriores.

30. Prueba, utilizando el producto escalar, que si $\vec{v}\ y\ \vec{w}$ son perpendiculares y $\vec{v}\ y\ \vec{u}$ también los son, entonces $\vec{v}$ es perpendicular a $n\vec{w}+m\,\vec{u}$.
31. Justifica por qué el producto mixto de los vectores $\vec{v}\,,\vec{u}\ y\ \vec{v}+\vec{u}$ es igual a cero siempre.
32. Calcula el valor de *m* tal que $\vec{u}=(1,2,-1), \vec{v}=(0,1,2)\ y\ \vec{w}=(-1,m,3)$, son linealmente dependientes. Obtén en este caso la relación de dependencia.
33. Sean $\vec{u}=\left(3,-2,\sqrt{3}\right), \vec{v}=(4,-2,-4)$, calcula el módulo de los dos vectores, el ángulo que forman y el vector proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.
34. Dados los vectores $\vec{u}=(3,-4,0), \vec{v}=(m,0,7)$.
    a) Calcula m para que los vectores sean perpendiculares
    b) Calcula $\vec{w}$ vector unitario perpendicular a $\vec{u}\ y\ \vec{v}$.
35. Calcula el área del triángulo determinado por los vectores $\vec{u}=(5,-1,3)\ y\ \vec{v}=(4,0,7)$
36. Calcula el volumen de un tetraedro determinado por los vectores:
$$\vec{u}=(5,-1,3), \vec{v}=(4,0,7)\ y\ \vec{w}=(-2,6,3)$$
37. Calculad un vector de módulo 10 que sea perpendicular a $\vec{u}=(3,-1,0)$ y forme un ángulo de 60º con el vector $\vec{v}=(0,0,1)$.