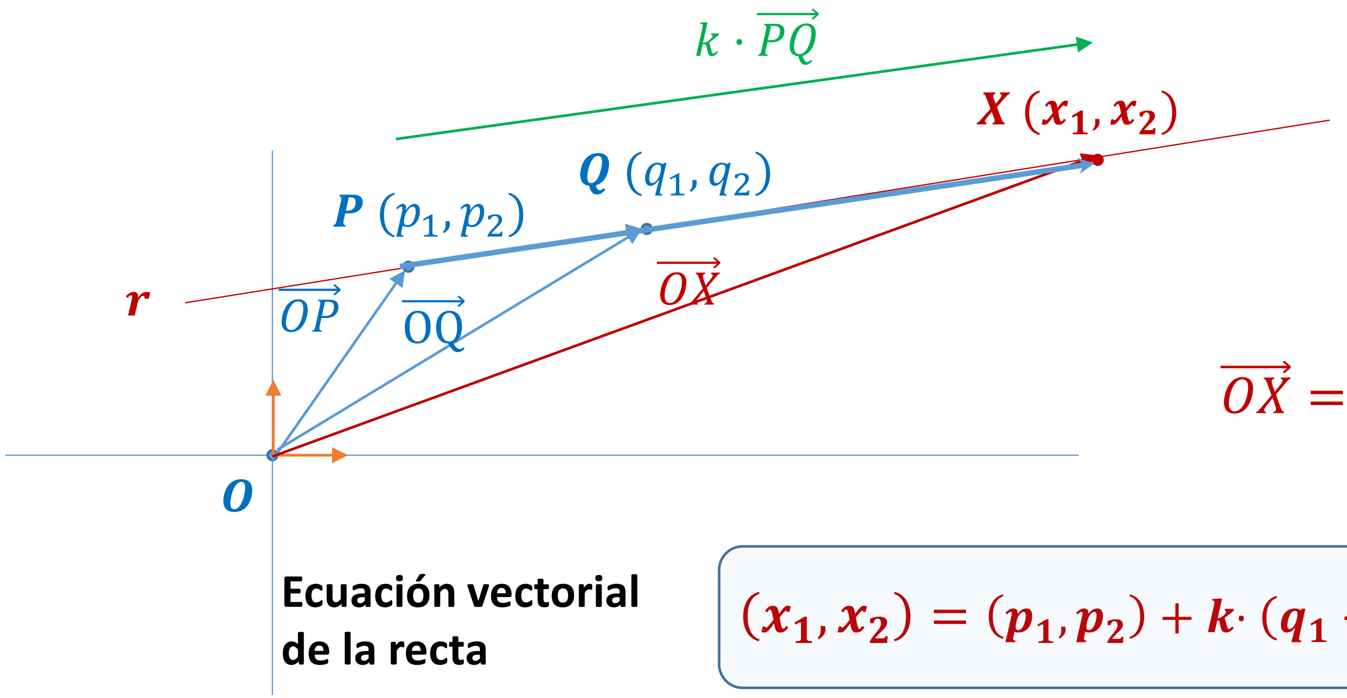
Geometría analítica plana

Ecuación de la recta y problemas métricos

Ecuaciones de la recta en el plano

Ecuación vectorial de la recta

Una recta queda determinada por dos puntos. Si formamos el vector que tiene de extremo los dos puntos de la recta, obtendremos un vector director y podremos calcular cualquier punto de la recta haciendo variar el módulo y sentido de dicho vector.



$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + k \cdot \overrightarrow{PQ}\ , \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$$

Ecuación vectorial de la recta

$$\boxed{(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) = (\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}) + \boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{q_1} - \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_2} - \boldsymbol{p_2})\ , \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}}$$

Ejemplo

Calculemos la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos A (1,2) y B(-2,3)

Solución

Calculamos en primer lugar el vector director de la recta:

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-2-1, 3-2) = (-3,1)$$

A continuación, expresamos cualquier punto de la recta como suma del vector de posición de los puntos A o B (es indiferente) y la variación en módulo o sentido del vector director, quedando:

$$\boldsymbol{(x_1, x_2) = (1, 2) + k\cdot(-3, 1)\ , \forall k \in \mathbb{R}}$$

Vector director de la recta

Vector de posición del punto A

Ejemplo

Calculemos la ecuación de la recta que pasa por el punto A (-1,6) y tiene como vector director $\vec{\boldsymbol{v}} =$ (3, -1). ¿Pertenece el punto (1,1) a la recta?

Solución

Utilizando la fórmula de la ecuación vectorial de la recta, queda:

$$(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) = (\mathbf{-1}, \mathbf{6}) + \boldsymbol{k}\cdot (\mathbf{3}, \mathbf{-1}\ ) , \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$$

Para saber si (1,1) pertenece a la recta sustituiremos en la ecuación:

$$(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = (\mathbf{-1}, \mathbf{6}) + \boldsymbol{k}\cdot (\mathbf{3}, \mathbf{-1}\ ) = (-1 + 3\mathrm{k}, 6 - \mathrm{k})$$

Se obtienen dos ecuaciones: $\begin{cases} 1 = -1 + 3k \Rightarrow k = \dfrac{2}{3} \\ 1 = 6 - k \ \Rightarrow k = 5 \end{cases}$

Al obtener dos soluciones distintas para k el punto no pertenece a la recta

Ecuación paramétrica de la recta

Si tomamos la ecuación vectorial de la recta e igualamos cada una de las dos componentes de los vectores, obtendremos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2})$ vector de posición del punto P

$\vec{\mathrm{v}} = (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2})$ vector director de la recta

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ punto genérico de la recta

$\boldsymbol{k}$ parámetro real

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}) + \boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}), \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$$

Ecuación paramétrica de la recta

$$\boxed{\forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R} \begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p_1} + k\boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{p_2} + k\boldsymbol{v_2} \end{cases}}$$

Ejemplo

Calculemos la ecuación paramétrica de la recta que pasa por los punto A (2,-1) y B (-4,3)

Solución

Formamos el vector director de la recta a partir de los dos puntos por los que pasa:

$$\overrightarrow{AB} = (\mathbf{-4 - 2, 3 - (-1)}) = (\mathbf{-6, 4})$$

Recordando la expresión de la ecuación paramétrica de la recta:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathbf{2, -1}) + \boldsymbol{k} \cdot (\mathbf{-6, 4}) , \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$$

$$\forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R} \begin{cases} \boldsymbol{x} = \mathbf{2} - 6k \\ \boldsymbol{y} = \mathbf{-1} + 4k \end{cases}$$

Ecuación continua de la recta

Si despejamos el parámetro en ambas ecuaciones de la forma paramétrica de la recta, obtendremos la ecuación en forma continua de la recta.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2})$ vector de posición del punto P

$\vec{\mathrm{v}} = (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2})$ vector director de la recta

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ punto genérico de la recta

$\boldsymbol{k}$ parámetro real

Ecuación continua de la recta

$$\forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R} \begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p_1} + k\boldsymbol{v_1} \Rightarrow k = \dfrac{x - \boldsymbol{p_1}}{\boldsymbol{v_1}} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{p_2} + k\boldsymbol{v_2} \Rightarrow k = \dfrac{y - \boldsymbol{p_2}}{\boldsymbol{v_2}} \end{cases} Igualando \quad \boxed{\dfrac{x - \boldsymbol{p_1}}{\boldsymbol{v_1}} = \dfrac{y - \boldsymbol{p_2}}{\boldsymbol{v_2}}}$$

Ejemplo

Calculemos la ecuación continua de la recta que pasa por los punto A (2,-1) y B (-4,3)

Solución

Formamos el vector director de la recta a partir de los dos puntos por los que pasa:

$$\overrightarrow{AB} = (\mathbf{-4-2, 3-(-1)}) = (\mathbf{-6, 4})$$

Recordando la expresión de la ecuación continua de la recta:

$$\frac{x-\mathbf{2}}{\mathbf{-6}} = \frac{y+1}{\mathbf{4}}$$

Ecuación general de la recta

Si operamos y transponemos todos los términos de la ecuación continua de la recta, obtendremos la ecuación general de la recta, que tiene la forma $\boldsymbol{ax+by+c=0}$.

$$\frac{x-\boldsymbol{p_1}}{\boldsymbol{v_1}}=\frac{y-\boldsymbol{p_2}}{\boldsymbol{v_2}} \Rightarrow \boldsymbol{v_2}(x-\boldsymbol{p_1})=\boldsymbol{v_1}(y-\boldsymbol{p_2})$$

$$\boldsymbol{v_2x-v_2p_1=v_1y-v_1p_2 \Rightarrow v_2x-v_1y-v_2p_1+v_1p_2=0}$$

$\boldsymbol{a=v_2}$

b$=\boldsymbol{-v_1}$

c$=\boldsymbol{-v_2p_1+v_1p_2}$

Tomando los siguientes valores, obtenemos la ecuación general $\boldsymbol{ax+by+c=0}$

Ejemplo

Calculemos todas formas de ecuación la recta que pasa por el punto A (3,1) y tiene por vector director $\vec{u}$ (4,-2)

Solución

Ecuación vectorial $\quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathbf{3}, \mathbf{1}) + \boldsymbol{k} \cdot (\mathbf{4}, -\mathbf{2}), \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$

Ecuación paramétrica $\quad \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R} \begin{cases} \boldsymbol{x} = \mathbf{3} + 4k \\ \boldsymbol{y} = \mathbf{1} - 2k \end{cases}$

Ecuación continua $\quad \dfrac{x - \mathbf{3}}{\mathbf{4}} = \dfrac{y - \mathbf{1}}{-\mathbf{2}}$

Ecuación general $\quad -\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{4}\boldsymbol{y} + \mathbf{10} = \mathbf{0}$

Ecuación de la recta punto pendiente

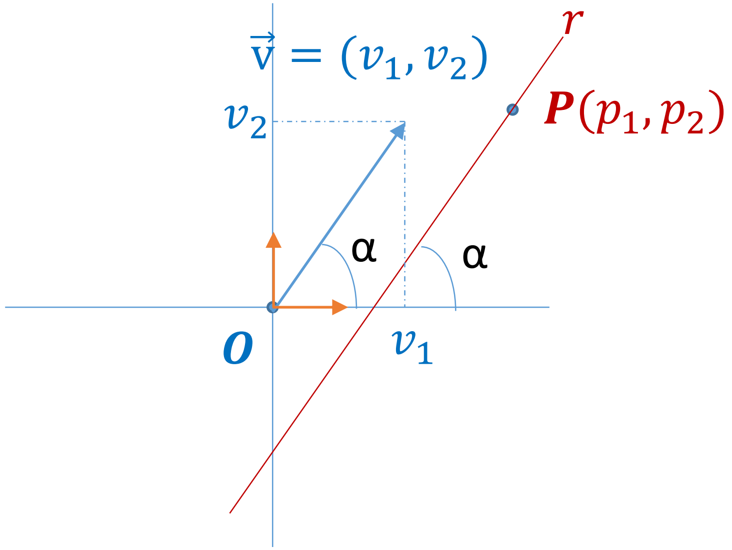
La ecuación continua de la recta que pasa por el punto $(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2})$ y tiene por vector director $\vec{v} = (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2})$ tiene la forma:

$$\frac{x - \boldsymbol{p_1}}{\boldsymbol{v_1}} = \frac{y - \boldsymbol{p_2}}{\boldsymbol{v_2}}$$

Si despejamos transponemos el valor de $\boldsymbol{v_2}$ y supuesto que $\boldsymbol{v_1} \neq \boldsymbol{0}$. Podemos expresar la ecuación de la forma:

$$y - \boldsymbol{p_2} = \frac{\boldsymbol{v_2}}{\boldsymbol{v_1}}(x - \boldsymbol{p_1})$$

A la expresión $\frac{\boldsymbol{v_2}}{\boldsymbol{v_1}}$ se le denomina pendiente de la recta y coincide con la tangente del ángulo que forma la parte positiva del eje de abscisas con la recta.



Ejemplo

Calculemos la ecuación de la recta que pasa por el punto A (2,3) y forma un ángulo de 30^0 con el eje de abscisas.

Solución

Recordando que $tg30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y utilizando la ecuación de la recta punto pendiente, la ecuación quedaría:

$$y - \mathbf{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - \mathbf{2})$$

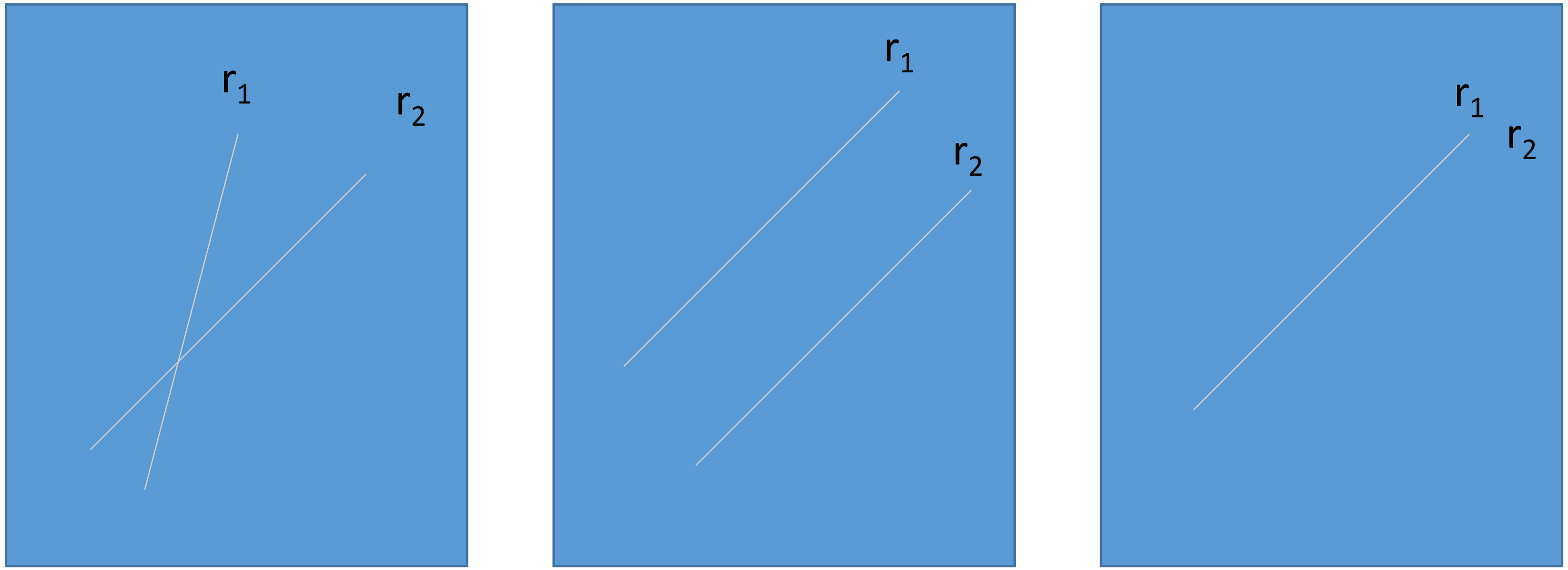
Posiciones relativas de dos rectas en el plano

Dos rectas en el plano pueden ser:

Secantes: tienen un punto en común

Paralelas: no tienen ningún punto en común

Coincidentes: tienen todos los puntos en común



Posición relativa y ecuaciones

Podemos saber la posición relativa de dos rectas en el plano resolviendo el sistema lineal formado por sus ecuaciones, de tal forma que:

Si el sistema tiene una única solución la rectas son secantes, la solución del sistema son las coordenadas del punto donde se cortan

Si el sistema no tiene solución, las rectas son paralelas

Si el sistema tiene infinitas soluciones, las rectas serán coincidentes.

Ejemplo

Calculamos la posición relativa de las rectas $\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ 4x + 6y + 2 = 0 \end{cases}$

Resolviendo el sistema (multiplicando por -2 la primera ecuación y sumando a la segunda ecuación:

$$\begin{array}{r} -4x - 6y - 2 = 0 \\ 4x + 6y + 2 = 0 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

Esta identidad siempre se verifica, por tanto, las rectas son coincidentes

Posición relativa: pendiente y ordenadas en el origen

Es posible conocer la posición relativa de dos rectas sin resolver el sistema lineal de ecuaciones que forman sus ecuaciones.

Supongamos que las dos rectas tienen por ecuaciones generales las siguientes:

$$\boldsymbol{r \equiv ax + by + c = 0}$$

$$\boldsymbol{r' \equiv a'x + b'y + c' = 0}$$

Las pendientes de ambas rectas tendrán la forma:

$$\boldsymbol{m = -\frac{a}{b}}$$

$$\boldsymbol{m' = -\frac{a'}{b'}}$$

Las ordenadas en el origen de las rectas tendrán la forma:

$$\boldsymbol{n = -\frac{c}{b}}$$

$$\boldsymbol{n' = -\frac{c'}{b'}}$$

Por tanto, si las pendientes son distintas las rectas serán secantes

Si las pendientes son iguales:

- Si las ordenadas en el origen son iguales, las rectas son coincidentes
- Si las ordenadas en el origen son distintas, las rectas serán paralelas

Haz de rectas secantes

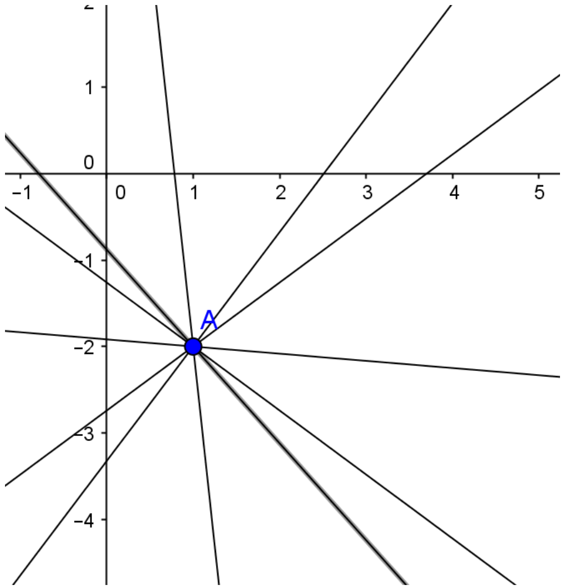
Dado un punto $\mathrm{P}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2})$ definimos el haz de rectas como el conjunto de todas las rectas que pasan por P. Su ecuación es (el parámetro $\boldsymbol{m}$ representa cualquier pendiente):

$$\boldsymbol{y - p_2 = m(x - p_1)} \text{ para cualquier } \boldsymbol{m} \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

Calculamos el haz de rectas que pasa por el punto (1,-2)

$$\boldsymbol{y + 2 = m(x - 1)} \text{ para cualquier } \boldsymbol{m} \in \mathbb{R}$$



Haz de rectas paralelas

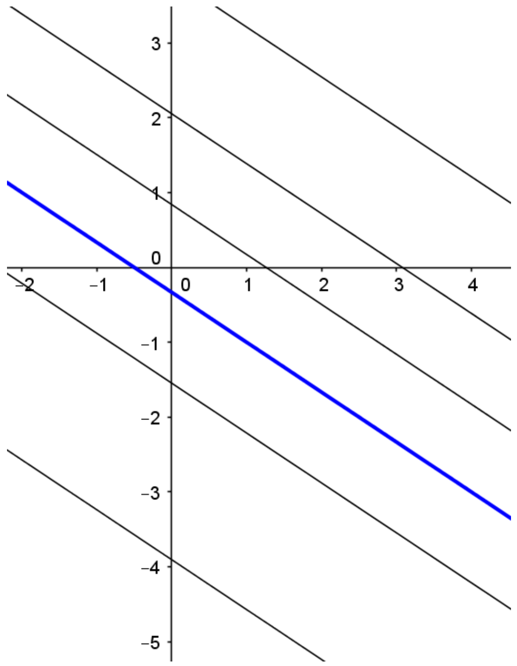
Dada la recta $\boldsymbol{r \equiv ax + by + c = 0}$ definimos el haz de rectas paralelas a ***r*** como el conjunto de las rectas del plano que son paralelas a aquella. Su ecuación es:

$$\boldsymbol{ax + by + k = 0} \text{ para cualquier } \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

Calculamos el haz de rectas paralela a la recta $\boldsymbol{2x + 3y + 1 = 0}$

$\boldsymbol{2x + 3y + k = 0}$ para cualquier $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$



Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos $P(p_1, p_2)$ y $Q(q_1, q_2)$ del plano coincide con el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$.

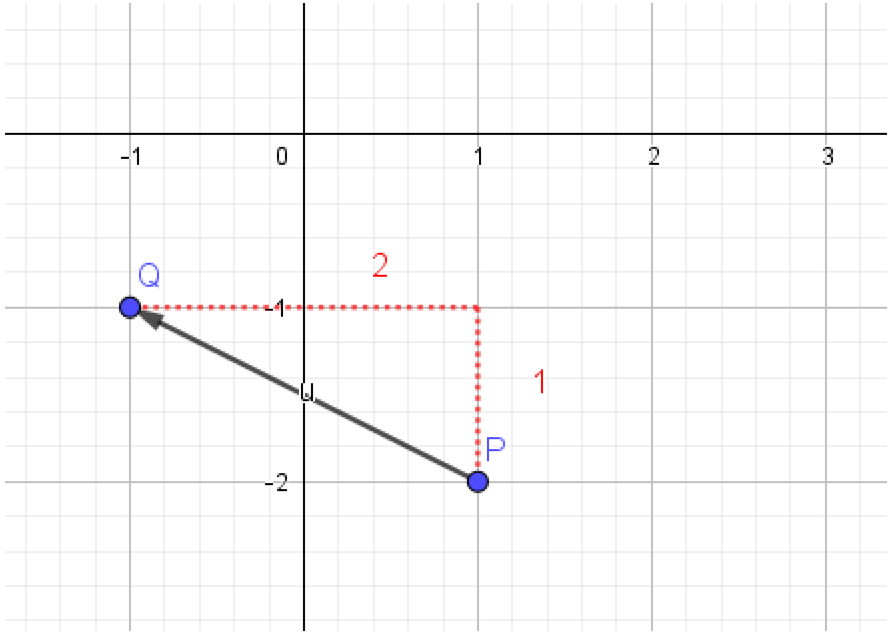
$$d(P,Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$$

Ejemplo

Calculamos la distancia de los puntos P(1,-2) y Q(-1,-1)

$$d(P,Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$$

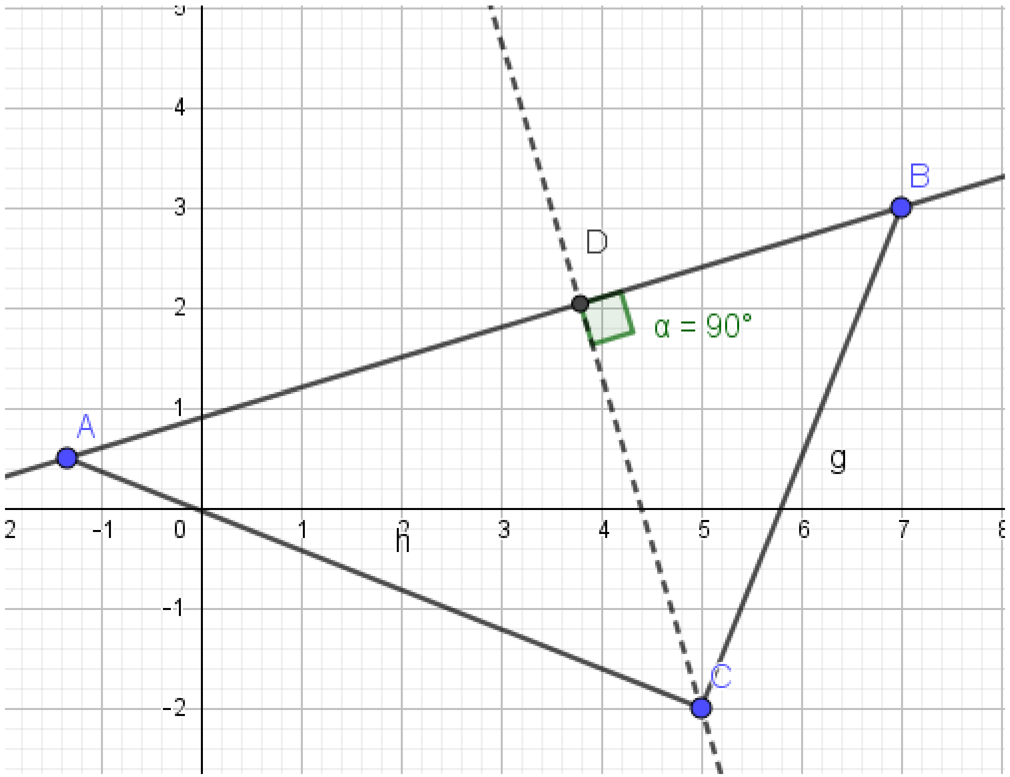
$$= \sqrt{(-1-1)^2 + \left(-1-(-2)\right)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$



Distancia de un punto a una recta

Dados un punto P y una recta r, se define la distancia del punto a la recta como la mínima distancia del punto a cualquiera de los puntos de la recta.

Esta distancia coincide con la distancia del punto P al punto de la recta que se obtiene al trazar la recta perpendicular a la recta y que pasa por el punto P.



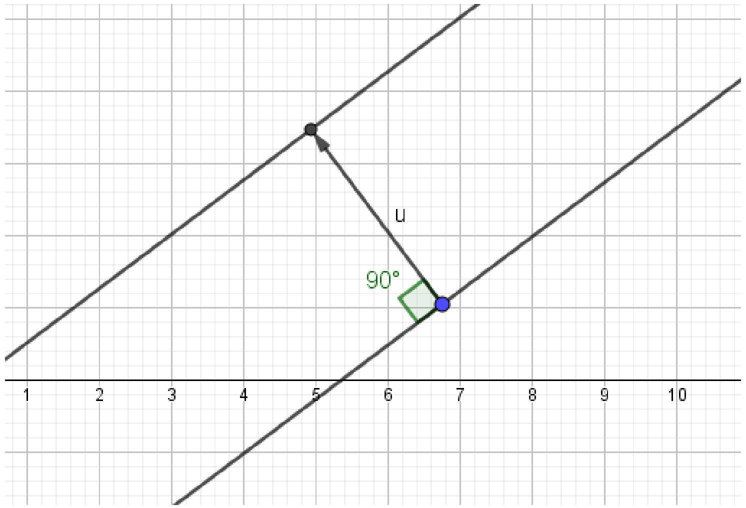
Distancia entre dos rectas

La distancia de dos rectas en el plano es la menor distancia a la que se encuentran dichas rectas, por lo que únicamente tiene sentido si se trata de rectas paralelas. En el resto de casos es cero.

Seleccionando un punto P de una de las rectas, podemos calcular la distancia de dicho punto a la otra recta. Sea $r: ax + by + c = 0$ y $s: ax + by + c' = 0$, sea $P(p_1, p_2)$ un punto que pertenezca a ***s***, entonces:

$ap_1 + bp_2 + c' = 0$

$$\boxed{d(r,s)} = d(P,r) = \frac{|a \cdot p_1 + b \cdot p_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-c' + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \boxed{\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$



Ejemplo

Calculamos la distancia del punto $P(-1,3)$a la recta $r\colon 2x - y + 4 = 0$.

$$d(P,r) = \frac{|a \cdot p_1 + b \cdot p_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \cdot (-1) - 3 + 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Calculamos la distancia de la recta $r\colon 2x - y + 4 = 0$ y la recta $s\colon 2x - y + 5 = 0$

$$d(r,s) = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Nota.- Ambas distancias son idénticas pues la recta s es la recta paralela a la recta r que pasa por el punto P.

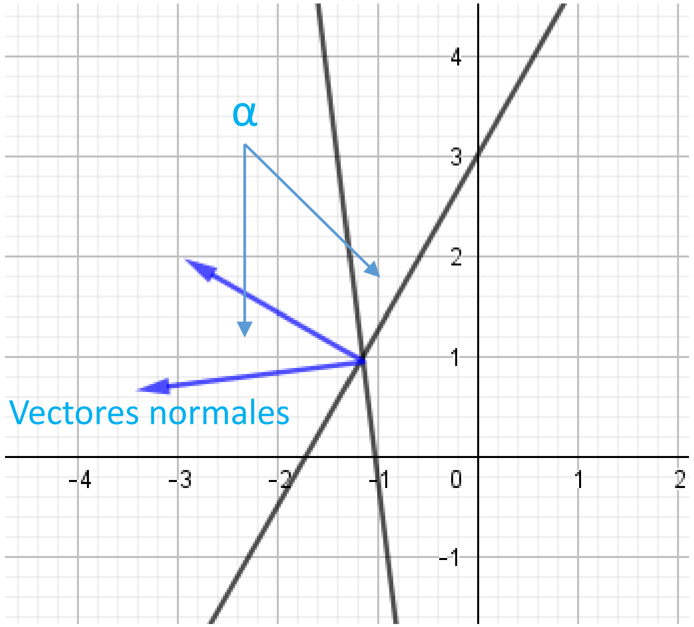
Ángulo que forman dos rectas I

Dos rectas secantes forman cuatro ángulos iguales dos a dos siendo cada dos ángulos distintos suplementarios. El ángulo formado por dos rectas será el menor de ellos.

Conocidos los vectores directores o los vectores normales

Sean las rectas $r: ax + by + c = 0$ y $s: a'x + b'y + c' = 0$. Dos vectores normales son: $\vec{u} = (a, b)$ y $\vec{v} = (a', b')$ sea α el ángulo que forman las dos rectas:

$$\cos \propto = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{|a \cdot a' + b \cdot b'|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2}} \quad 0 \leq \propto \leq 90^o$$



Nota.- El cálculo con los vectores directores es idéntico.

Ángulo que forman dos rectas II

Conocidas las pendientes

Sean las rectas $r: y = mx + n$ y $s: y = m'x + n'x$.

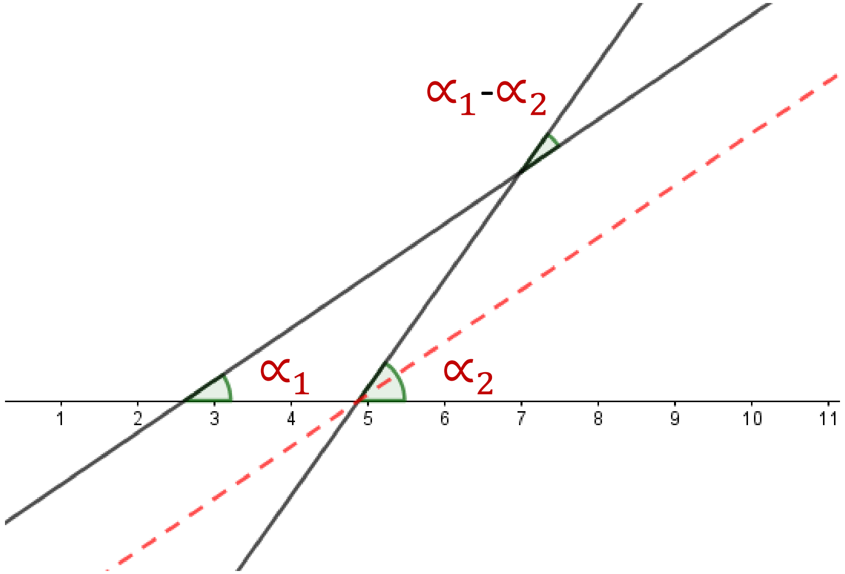
Las pendientes verifican que: $tg \propto_1 = m$ y $tg \propto_2 = m'$ donde $\propto_1$ y $\propto_2$ son los ángulos correspondientes que forman las rectas con el eje de abscisas.

El ángulo que forman ambas rectas entre sí puede ser expresado como:

$\propto = \propto_1 - \propto_2$ o bien $\propto = 180^o - (\propto_1 - \propto_2)$.

En ambos casos, utilizando la fórmula trigonométrica de la tangente para la diferencia de ángulos queda:

$$tg \propto = \left| \frac{tg \propto_1 - tg \propto_2}{1 + \mathrm{tg} \propto_1 \cdot \mathrm{tg} \propto_2} \right| = \left| \frac{m - m'}{1 + m \cdot m'} \right| \quad donde\ 0 \leq \propto \leq 90^o$$



Aplicaciones

Puntos y rectas simétricos

Simetría central

Siendo **M** un punto fijo del plano, los puntos **S** y **S’** serán simétricos en la simetría central con centro **M**, cuando el punto **M** es el punto medio del segmento $\overline{SS'}$.

Simetría axial

Sea **r** una recta fija que llamaremos eje de simetría. Los puntos **S** y **S’** serán simétricos en la simetría axial definida por el eje **r** cuando:

El segmento $\overline{SS'}$ sea perpendicular a la recta **r**

El punto de corte del segmento $\overline{SS'}$ con la recta **r** es a su vez el punto medio del segmento.

Punto simétrico respecto de una recta

Cálculo del punto simétrico a $A = (-2,2)$ respecto de la recta $\mathrm{r} \equiv 2x + y = 3$

Solución:

Calcularemos la recta, s, que pasa por A y es perpendicular a r. El vector director será $(2,1)$ y un punto de la misma será $A = (-2,2)$. Por tanto, la ecuación será:

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{1}\ ; s \equiv x - 2y = -6$$

Calculamos la intersección de ambas rectas, éste será el punto medio (M) del segmento que forman los dos puntos simétricos.

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = -6 \end{cases}; M = (0,3)$$

Aplicamos la condición para calcular A

$$\begin{cases} A = (-2,2) \\ A' = (x,y) \\ M = (0,3) \end{cases}, por\ tanto, \begin{cases} \dfrac{-2+x}{2} = 0; x = 2 \\ \dfrac{2+y}{2} = 3; y = 4 \end{cases}$$

Cálculo de la mediatriz de un segmento

Dados los puntos $A = (-3,0)\ y\ B = (5,4)$, calcularemos la mediatriz.

Solución:

Calcularemos el punto medio del segmento de extremos A y B. Después, calcularemos la recta que pasa por el punto medio y la recta perpendicular al segmento de extremos A y B.

$$\begin{cases} m_1 = \dfrac{-3+5}{2} = 1 \\ m_2 = \dfrac{4+0}{2} = 2 \end{cases} ; M = (1,2)$$

El vector perpendicular a la mediatriz es: $\overrightarrow{AB} = (5-(-3), 4-0) = (8,4) \approx (2,1)$.

Por tanto, la mediatriz viene dada por la ecuación:

$$2(x-1) + (y-2) = 0 \,; 2x + y = 4$$

Cálculo de las bisectrices de dos rectas

Dadas las rectas $r \equiv x - y = 3$ y $s \equiv -7x + y = -3$, calcularemos las bisectrices.

Solución:

La bisectriz es la recta cuyos puntos equidistan de las dos rectas dadas. Tomando un punto genérico P(x,y):

$$d(P,r) = \frac{|x-y-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|x-y-3|}{\sqrt{2}} \qquad d(P,s) = \frac{|-7x+y+3|}{\sqrt{(-7)^2+1^2}} = \frac{|-7x+y+3|}{5\sqrt{2}}$$

Igualando:

$$\frac{|x-y-3|}{\sqrt{2}} = \frac{|-7x+y+3|}{5\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{x-y-3}{\sqrt{2}} = \pm\frac{-7x+y+3}{5\sqrt{2}} = \begin{cases} 5x-5y-15 = -7x+y+3 \\ 5x-5y-15 = 7x-y-3 \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} 12x-6y = 18; 2x-y = 3 \\ 2x+4y = -12; x+2y = -6 \end{cases}$$