

La raíz cuadrada de 2 no es racional (*):

Solución. En efecto: Supongamos que (*) es falsa. Tenemos que $\sqrt{2}$ es un número racional. Es decir: $\sqrt{2} = a/b$ con a y b enteros. Podemos suponer, además, que $(a,b) = 1$ (es decir que la fracción a/b fue simplificada todo lo posible). Se tiene, elevando al cuadrado que $2b^2 = a^2$.

Entonces a^2 es un número par. Entonces a es un número par. Entonces $a = 2k$. Entonces $a^2 = 4k^2$, entonces $b^2 = 2k^2$. Entonces b^2 es par, luego b es par. Pero si a y b son pares, (a,b) es distinto de 1. Contradicción. Luego, (*) es verdadera.