# Funciones

Definiciones básicas

# Definición de función

Una función real, ***f***, de variable real es una correspondencia que asocia a cada elemento de un **subconjunto** de números reales, representado por ***x***, un único número ***y = f(x)***.
A la variable ***x*** que recorre el conjunto origen se le denomina variable independiente y a la variable ***y*** variable dependiente.

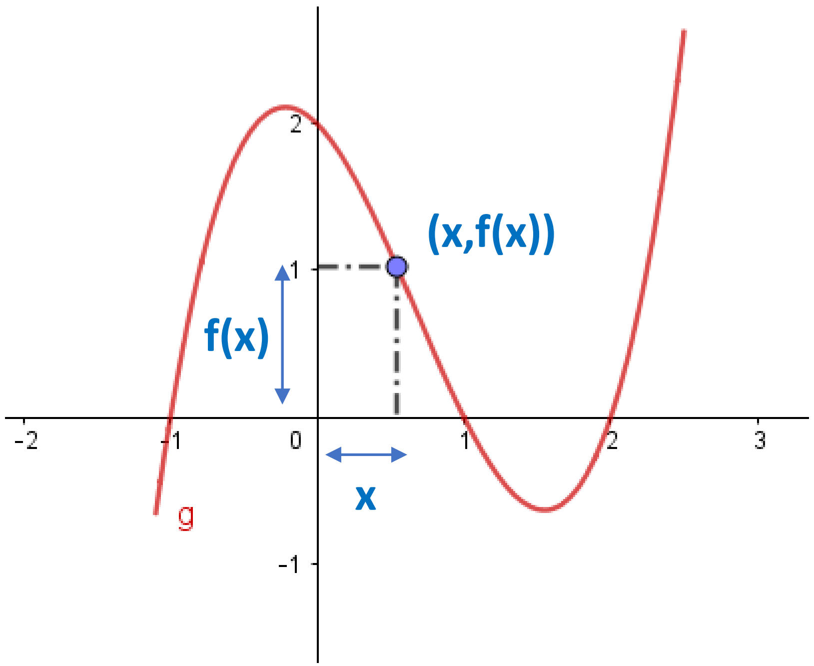
Ejemplo

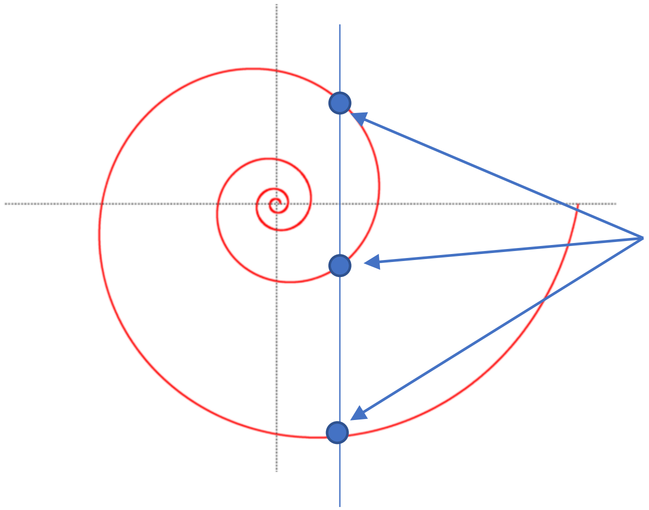
Si el valor unitario de un producto es de 2,50€, podemos construir una función que dado el número de unidades de producto vendido le haga corresponder su importe.
La variable independiente ***x*** representará el número de unidades y la variable ***y*** representará el importe a pagar. La función únicamente estará definida para los números enteros positivos mayores que cero.

$$f(x) = 2{,}5x$$

# Gráfica de una función

Si representamos en el plano cartesiano cada uno de los pares de valores $(x, f(x))$ obtenemos una representación gráfica de la función.
No toda gráfica pertenece a una función: cuando a un valor del eje de abscisas le corresponde más de un valor en el eje de ordenadas la gráfica no se corresponde con una función real de variable real.



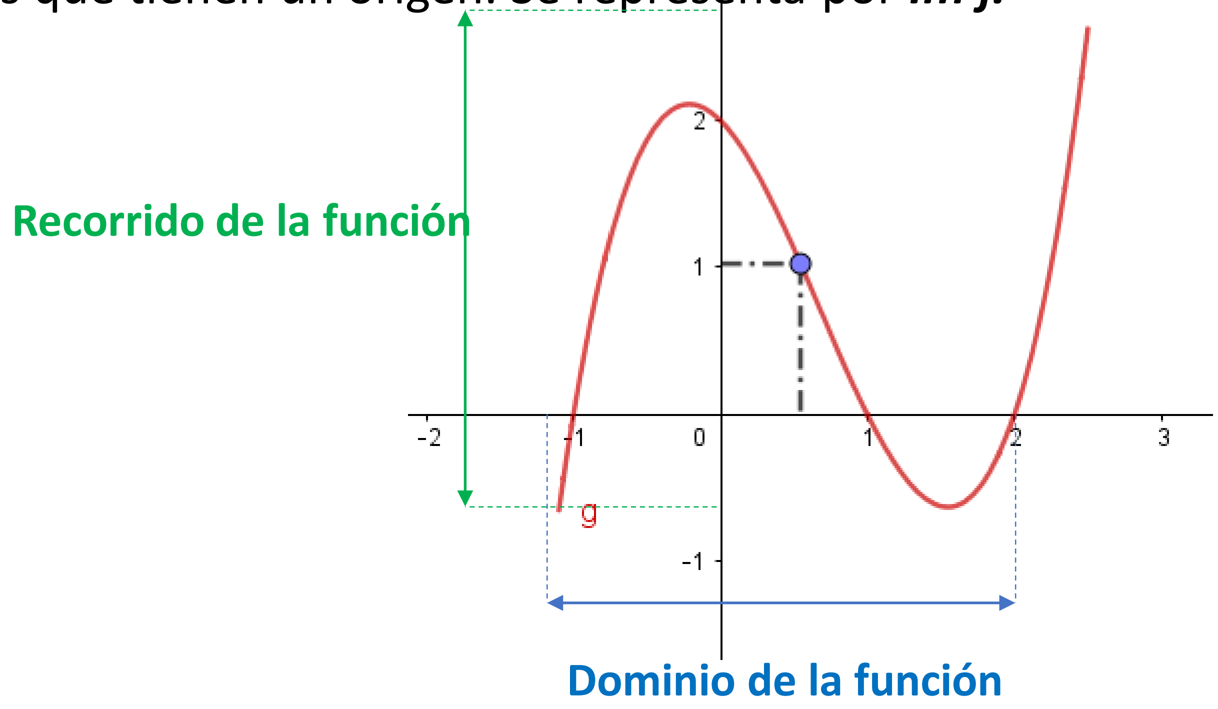
No es función, a un valor de la variable independiente le corresponde más de un valor.

# Dominio y recorrido

Sea la función real de variable real $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ y\ tal\ que\ y = f(x)$:

El **dominio** de la función es el conjunto de valores de $\mathbb{R}$ para los que está definida la función, es decir, los valores de $\mathbb{R}$ que tienen imagen. Se representa por ***Dom f***.

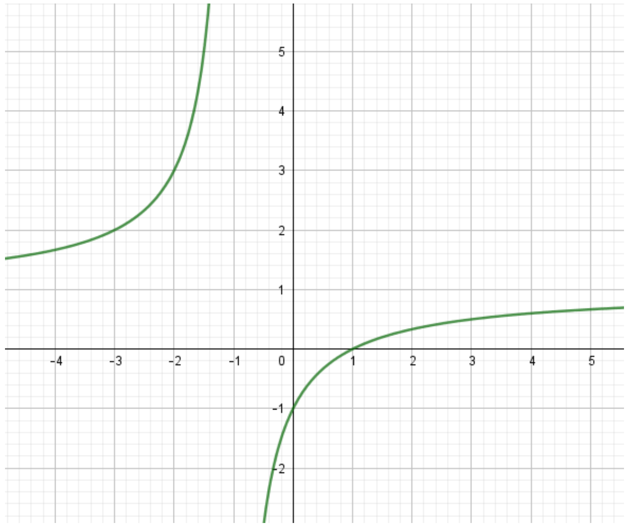
El **recorrido** o **imagen** de la función es el conjunto de valores de $\mathbb{R}$ que toma la función, es decir, los valores que tienen un origen. Se representa por ***Im f.***



# Ejemplos

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

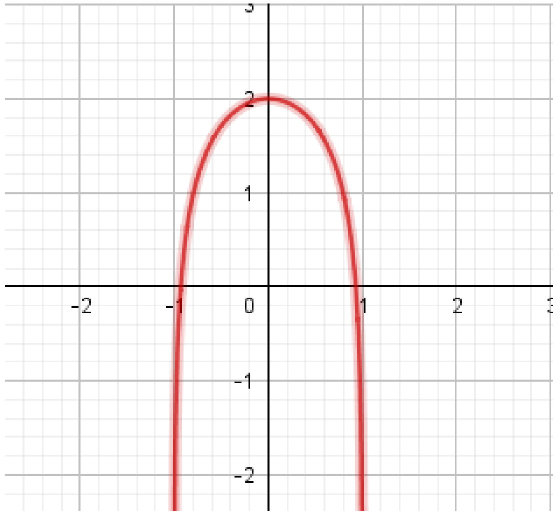
La función no tendrá imagen cuando el denominador sea cero, por tanto, $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$




$$\mathrm{g}(x) = \log(1 - x^2)$$

La función no tendrá imagen cuando $1 - x^2 \leq 0$ por tanto:

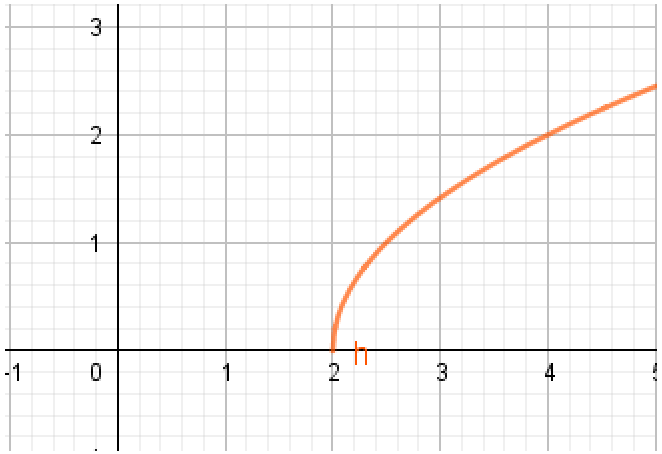
$$Dom(f) = (-1,1)$$




$$\mathrm{g}(x) = \sqrt{2x-4}$$

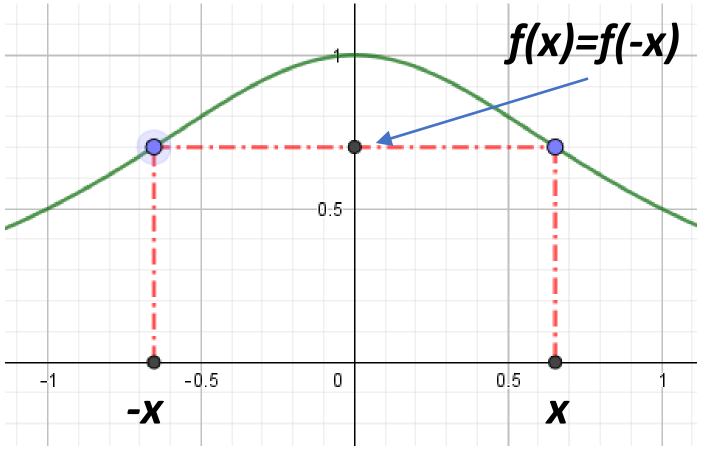
La función no tendrá imagen cuando $2\mathrm{x} - 4 < 0$ por tanto:

$$Dom(f) = [2, +\infty)$$

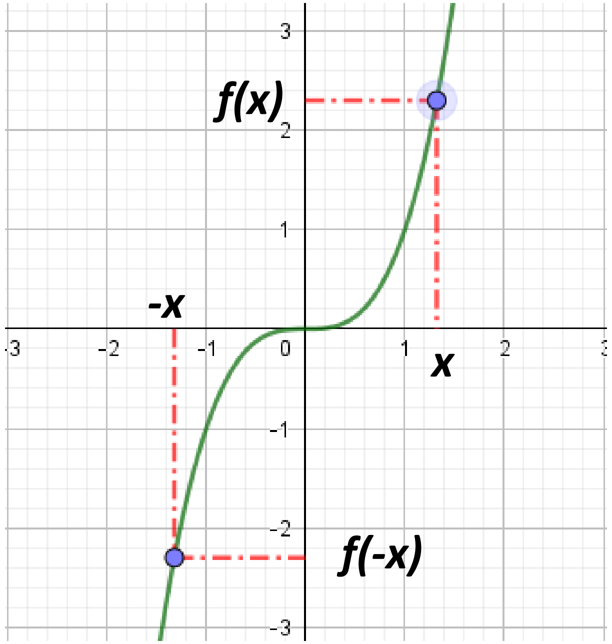


# Simetría: función par e impar

Una función real ***f*** es simétrica respecto del eje OY, si para cualquier valor del dominio de la función se verifica que ***f(x) = f(-x)***. Se dice entonces de la función es **par**.



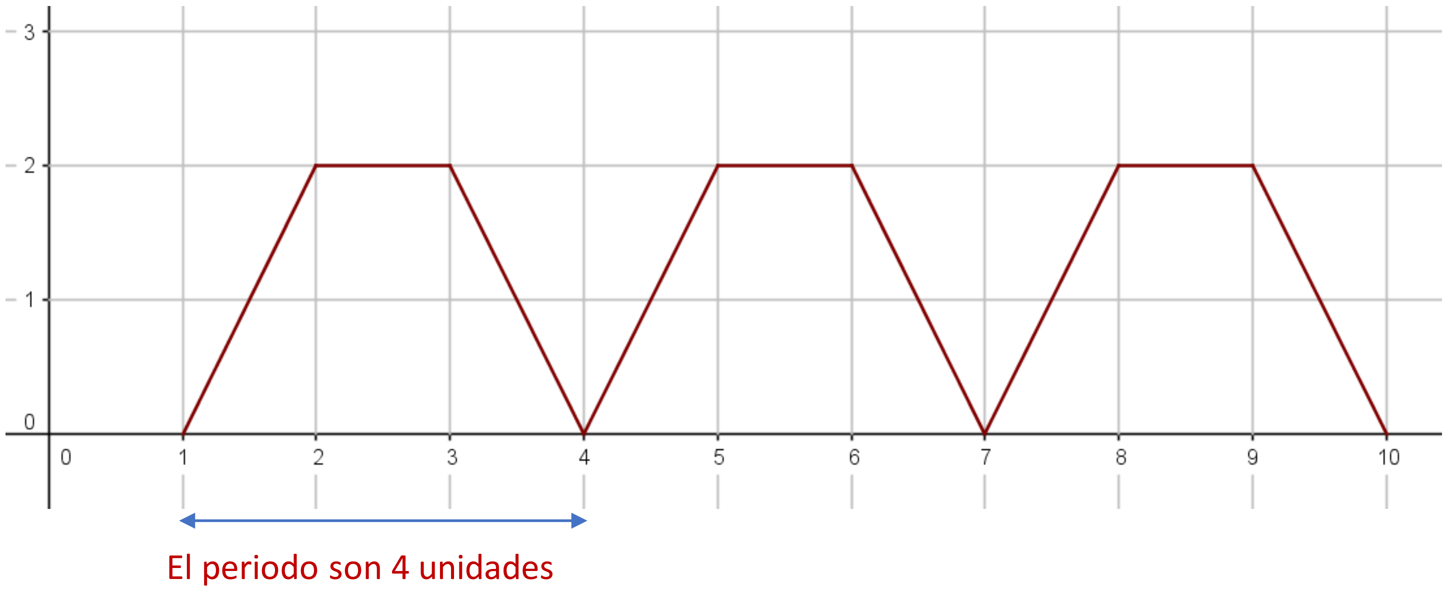

Una función real ***f*** es simétrica respecto del origen de coordenadas, si para cualquier valor ***x*** del dominio de la función se verifica que ***f(x) = -f(-x)***. Se dice entonces de la función es **impar**.



# Funciones periódicas

Una función se dice periódica si tiene la misma imagen a intervalos regulares de la variable independiente.

Una función **f(x)** es periódica si existe un número **p** tal que pueda hacer **f(x+p) = f(x)** para cualquier valor **x** del dominio de la función. Al menor número **p** se le llama período.

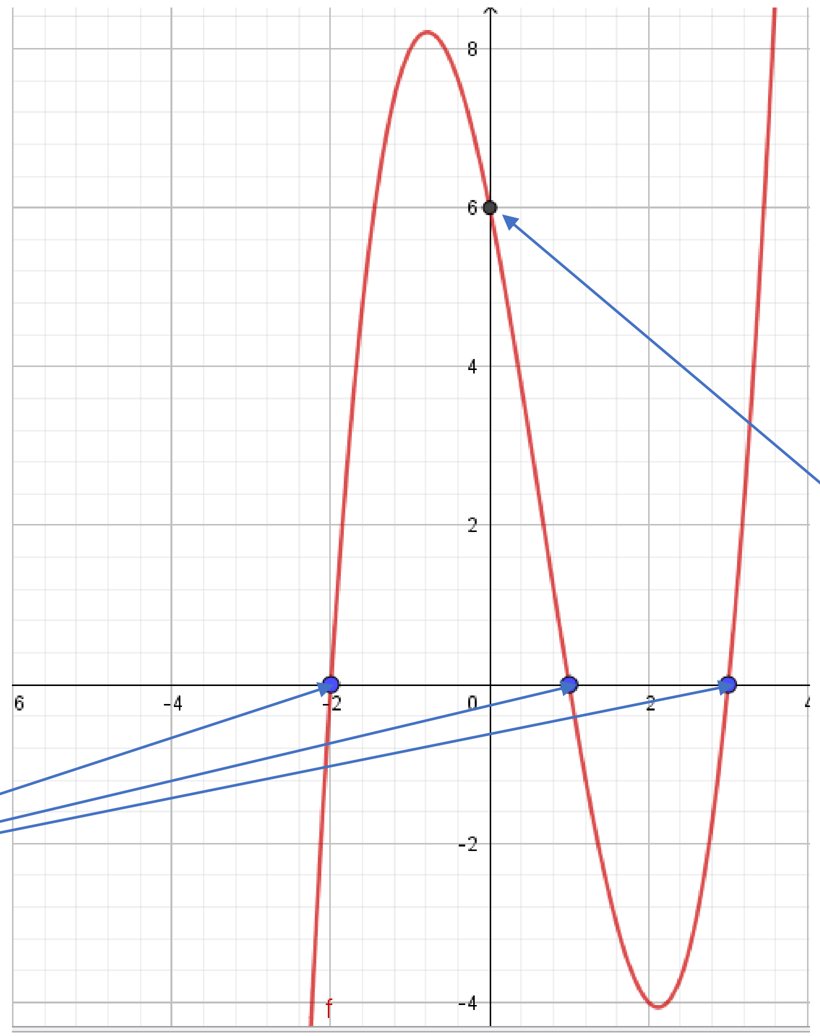


# Puntos de corte con los ejes

Sea la función real de variable real $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ y\ tal\ que\ y = f(x)$:

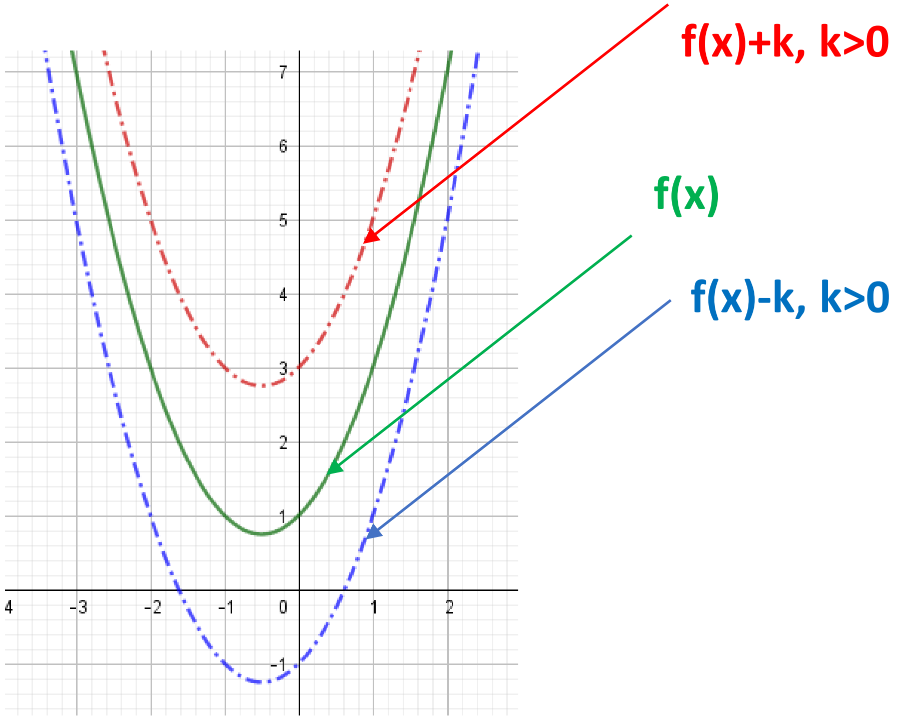
Los puntos de corte con el eje de abscisas (OX) se calcularán igualando a cero la expresión algebraica de la función, pues se buscan valores de la variable ***x*** que anulen la función.

El punto de corte con el eje de ordenadas (OY) se calculará obteniendo el valor de la función para ***x=0***.

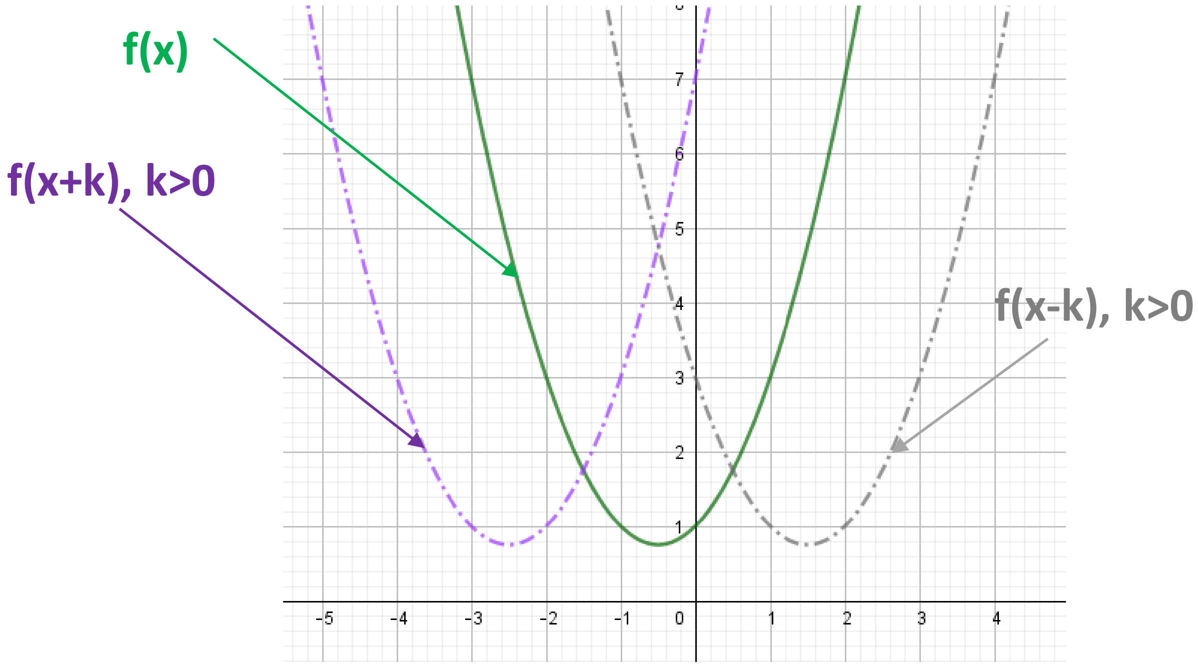


# Transformaciones de funciones I

Sea la función real de variable real $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\ y\ tal\ que\ y = f(x)$. Conocida la gráfica de esta función es posible conocer la gráfica de la función transformada según las siguientes condiciones:



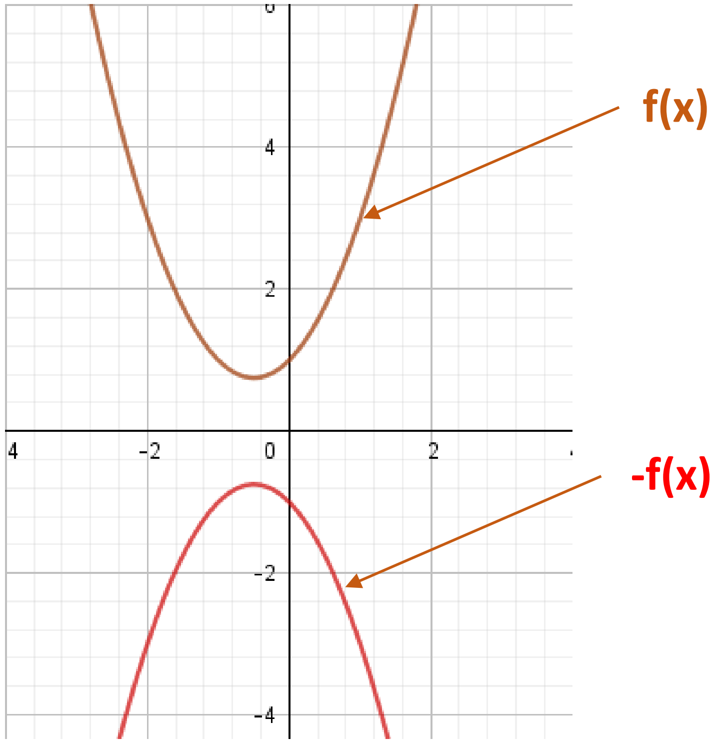

**Transformación $f(x) \pm k, k > 0$**



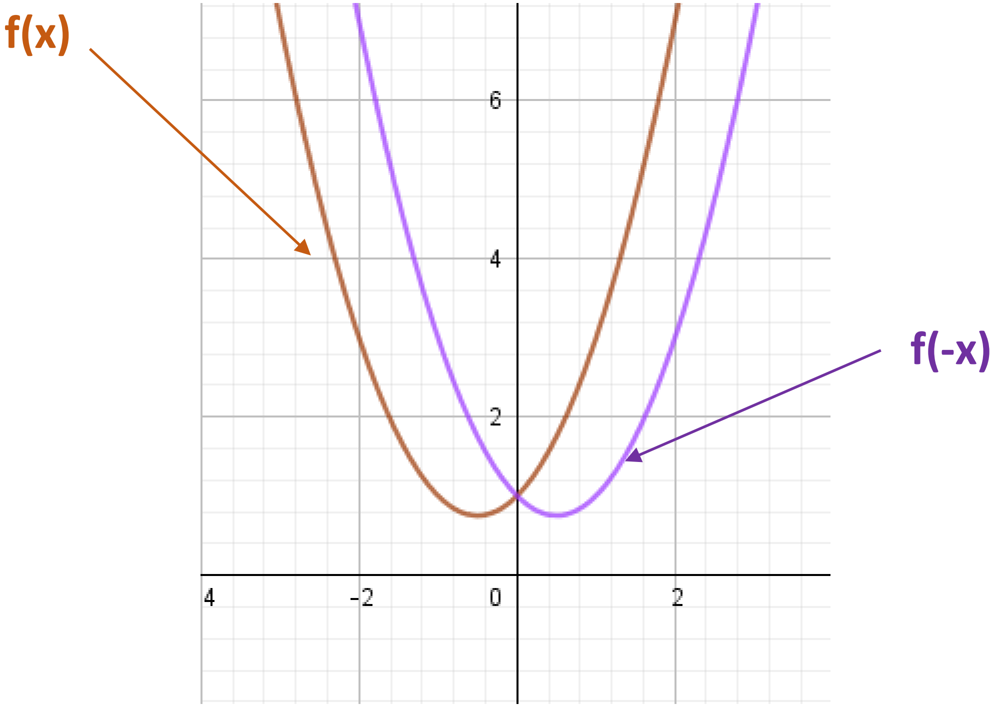

**Transformación $f(x \pm k), k > 0$**

# Transformaciones de funciones II

Sea la función real de variable real $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\ y\ tal\ que\ y = f(x)$. Conocida la gráfica de esta función es posible conocer la gráfica de la función transformada según las siguientes condiciones:




**Transformación -$f(x)$**




**Transformación $f(-x)$**

# Operaciones con funciones

Dadas las funciones ***f*** y ***g*** cuyos dominios son ***Dom f*** y ***Dom g***, respectivamente. Definimos las siguientes operaciones:
**Suma de funciones** (***f*** + ***g***) es otra función que tiene por dominio la intersección de los dominios de las funciones sumando y tales que: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$**.**

**Producto de funciones** (***f*** · ***g***) es otra función que tiene por dominio la intersección de los dominios de las funciones factores y tales que: $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$**.**

**Cociente de funciones** (***f*** /***g***) es otra función que tiene por dominio la intersección de los dominios de las funciones eliminando de éste los valores que anulan la función denominador y tales que:
$(f/g)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$**.**

# Composición de funciones

Dadas las funciones ***f*** y ***g*** cuyos dominios son ***Dom f*** y ***Dom g***, respectivamente. Definimos la composición de funciones como:

$$(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$$

(f compuesta con g de x)

$$\begin{tikzcd} \mathbf{x} \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})"'] & \mathbf{f(x)} \arrow[r] & \boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) \end{tikzcd}$$

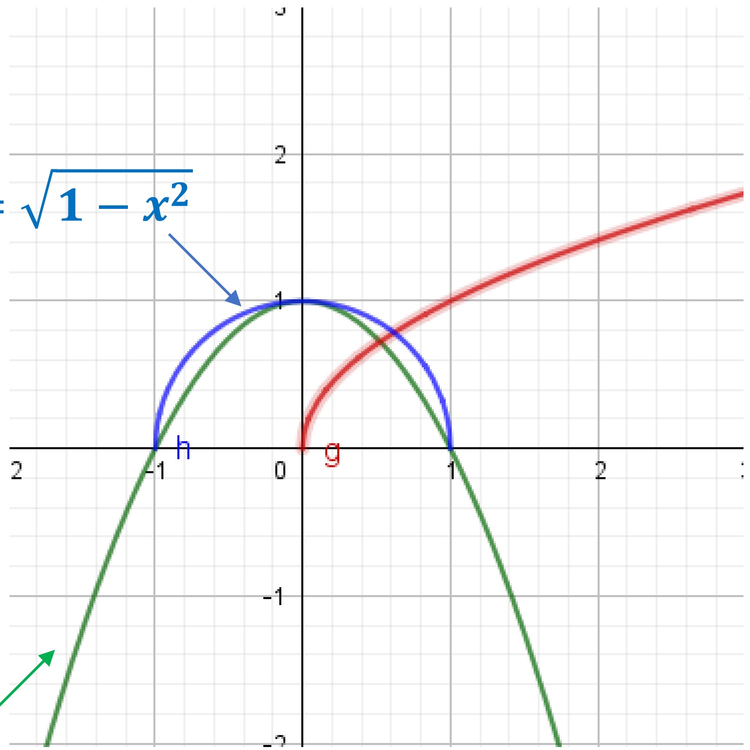
La composición de funciones no es conmutativa. $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) \neq (\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x})$

# Composición de funciones: ejemplo I

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] x \arrow[r, "1-x^2"] \arrow[rr, bend right, "(g\circ f)(x)=\sqrt{1-x^2}"'] & f(x) \arrow[r, "\sqrt{x}"] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

$g(x) = \sqrt{x}$

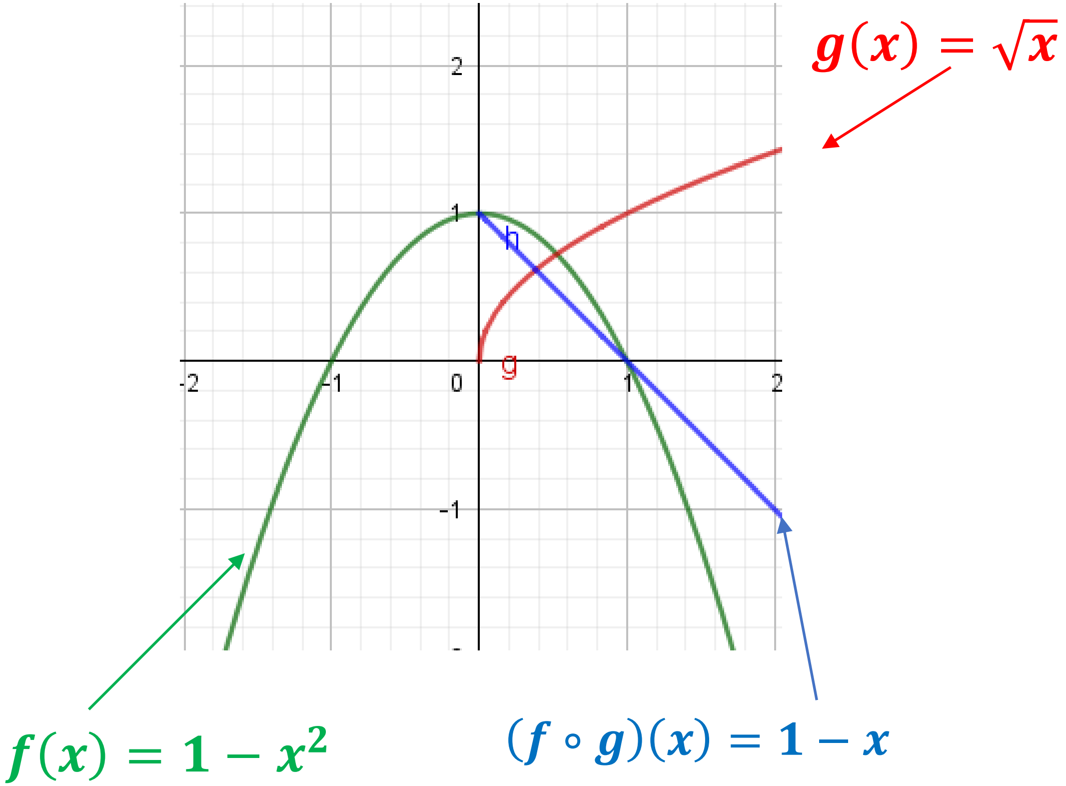
$(g \circ f)(x) = \sqrt{1-x^2}$




$f(x) = 1 - x^2$

# Composición de funciones: ejemplo II

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\sqrt{x}"] \arrow[rr, bend right, "(f \circ g)(x) = 1 - x"'] & g(x) \arrow[r, "1 - x^2"] & f(g(x))
\end{tikzcd}$$



# Función inversa

## Función identidad

Sea la función real de variable real $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ y\ tal\ que\ i(x) = x$, es decir, a cada valor de x le hace corresponder el mismo valor, a la función así definida se le llama función identidad. Su gráfica se corresponde con la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

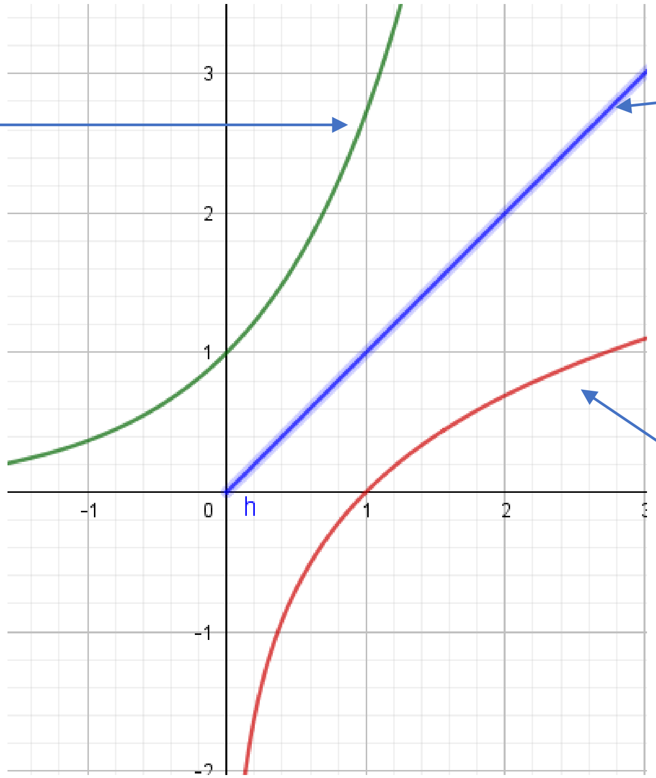
## Función inversa

Sea la función real de variable real f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \ Dom(f) = \mathcal{X}$ si existe una función que notaremos por $f^{-1}$ tal que
$(\boldsymbol{f}^{-1} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x})\ \boldsymbol{para\ cualquier\ valor\ x} \in Dom(f)$, entonces a la función $f^{-1}$ se le denomina función inversa de $f$.

# Ejemplo I

*La función inversa de* $f(x) = Ln(x)$ *es* $f^{-1}(x) = e^{x}\ \forall x \in (0, +\infty)$

$f^{-1}(x) = e^{x}$




$(f^{-1} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\ \forall x \in (0, +\infty)$

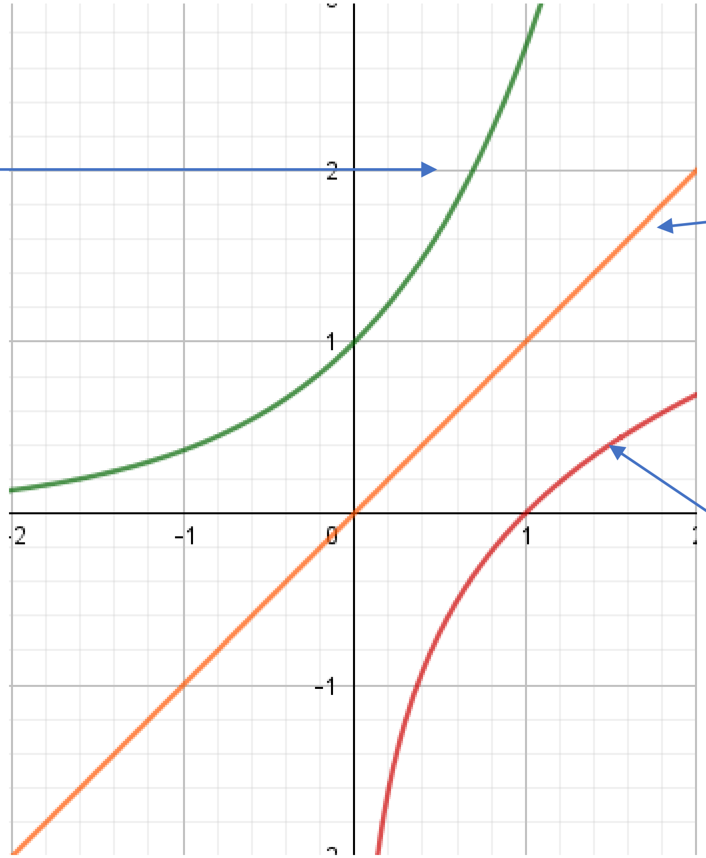
$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = Ln(x)$

# Ejemplo II

*La función inversa de* $f(x) = e^x$ *es* $f^{-1}(x) = Ln(x)\ \forall x \in (-\infty, +\infty)$

$f(x) = e^x$

$(f^{-1} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\ \forall x \in (-\infty, +\infty)$




$f^{-1}(x) = \ln(x)$

# Cálculo de la función inversa

Para calcular la función inversa, se procederá a sustituir la variable independiente por la variable dependiente y viceversa. Posteriormente, se despejará la variable dependiente, obteniéndose de esta forma la función inversa.

## Ejemplo

Sea la función real de variable $\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{5}$.
Para calcular su función inversa sustituimos las variables:

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{2}\boldsymbol{y} - \mathbf{5}$$

Despejando la variable ***y*** de la anterior expresión:

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{2}\boldsymbol{y} - \mathbf{5}\,; \quad \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x} + \mathbf{5}}{\mathbf{2}}$$

$$\boldsymbol{f}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x} + \mathbf{5}}{\mathbf{2}}$$