Vectores en el espacio: ejercicios resueltos

1. Dados los vectores $\vec{u} = (4,-9,1), \vec{v} = (2,-5,1)\ y\ \vec{w} = (0,-1,1)$:
   a) Calcula los vectores $3\vec{u} - 2\vec{v} + 5\vec{w}\ y - \vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{w}$
   b) Calcula $m\ y\ n\ tales\ que\ \vec{u} = m\vec{v} + n\vec{w}$

Solución

a) $3\vec{u} - 2\vec{v} + 5\vec{w} = 3 \cdot (4,-9,1) - 2 \cdot (2,-5,1) + 5 \cdot (0,-1,1) = (8,-22,6)$

b) $\vec{u} = m\vec{v} + n\vec{w} \Longrightarrow (4,-9,1) = m(2,-5,1) + n(0,-1,1) \Longrightarrow \begin{cases} 4 = 2m \\ -9 = -5m - n \\ 1 = m + n \end{cases}$

$m = 2\ (de\ la\ primera\ ecuación); n = -1\ (de\ la\ segunda\ y\ tercera\ ecuación)$

2. Comprueba si los vectores $\vec{u} = (2,2,6), \vec{v} = (2,-1,0)\ y\ \vec{w} = (4,1,6)$ son linealmente independientes.

Solución

Basta calcular el determinante cuyas filas se encuentra formado por las coordenadas de los tres vectores, si es distinto de cero, son linealmente independientes:

$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$, por tanto, son linealmente dependientes.

(Otra forma)

Si son linealmente dependientes, uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los otros dos:

$$(2,2,6) = m(2,-1,0) + n(4,1,6) \Longrightarrow \begin{cases} 2 = 2m + 4n \\ 2 = -m + n \\ 6 = 6n \end{cases}$$

$n = 1\ (de\ la\ tercera\ ecuación); m = -1\ (de\ la\ primera\ y\ segunda\ ecuación)$

Por tanto, son linealmente dependientes.

3. Calcula un vector unitario con la misma dirección $\vec{u} = (2,1,2)$

Solución

Bastará con calcular el módulo del vector y multiplicar el vector por el inverso del módulo:

$$|\vec{u}| = |(2,1,2)| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

El vector buscado es: $\vec{v} = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

4. ¿Forman una base los vectores $\vec{u} = (3,-1,2), \vec{v} = (4,3,-1)\ y\ \vec{w} = (-2,5,1)$?

Solución

Si son linealmente independientes formarán una base de V^3.

$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 78 \neq 0$ Son linealmente independientes.

5. Calcula el baricentro del triángulo cuyos vértices son los puntos siguientes: $A = (2,1,-4)\ , B = (-5,1,3)\ y\ C = (6,7,-5)$.

Solución

El baricentro de un triángulo es el punto de intersección de sus medianas. Se obtiene sumando las coordenadas de cada uno de los puntos y dividiendo entre 3.

$$G = \left(\frac{2-5+6}{3}, \frac{1+1+7}{3}, \frac{-4+3-5}{3}\right) = (1,3,-2)$$

6. Calcula el producto escalar de los siguientes vectores expresados en una base ortonormal $\vec{u} = (3,-1,2), \vec{v} = (4,3,-1)$

Solución

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3,-1,2) \cdot (4,3,-1) = 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot (-1) = 7$$

7. Sea $|\vec{u}| = 3\ y\ |\vec{v}| = 4$, sabemos que el ángulo que forman los vectores es de 60º, calcula:
   a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$
   b) $\vec{u} \cdot \vec{u}$
   c) $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v})$

Solución

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos 60º = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 6$
b) $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot cos 0^o = 3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$
c) $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = 9 + 16 = 25$

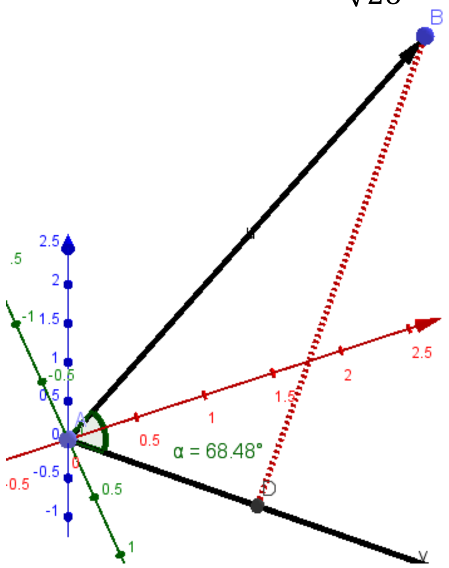
8. Calcula la proyección del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$:
   $\vec{u} = (3,-1,2), \vec{v} = (4,3,-1)$

Solución

Sabemos que:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{Proy\ (\vec{u},\vec{v})}{|\vec{u}|} \Rightarrow Proy\ (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$Proy\,(\vec{u},\vec{v}) = \frac{7}{\sqrt{26}}$$



9. Calcula el ángulo que forman los siguientes vectores

$$\vec{u} = (2,0,1), \vec{v} = (2,-2,1)$$

Solución

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v}) \Longrightarrow 4+0-2 = 3\sqrt{5}\cos(\vec{u},\vec{v}) \Longrightarrow \cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{2}{3\sqrt{5}}$$

$$\text{angulo}(\vec{u},\vec{v}) = arcos\,\frac{2}{3\sqrt{5}} = 72.65^{o}$$

10. Calcula el valor de m para que los siguientes vectores sean ortogonales $\vec{u} = (-5,2,m), \vec{v} = (-4,-1,3)$

Solución

Como tienen que formar un ángulo de 90º el producto escalar debe ser 0. Por tanto:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 20-2+3m = 18+3m = 0 \;\Longrightarrow m = -6$$

11. Calculad un vector unitario ortogonal a $\vec{u} = (-2,0,1)$

Solución

Buscamos un vector cuyo producto escalar con $\vec{u}$ sea cero y su módulo 1.

El vector ortogonal podría ser $\vec{v} = (1,0,2)$, como $|\vec{v}| = \sqrt{5}$, el vector pedido puede ser:

$$\vec{v}\cdot\frac{1}{|\vec{v}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2)$$

12. Calcula el producto vectorial de los siguientes vectores:

$$\vec{u} = (1,-2,4), \vec{v} = (-2,1,-3)$$

Solución

$$\vec{u} \, x \, \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} - 3\vec{k} = (2,-5,-3)$$

13. Sean dos vectores $\vec{u} \, y \, \vec{v}$ perpendiculares entre sí y $|\vec{u}| = 3 \, y \, |\vec{v}| = 4$, calcula $(\vec{u}+\vec{v})x(\vec{u}-\vec{v})$

Solución

$$(\vec{u}+\vec{v})x(\vec{u}-\vec{v}) = (\vec{u}+\vec{v}) \, x \, \vec{u} - (\vec{u}+\vec{v}) \, x \, \vec{v} = \vec{u} \, x \, \vec{u} + \vec{v} \, x \, \vec{u} - \vec{u} \, x \, \vec{v} - \vec{v} \, x \, \vec{v} =$$

$$= 2 \, \vec{v} \, x \, \vec{u}$$

Por tanto, sólo podemos saber que su módulo es 24 y su dirección perpendicular a la de los anteriores.

14. Calcula el área del triángulo ABC tal que: $A = (1,2,1), B = (1,-1,0) \; y \; C = (2,1,1)$

Solución

Formamos los vectores $\overrightarrow{AB} = (0,-3,-1) \; y \; \overrightarrow{AC} = (1,-1,0)$.

Calculemos el producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} x \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,-1,3)$$

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo (módulo del vector resultante del producto vectorial).

$$Área \; del \; triángulo = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} x \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+3^2} = \frac{1}{2}\sqrt{11}u.s.$$

15. Dados los puntos A(1,-2,0), B(-2,4,4) y C(3,-1,-1), se pide:

a) Calculad un vector perpendicular a $\overrightarrow{AB} y \; \overrightarrow{AC}$
b) Calculad el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB} y \; \overrightarrow{AC}$
c) Calculad el área del triángulo formado por los anteriores puntos.
d) Calculad el volumen del tetraedro de vértices el origen y los tres puntos anteriores.

Solución

a) $\overrightarrow{AB} = (-3,6,4) \; y \; \overrightarrow{AC} = (2,1,-1)$

Calcularemos el producto vectorial pues nos proporciona un vector perpendicular a los dados:

$$\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-10,5,-15)$$

b) Para calcular el ángulo que forman, utilizaremos el producto escalar:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \implies \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{-4}{\sqrt{61}\sqrt{6}}$$

$$\text{ángulo}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = arcos(\frac{-4}{\sqrt{61}\sqrt{6}}) = 102{,}07^o$$

c) El área del triángulo viene dado por la mitad del área del paralelogramo que forman ambos vectores, por lo que utilizaremos el módulo del producto vectorial.

$$Área_{triángulo(A,B,C)} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-10)^2 + 5^2 + (-15)^2} = \frac{5\sqrt{14}}{2}\ u.s.$$

d) El volumen del tetraedro es una sexta parte del volumen dl paralelepípedo que determinan los cuatro puntos. El volumen del paralelepípedo puede obtenerse utilizando el producto mixto.

Formamos el vector $\overrightarrow{AO} = (-1,2,0)$

$$Volumen_{tetraedro} = \frac{1}{3}[\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{20}{3}\ u.v.$$