Probabilidad

Definiciones

Experimento aleatorio

Experimento cuyo resultado no se puede predecir

Espacio muestral

Conjunto formado por todos los resultados posibles del experimento aleatorio.

Suceso de un experimento aleatorio

Subconjunto del espacio muestral

Espacio de sucesos

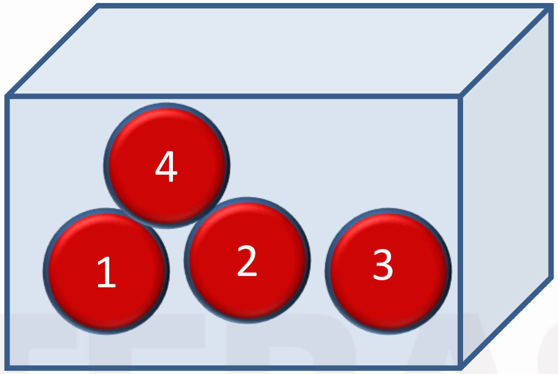
El conjunto de todos los sucesos de un experimento aleatorio.

Ejemplo

En una urna hay cuatro bolas numeradas del 1 al 4. Extraemos una al azar y anotamos su número.

Espacio muestral $\{1,2,3,4\}$

¿Qué elementos componen el suceso “Obtener un número par? $\{2,4\}$



El espacio de sucesos está compuesto por:

$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}\{1,3\}\{2,3\}\{1,2,3\}\}$

Sucesos

Suceso elemental

Aquel que tiene un único elemento

Suceso seguro

Aquel que siempre se realiza

Suceso imposible

Aquel que no se puede realizar

Suceso contrario

Aquel que se realiza cuando un suceso A no se realiza. Se representará por $\bar{A}$.

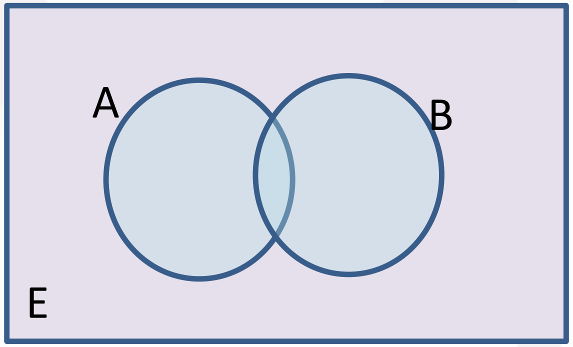
Ejemplo

Sea el experimento aleatorio: lanzar un dado y observar la cara superior.

Suceso elemental	Obtener un 6
Suceso seguro	Obtener un número entre 1 y 6
Suceso imposible	Obtener un 7
Suceso contrario	Obtener un número par es el suceso contrario a obtener un número impar

Operaciones con sucesos: unión

Dados dos sucesos *A*y *B* de un mismo experimento aleatorio, se denomina **suceso unión** de *A* y *B* el que se produce cuando se realiza *A* o *B*, es decir, alguno de los dos. Se designará por $A \cup B$.



Experimento aleatorio: extraer una carta de una baraja española (40 cartas, 4 palos de 10 cartas, del 1 al 7 en cada palo y 3 figuras por palo)

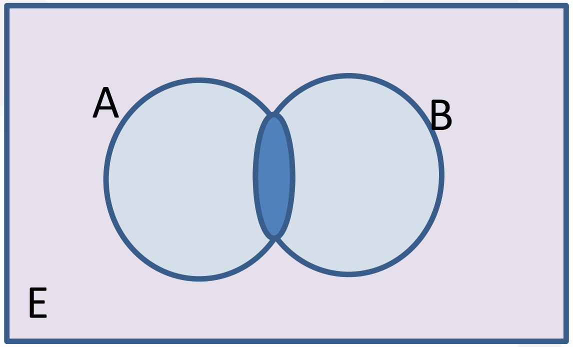
A = obtener una carta del palo de oros (10 elementos)

B = obtener una figura (12 elementos)

A U B = obtener una carta del palo de oros o una figura (19 elementos)

Operaciones con sucesos: Intersección

Dados dos sucesos, A y B, de un mismo experimento aleatorio, se denomina **suceso intersección** de A y B al que se produce cuando se realizan simultáneamente los sucesos A y B. Se designa por $A \cap B$.



Experimento aleatorio: extraer una carta de una baraja española (40 cartas, 4 palos de 10 cartas, del 1 al 7 en cada palo y 3 figuras por palo)

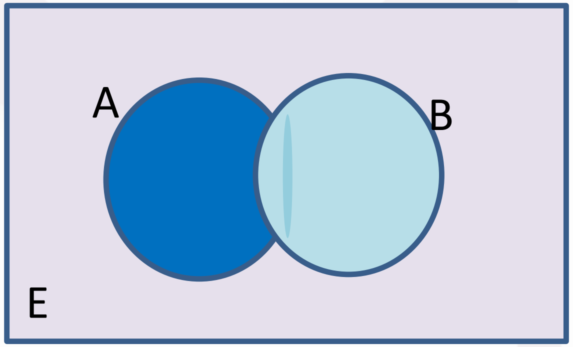
A = obtener una carta del palo de oros (10 elementos)

B = obtener una figura (12 elementos)

A ∩ B = obtener una figura del palo de oros (3 elementos)

Operaciones con sucesos: diferencia

Dados dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, se llama **suceso diferencia** de A y B al que se produce cuando se realiza el suceso A, pero no se realiza B. Se designará por $A - B = A \cap \bar{B}$.



Experimento aleatorio: extraer una carta de una baraja española (40 cartas, 4 palos de 10 cartas, del 1 al 7 en cada palo y 3 figuras por palo)

A = obtener una carta del palo de oros (10 elementos)

B = obtener una figura (12 elementos)

A - B = obtener una carta del palo de oros que no sea figura (7 elementos)

Sucesos incompatibles

Si A y B son sucesos del mismo experimento aleatorio, se tiene que:

Si $A \cap B = \emptyset$ entonces se dice que A y B son **incompatibles**

Si $A \cap B \neq \emptyset$ entonces se dice que A y B son **compatibles**

Ejemplo

A = obtener una carta del palo de oros

B = obtener una carta del palo de copas

C= obtener una figura

A y B son incompatibles pues no hay ninguna carta que sea a la vez de oros y copas, es decir, $A \cap B = \emptyset$

A y C son compatibles pues hay figuras que son del palo de oros, es decir, $A \cap B \neq \emptyset$

Espacio muestral equiprobable

Un **espacio muestral es equiprobable** si consta de un número de sucesos simples y todos ellos tienen la misma probabilidad de suceder.

Ejemplo

Sea el experimento aleatorio "lanzar dos dados y sumar el resultado obtenido en ambos"

	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

El espacio muestral a utilizar será el producto cartesiano de las puntuaciones de ambos dados, pues cada uno de los elementos es equiprobables.

Regla de Laplace

Si un espacio muestral es **equiprobable**, entonces la probabilidad de un suceso A es el cociente entre el número de casos favorables al suceso A y el número de casos posibles.

Ejemplo

Calculemos la probabilidad de que al lanzar 2 monedas salgan 2 caras. El espacio muestral tiene los siguientes elementos (C representa obtener "cara" y X representa obtener "cruz").

$$E = \{(C,C),(C,X),(X,C),(X,X)\}$$

Los elementos del espacio muestral son equiprobables

$$A = \{(C,C)\}$$

El suceso únicamente tiene un elemento

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{1}{4}}$$

El número de elementos del espacio muestral es 4 mientras que el número de elementos del suceso A es 1.

Ejemplo

Una experiencia aleatoria consiste en lanzar tres monedas al aire. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

El espacio muestral está formado por:

$$E = \{(CCC), (CCX)(CXC)(XCC)(CXX)(XCX)(XXC)(XXX)\}$$

A = Obtener tres caras

$$A = \{(CCC)\}\; por\ tanto\ P(A) = \frac{1}{8}$$

B = Obtener dos caras y una cruz

$$B = \{(CCX)(CXC)(XCC)\}\; por\ tanto\ P(B) = \frac{3}{8}$$

C = Obtener una cara y dos cruces

$$B = \{(CXX)(XCX)(XXC)\}\; por\ tanto\ P(C) = \frac{3}{8}$$

Definición axiomática de probabilidad

Se denomina **probabilidad** a una **función** que asocia a cada suceso ***A***, de un espacio de sucesos, un número real que llamamos probabilidad de *A* y representamos por ***P(A)*** que cumple los siguientes axiomas:

1. La probabilidad de un suceso cualquiera es positiva o nula: $P(A) \geq 0$
2. La probabilidad del suceso seguro es igual a la unidad $P(E) = 1$
3. La probabilidad de la unión de dos sucesos incompatibles es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Consecuencias de los axiomas

1. Probabilidad del suceso contrario

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

2. Probabilidad del suceso imposible

$$P(\emptyset) = 0$$

3. Si A y B son dos sucesos compatibles de un mismo experimento aleatorio, se verifica que la probabilidad de la unión A y B es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos menos la probabilidad del suceso intersección de A y B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ejemplo I

Se lanza dos veces un dado cúbico, con sus caras numeradas del 1 a 6.
Calcularemos la probabilidad de los siguiente sucesos:
El espacio muestral está formado por:

	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

A = Obtener algún 6.

$$P(A) = \frac{11}{36}$$

B = No obtener ningún 6.

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$$

Ejemplo II

En una urna hay 10 bolas numeradas del 1 al 10. Se extrae una bola al azar y se anota su número. Se consideran los siguientes sucesos:
A= “Salir una bola con numeración impar”
B=”Salir una bola con un número primo”

Calcula $\mathrm{P}(A \cup B)$

$$A = \{1,3,5,7,9\} \qquad B = \{2,3,5,7\} \qquad A \cap B = \{3,5,7\}$$

$$\mathrm{P}(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{10} + \frac{4}{10} - \frac{3}{10} = \frac{6}{10}$$

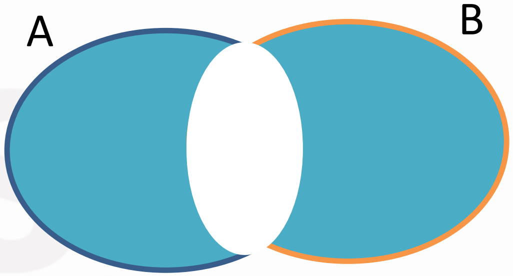
Ejemplo III

En un sorteo la probabilidad de ganar un perrito piloto es de 0,6 y de ganar una muñeca 0,3 . La probabilidad de ganar los dos premios es de 0,01 . Calcular la probabilidad de ganar solo uno de los 2 regalos.

Solución

A = Ganar el perrito piloto

B = Ganar la muñeca



La probabilidad pedida (en el diagrama coloreada de verde) se puede expresar como

$$P\big((A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)\big) \underset{\uparrow}{=} P(A\cap\bar{B})+P(\bar{A}\cap B) \underset{\uparrow}{=} P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$$

Los sucesos son incompatibles   Se trata de la diferencia de sucesos

$$= 0{,}6-0{,}01+0{,}3-0{,}01 = 0{,}9-0{,}02 = 0{,}88$$

Tablas de contingencia

Las tablas de contingencia se construyen atendiendo a dos sucesos y sus complementarios. La estructura se presenta en la siguiente tabla relativa a los sucesos A y B.

En cada celda se pueden disponer probabilidades (el total de totales será 1) o bien las frecuencias a partir de las cuales se pueden calcular las probabilidades.

	A	$\bar{A}$	TOTAL
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
TOTAL	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

Ejemplo

De 120 enfermos, 48 tienen ictericia, 36 tienen fiebre, y 12 tienen ambos síntomas. Escogemos un enfermo al azar

a) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga uno de los dos síntomas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga fiebre, sabiendo que tiene ictericia?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que solo tenga fiebre?

$A \equiv Tener\ ictericia$

$B \equiv Tener\ fiebre$

	A	$\bar{A}$	TOTAL
B	12	24	36
$\bar{B}$	36	48	84
TOTAL	48	72	120

$$a)\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{48}{120} + \frac{36}{120} - \frac{12}{120} = \frac{72}{120}$$

$$b)\ P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

Diagrama de árbol

Un diagrama de árbol es una herramienta que se utiliza para determinar todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Para la construcción de un diagrama de árbol se partirá poniendo una rama para cada una de las posibilidades, acompañada de su probabilidad. De cada nodo partirá, cuando se corresponda, otro nivel del árbol.

Cada rama, estará acompañada de la probabilidad del suceso.

La suma de las probabilidades de los nodos de igual nivel deben sumar siempre 1.