



Números racionales

IES
LAS
CANTERAS
COLLADO VILLALBA

Fracciones numéricas enteras

- En matemáticas, una fracción numérica entera expresa la división de un número entero en partes iguales.
- Una fracción numérica consta de dos términos:
 - El numerador (se corresponde con el dividendo de la división)
 - El denominador (se corresponde con el divisor de la división)
- El denominador nunca puede ser cero.

$$\frac{a}{b}$$

← Numerador

← Denominador

Ejemplos



$$\frac{7}{8}$$



$$\frac{1}{8}$$



$$\frac{3}{8}$$



$$\frac{1}{6}$$



$$\frac{2}{6}$$



$$\frac{3}{6}$$



$$\frac{4}{6}$$



$$\frac{5}{6}$$

Fracciones propias e impropias

- Una fracción es propia si el numerador es menor que el denominador, será impropia en caso contrario.

Fracciones propias

$$\frac{3}{8}$$
$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{12}{15}$$

Fracciones impropias

$$\frac{9}{8}$$
$$\frac{31}{2}$$

$$\frac{14}{3}$$

Descomposición de una fracción impropia

- Una fracción impropia es mayor que la unidad, pues su numerador es mayor que su denominador.
- Podemos expresar una fracción impropia como suma de una parte entera y una fracción propia

Ejemplo:

$$\frac{14}{5} = 2 + \frac{4}{5}$$

Interpretando fracciones

- Podemos interpretar una fracción numérica como sigue:
 - El denominador indica el número de partes en que hemos dividido la unidad.
 - El numerador indica el número de partes del tamaño anterior que hemos tomado.

IES
LAS
CANTERAS
COLLADO VILLALBA

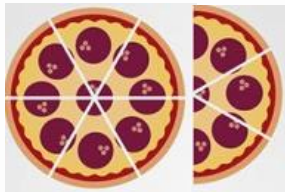
Ejemplos

 $\frac{7}{8}$ 

Cada porción es un octavo. Hemos seleccionado 7 porciones

 $\frac{2}{5}$ 

Una moneda de 20 céntimos, representa una quinta parte de un euro, por tanto 40 céntimos de euro son dos quintas partes de un euro.

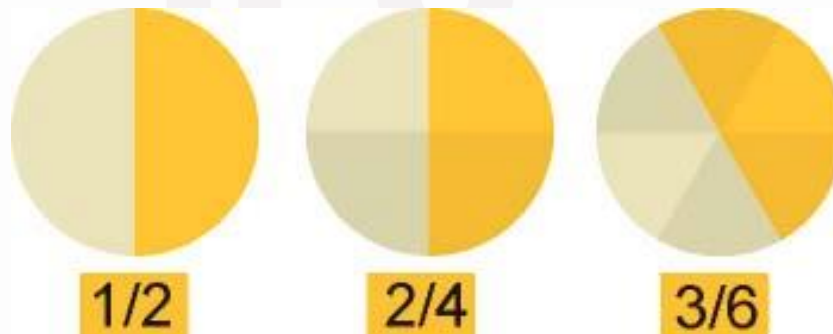
 $\frac{9}{6}$ 

Cada pizza ha sido dividida en 6 partes iguales, hemos tomado 9 trozos en total.

IES
LAS
CANTINERAS
COLLADO VILLALBA

Fracciones equivalentes

- Distintas fracciones pueden expresar la misma cantidad, en ese caso se dice que son fracciones equivalentes.



Construcción de fracciones equivalentes

- Dada una fracción se pueden construir tantas fracciones equivalentes como queramos multiplicando o dividiendo el numerador y el denominador por el mismo número:

The diagram illustrates the construction of equivalent fractions from the original fraction $\frac{7}{8}$. The original fraction is shown in the center. Four blue curved arrows point from the original fraction to four equivalent fractions arranged around it:

- Top-left: $\frac{7 \cdot 2}{8 \cdot 2} = \frac{14}{16}$
- Top-right: $\frac{7 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{35}{40}$
- Bottom-left: $\frac{7 \cdot 4}{8 \cdot 4} = \frac{28}{32}$
- Bottom-right: $\frac{7 \cdot 7}{8 \cdot 7} = \frac{49}{56}$

Fracción irreducible

- Una fracción se dice **irreducible** cuando el **máximo común divisor** del numerador y denominador es 1, es decir, el numerador y el denominador no tienen divisores comunes salvo el 1.

$$\frac{3}{8}$$

Fracción **irreducible**, pues el $\text{mcd}(3,8) = 1$

$$\frac{105}{60}$$

Fracción **reducible**, pues el $\text{mcd}(105,60) = 15$

Cálculo de la fracción irreducible equivalente

- Cuando una fracción no es irreducible se puede obtener su fracción irreducible equivalente dividiendo el numerador y el denominador por el máximo común divisor de ambos.

$$\frac{105}{60}$$

Fracción reducible, pues el $\text{mcd}(105,60) = 15$

$$105 : 15 = 7$$

$$60 : 15 = 4$$

$$\frac{7}{4}$$

Fracción irreducible equivalente a la anterior (basta multiplicar por 15 el numerador y el denominador para obtener la anterior fracción)

Dos reglas para decidir si dos fracciones son equivalentes

- Dos fracciones son equivalentes si tienen la misma fracción equivalente irreducible.

$$\frac{105}{60}$$

Es equivalente a la fracción

$$\frac{21}{12}$$

Su fracción equivalente irreducible es

$$\frac{7}{4}$$

- Dos fracciones son equivalentes si al multiplicar el numerador de una por el denominador de la otra y viceversa, se obtiene el mismo número

$$\frac{105}{60}$$

Es equivalente a la fracción

$$\frac{21}{12}$$

$$105 \times 12 = 1260$$

$$60 \times 21 = 1260$$


Orden

- Para poder comparar dos fracciones se hace necesario que ambas tengan el mismo denominador.
- Seleccionaremos fracciones equivalentes a las dadas con igual denominador, aquella que tenga mayor numerador será la mayor.

Ejemplo: $\frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{7}{15}$



$$\frac{18}{30}, \frac{15}{30}, \frac{14}{30}$$

Por tanto: $\frac{14}{30} < \frac{15}{30} < \frac{18}{30}$  $\frac{7}{15} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5}$

Calculamos fracciones equivalentes a las anteriores con el mismo denominador. Aunque vamos a utilizar el mcm (5,2,15)=30, podríamos utilizar cualquier múltiplo de éste (60,90...)

Fracciones negativas

- Las fracciones también pueden ser negativas y pueden expresarse de tres formas distintas:
 - El numerador negativo y el denominador positivo
 - El numerador positivo y el denominador negativo
 - El signo negativo delante de una fracción con el numerador y el denominador sin signo.

Ejemplo:

$$\frac{-14}{16} = \frac{14}{-16} = -\frac{14}{16}$$

Fracciones y números decimales

- Una fracción puede expresarse en forma decimal, basta con dividir el numerador entre el denominador.
- Al hacer la división puede ocurrir:
 - Uno de los restos parciales es cero: la división termina y la expresión decimal es limitada.
 - Ningún resto parcial es cero, la expresión decimal es ilimitada y las cifras decimales se repiten en grupos iguales (se denomina **periodo**). La parte decimal inicial puede no pertenecer al periodo (se denomina **anteperiodo**)

Formas decimales periódicas: ejemplos

Exactas	$\frac{3}{4} = 0,75$ $\frac{142}{25} = 5,68$	La división es exacta
Puras	$\frac{1}{3} = 0,333 = 0,\hat{3}$ $\frac{12}{11} = 1,\widehat{09}$	La fracción periódica pura sucede cuando se repite las cifras del cociente nada más empezar la parte decimal
Mixtas	$\frac{5}{6} = 0,83.. = 0,8\hat{3}$ $\frac{17}{12} = 1,41666 \dots$	La fracción periódica mixta sucede cuando se repiten las cifras del cociente pero no desde la coma decimal

Expresión racional de los números decimales periódicos entre 0 y 1 (I)

Si el número tiene un número finito de decimales, la fracción que lo genera será el número natural formado por los dígitos de la parte decimal y como denominador la unidad seguida de tantos cero como dígitos tenga la parte decimal.

EJEMPLO:

0,341 tiene en su parte decimal tres dígitos por tanto la fracción que genera el número decimal tendrá como numerador el número entero 341 y como denominador 1000, pues la parte decimal tiene 3 dígitos.

$$0,341 = \frac{341}{1000}$$

Expresión racional de los números decimales periódicos entre 0 y 1 (II)

Si el número tiene su parte decimal periódica pura, entonces la fracción que lo genera tendrá como numerador el número entero formado por su periodo y como denominador el número entero formado por tantos 9 como dígitos tenga el periodo.

EJEMPLO:

0,343434... tiene su parte decimal periódica pura formada por dos, por tanto la fracción que genera el número decimal tendrá como numerador el número entero 34 y como denominador 99, pues la parte periódica tiene 2 dígitos.

$$0,343434 \dots = 0,\widehat{34} = \frac{34}{99}$$

Expresión racional de los números decimales periódicos entre 0 y 1 (III)

Si el número tiene su parte decimal periódica mixta, entonces la fracción que lo genera tendrá como numerador el número entero formado por su anteperiodo y periodo, menos el anteperiodo y como denominador el número entero formado por tantos 9 como dígitos tenga el periodo seguido de tantos ceros como tenga el anteperiodo

EJEMPLO:

0,12341341341.... su parte decimal está formada por el anteperiodo 12 y el periodo 341, por tanto, el numerador será 12341 y el denominador por 2 nueves y 3 ceros.

$$0,12341341341 \dots = 0,12\widehat{341} = \frac{12341 - 12}{99900}$$

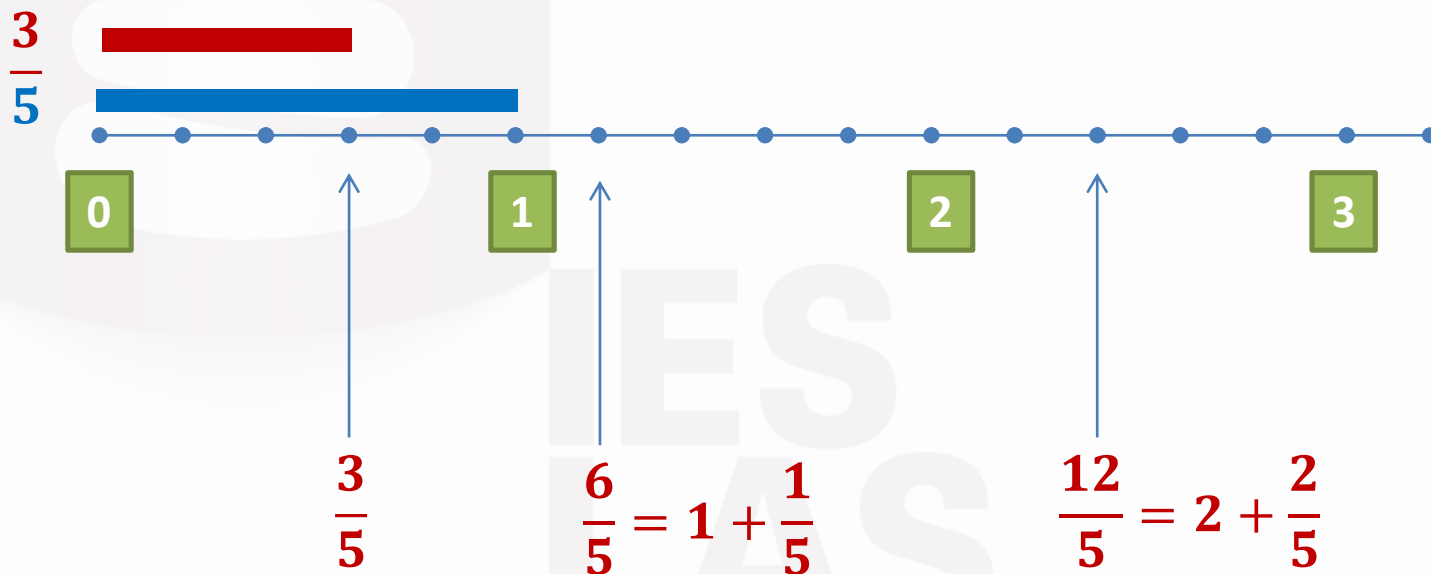
Anteperiodo

Periodo

Representación en la recta numérica

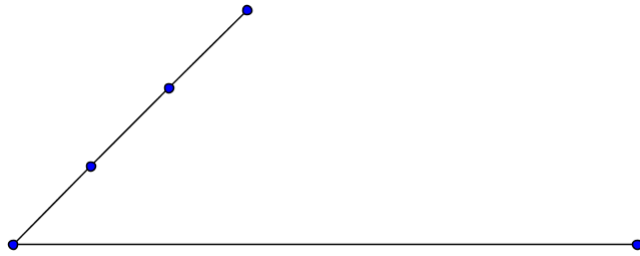
- A cada fracción le podemos asociar un único punto en la recta numérica.
- Si la fracción es propia, se divide la unidad en tantas partes como indique el denominador, y se toman las que indique el numerador.
- Si la fracción es impropia, se procede a tomar tantas unidades como tenga la parte entera de la fracción y con la siguiente unidad se procede a representar la fracción propia.

Representación en la recta numérica: ejemplos



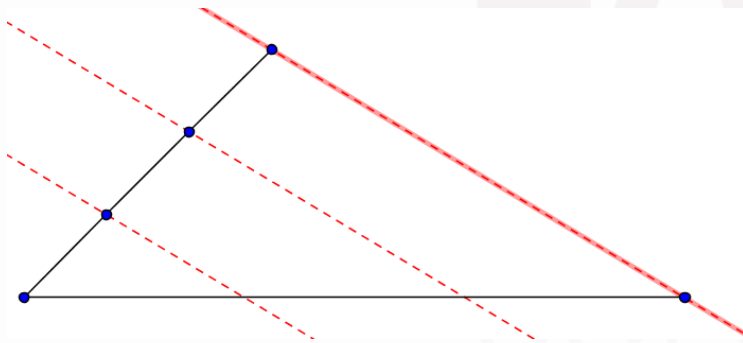
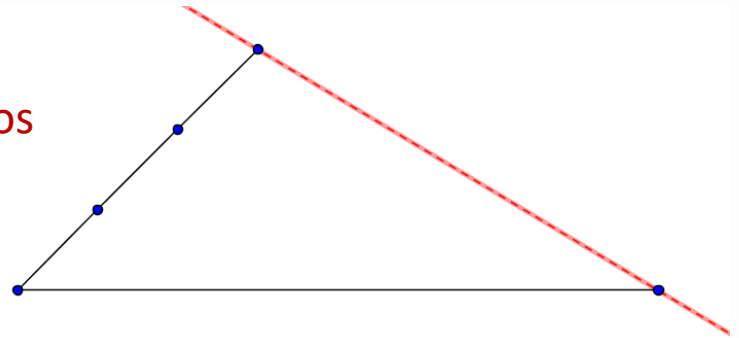
IES
LAS
CANTERAS
COLLADO VILLALBA

División de un segmento en partes iguales aplicando el teorema de Thales



Se dispone un segmento dividido en tantas partes iguales como se desee dividir el otro segmento sobre uno de los extremos de éste.

Se unen los otros extremos de los segmentos con una línea recta



Se trazan rectas paralelas a la anterior, que pasen por las divisiones del segmento previamente dividido.

Números enteros como fracciones

- Un número entero puede ser representado como fracción.
- De hecho el conjunto de los números naturales se encuentra incluido dentro del conjunto de los números enteros.

Ejemplos:

$$7 = \frac{7}{1} = \frac{14}{2} = \frac{35}{5}$$

Si dividimos el numerador entre el denominador de las fracciones el cociente es el número entero

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{35}{35}$$

El número entero 1 puede estar representado por cualquier fracción que tenga igual numerador y denominador.



OPERACIONES CON FRACCIONES

IES
LAS
CANTERAS
COLLADO VILLALBA

Suma de fracciones

- Para poder sumar fracciones éstas tienen que encontrarse en las mismas unidades fraccionarias.
- Si las fracciones no tienen el mismo denominador tendremos que seleccionar **fracciones equivalentes con común denominador**.
- La fracción que resulta de la suma tiene el mismo denominador siendo el numerador la suma de los numeradores.

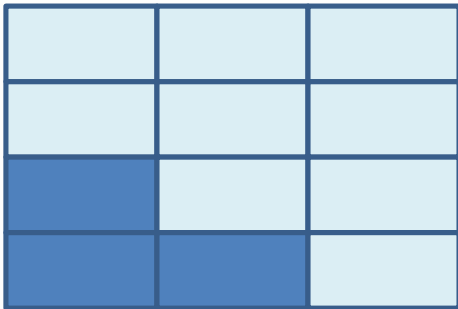
$$\frac{3}{12}$$

+

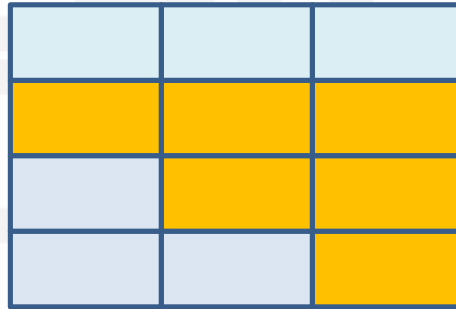
$$\frac{6}{12}$$

=

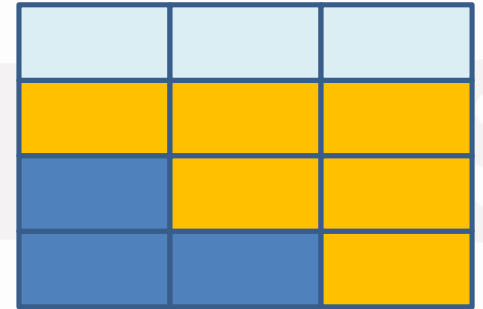
$$\frac{3 + 6}{12} = \frac{9}{12}$$



+



=



Ejemplos: suma de fracciones

$$\frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{12}{15} + \frac{10}{15} = \frac{12 + 10}{15} = \frac{22}{15}$$

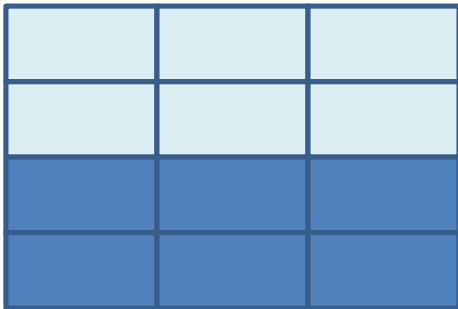
Calculamos fracciones equivalentes a las anteriores con común denominador.

$$3 + \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4} = \frac{12}{4} + \frac{1}{4} = \frac{12 + 1}{4} = \frac{13}{4}$$

Resta de fracciones

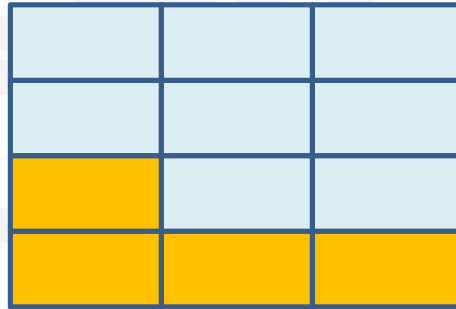
- Para poder restar fracciones éstas tienen que encontrarse en las mismas unidades fraccionarias.
- Si las fracciones no tienen el mismo denominador tendremos que seleccionar fracciones equivalentes con común denominador.
- La fracción que resulta de la resta tiene el mismo denominador siendo el numerador la resta de los numeradores.

$$\frac{6}{12}$$



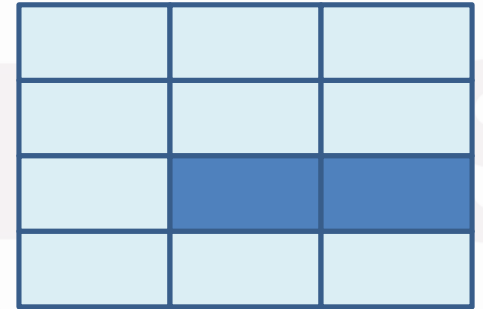
-

$$\frac{4}{12}$$



=

$$\frac{6 - 4}{12} = \frac{2}{12}$$



Ejemplos: resta de fracciones

$$\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{12}{15} - \frac{10}{15} = \frac{12 - 10}{15} = \frac{2}{15}$$

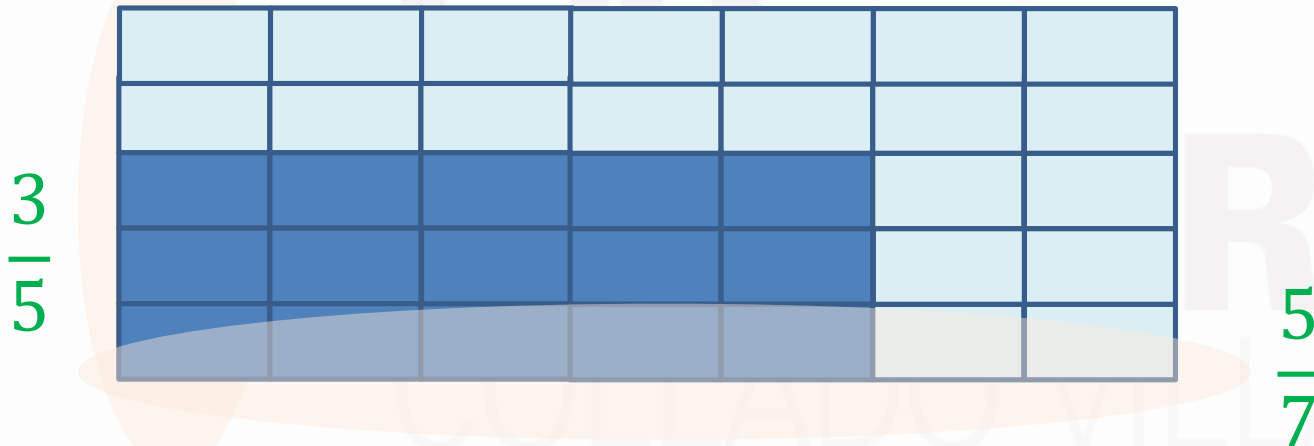
Calculamos fracciones equivalentes a las anteriores con común denominador.

$$3 - \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 4} - \frac{1}{4} = \frac{12}{4} - \frac{1}{4} = \frac{12 - 1}{4} = \frac{11}{4}$$

Producto de fracciones

- El producto de dos fracciones es otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores.

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 7} = \frac{15}{35}$$



Ejemplos: producto de fracciones

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}$$



En el producto de fracciones no es necesario que éstas tengan común denominador. Por lo que es buena idea simplificar las fracciones antes de operar

$$3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

LAS
CANTERAS
COLLADO VILLALBA

Inverso de una fracción

- Se dice que el inverso de un número es otro tal que al multiplicarlos el resultado es 1.
- Todas las fracciones salvo el 0 tiene inverso.

Ejemplos:

El inverso de $\frac{3}{5}$ es $\frac{5}{3}$ pues $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{15}{15} = 1$

El inverso de 5 es $\frac{1}{5}$ pues $5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{5} = 1$

El inverso de $\frac{1}{5}$ es 5 pues $\frac{1}{5} \cdot 5 = \frac{5}{5} = 1$

División de fracciones

- El cociente (división) de dos fracciones es otra fracción que se obtiene multiplicando el dividendo por el inverso del divisor.

Ejemplos:

$$\frac{3}{5} \div \frac{2}{9} = \frac{3}{5} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 2} = \frac{27}{10}$$

$$\frac{3}{5} \div \frac{1}{6} = \frac{3}{5} \cdot 6 = \frac{3 \cdot 6}{5} = \frac{18}{5}$$