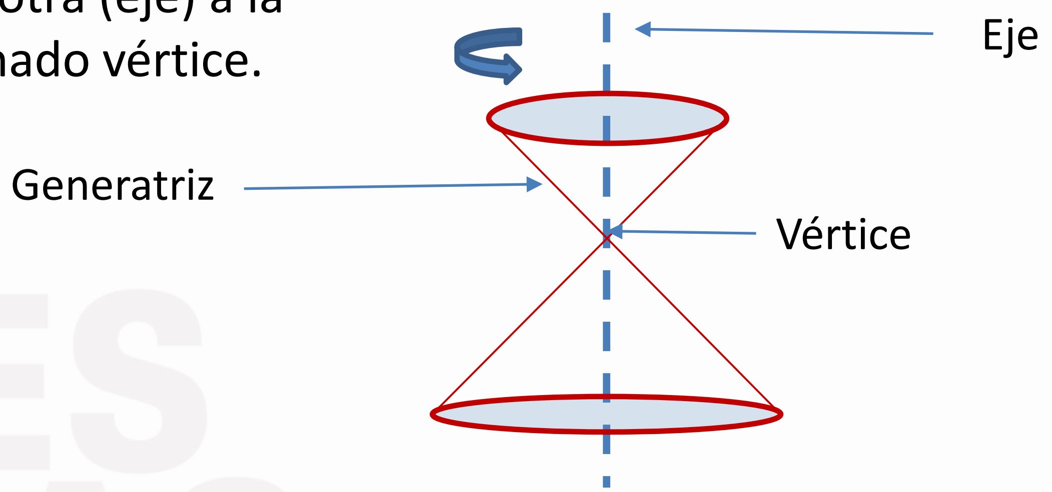
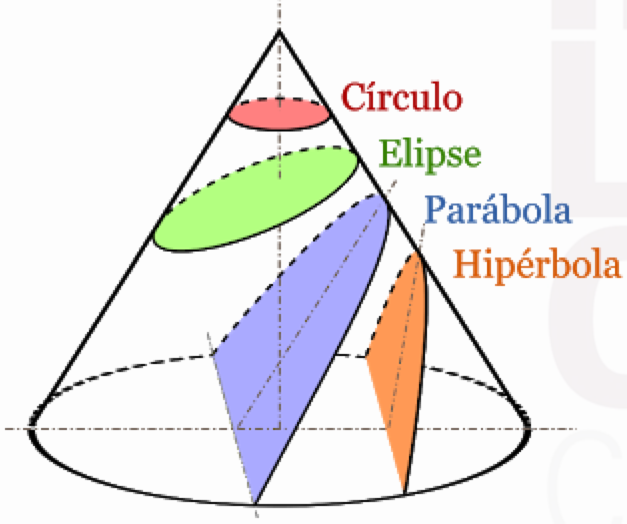
Cónicas

Definiciones

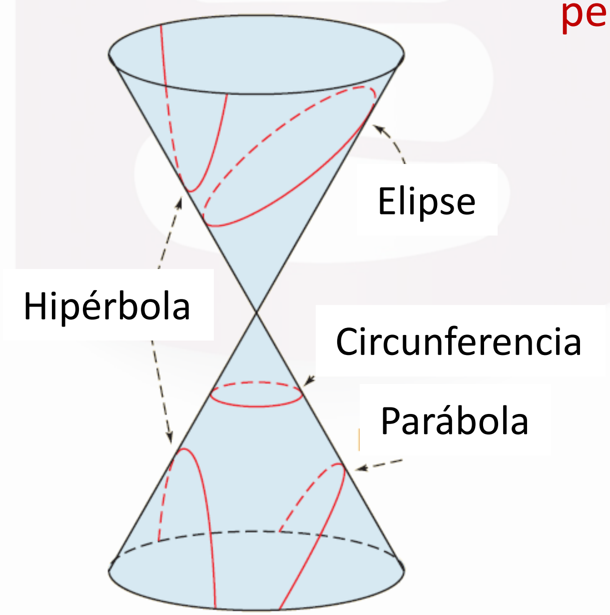
Una superficie cónica se obtiene al girar una recta (generatriz) alrededor de otra (eje) a la que corta en un punto denominado vértice.





Una sección cónica es una curva que se obtiene al cortar una superficie cónica con un plano que no pasa por el vértice.

Tipos de secciones cónicas



Circunferencia: El plano corta a la superficie cónica perpendicularmente al eje.

Hipérbola: El plano corta a la superficie cónica de tal forma que corta al eje y a las dos generatrices.

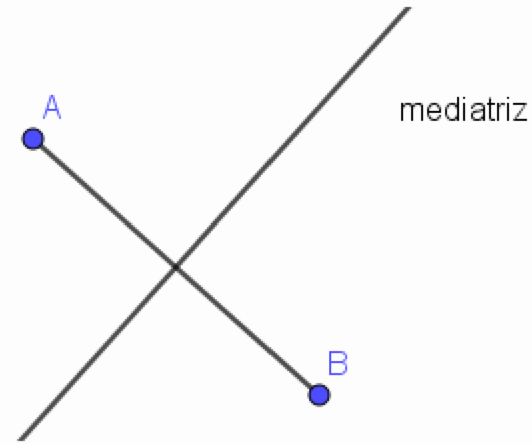
Parábola: El plano que corta a la superficie cónica es paralelo a la generatriz.

Hìpérbola: El plano que corta a la superficie cónica es paralelo al eje.

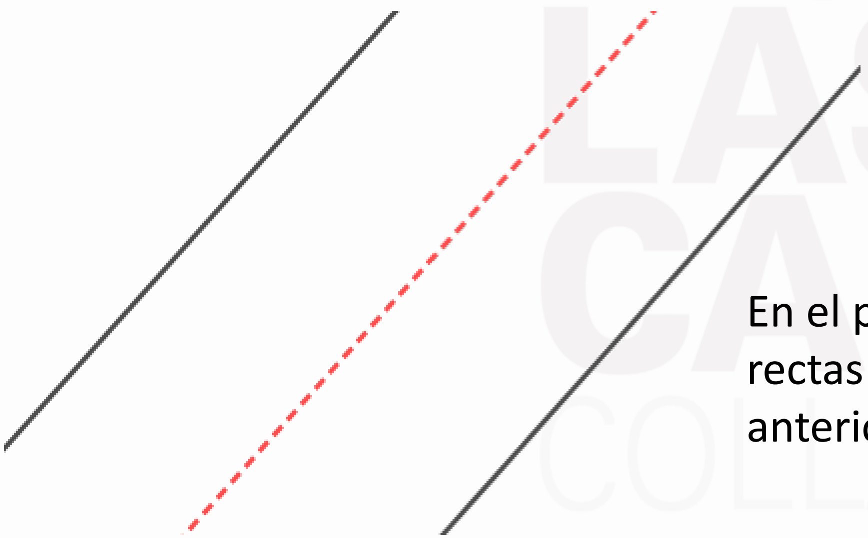
Lugar geométrico

Un lugar geométrico es un conjunto de puntos que cumplen determinadas condiciones o propiedades geométricas.

Ejemplos



En el plano, los puntos equidistantes a dos puntos dados es la mediatriz del segmento que tiene por extremos tales puntos.



En el plano, los puntos equidistantes a dos rectas paralelas, es otra recta paralela a las anteriores.

LA CIRCUNFERENCIA

Definición

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto fijo, denominado centro, es constante. A dicha distancia se le denomina radio.

Ecuación de la circunferencia

Sea $C = (c_1, c_2)$ el centro de la circunferencia, $r \in \mathbb{R}, r > 0$ y $P = (x, y)$ un punto genérico del plano perteneciente a la circunferencia con centro *C* y radio *r*. Entonces:

$$d(P; C) = r \Rightarrow \sqrt{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2} = r \Rightarrow (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$$

Desarrollando

$$x^2 + y^2 - 2c_1x - 2c_2y + {c_1}^2 + {c_2}^2 - r^2 = 0$$

Por tanto la ecuación general de la circunferencia puede expresarse como:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Centro y radio de la circunferencia

De las siguientes fórmulas y recordando que el centro de la circunferencia es $C = (c_1, c_2)$ y el radio r :

$$x^2 + y^2 - 2c_1x - 2c_2y + {c_1}^2 + {c_2}^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

se deduce que:

$$Centro\ y\ radio \begin{cases} c_1 = -\dfrac{A}{2} \\ c_2 = -\dfrac{B}{2} \\ r = \sqrt{\dfrac{A^2}{4} + \dfrac{B^2}{4} - C} \end{cases}$$

Para que una expresión del tipo

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

se corresponda con una circunferencia debe ocurrir que:

$$\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C > 0$$

Ejemplo

Calcularemos el centro y el radio de la siguiente circunferencia:

$$3x^2 + 3y^2 - 12x + 6y + 2 = 0$$

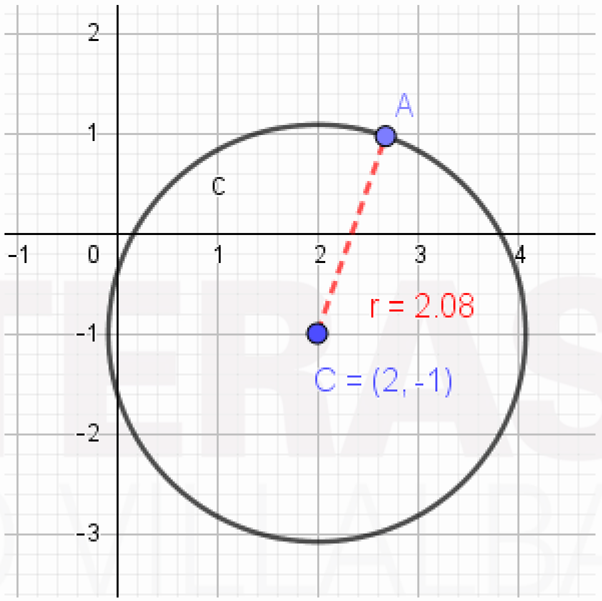
Solución

En primer lugar simplificaremos la ecuación dividiendo por 3:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + \frac{2}{3} = 0$$

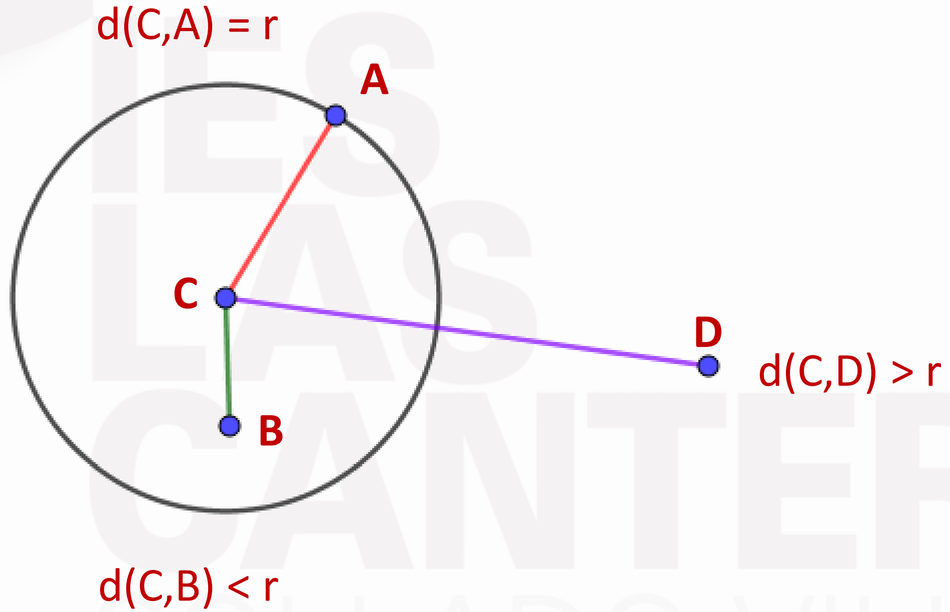
$$Centro = (c_1, c_2) = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = (2, -1)$$

$$radio = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C} = \sqrt{4 + 1 - \frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{13}{3}}$$



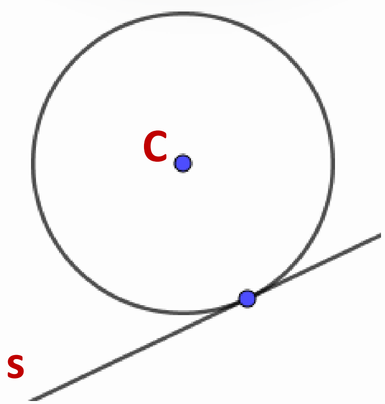
Posición de un punto respecto de una circunferencia

Para saber si un punto es interior, exterior o pertenece a la circunferencia basta con calcular la distancia de aquel con el centro de la circunferencia y compararla con el radio.

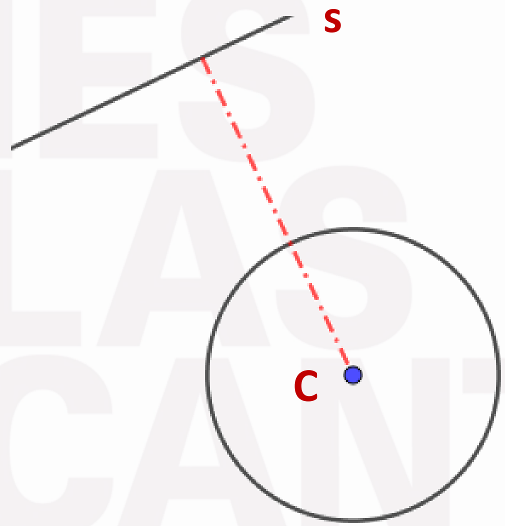


Posición de una recta respecto de una circunferencia

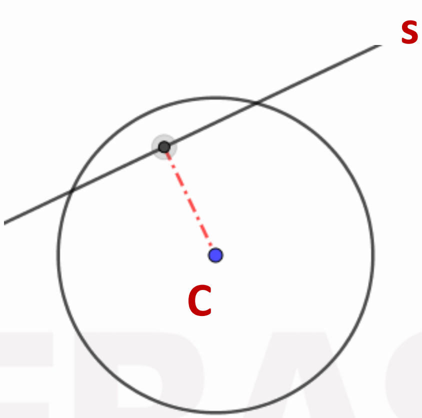
Para saber si una recta es secante, tangente o exterior a una circunferencia calculamos la distancia del centro de la circunferencia a la recta. Si la distancia es menor que el radio la recta será secante, si es igual al radio la recta será tangente y si el radio es mayor que el radio, la recta será externa.



d(C,s) = r

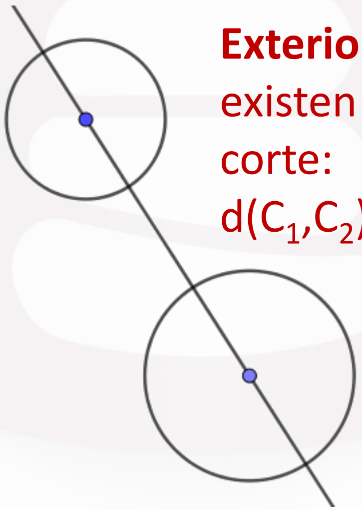


d(C,s) > r

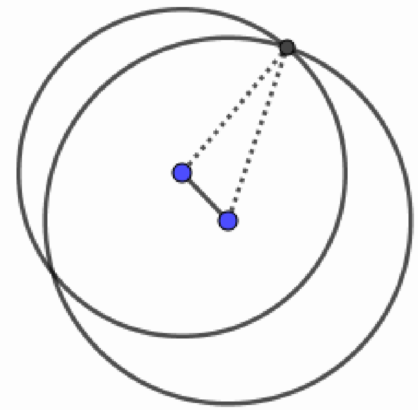


d(C,s) < r

Posición relativa de dos circunferencias I

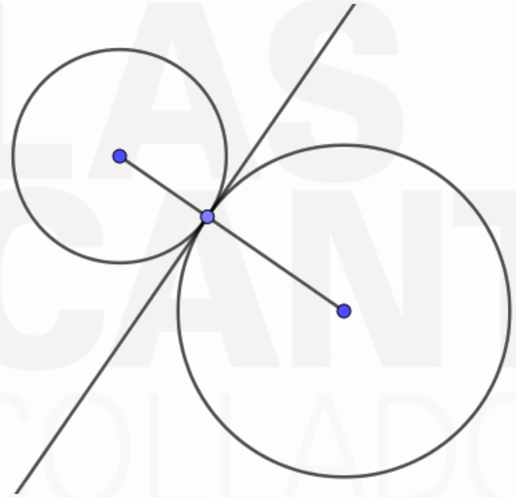


Exteriores: no existen puntos de corte:
$d(C_1,C_2) > r_1+r_2$

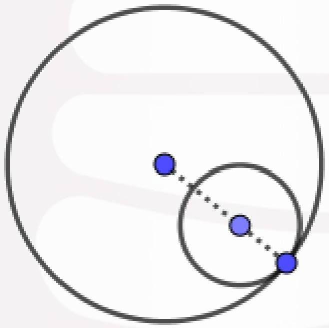


Secantes: dos puntos de corte:
$d(C_1,C_2) > r_1 - r_2$
$d(C_1,C_2) < r_1 + r_2$

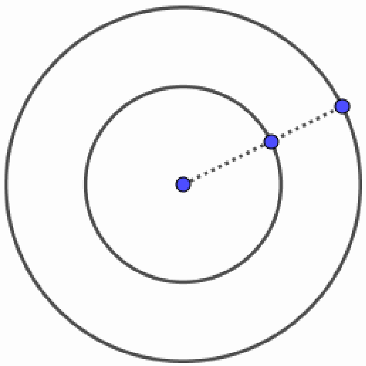
Tangentes exteriores: un punto de corte
$d(C_1,C_2) = r_1+r_2$



Posición relativa de dos circunferencias II

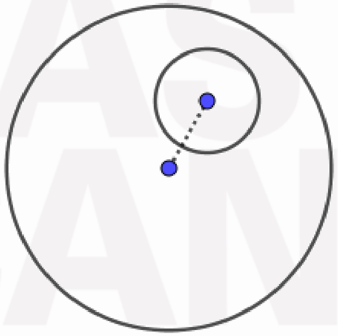


Tangentes interiores: un punto de corte $d(C_1,C_2)= r_1- r_2$

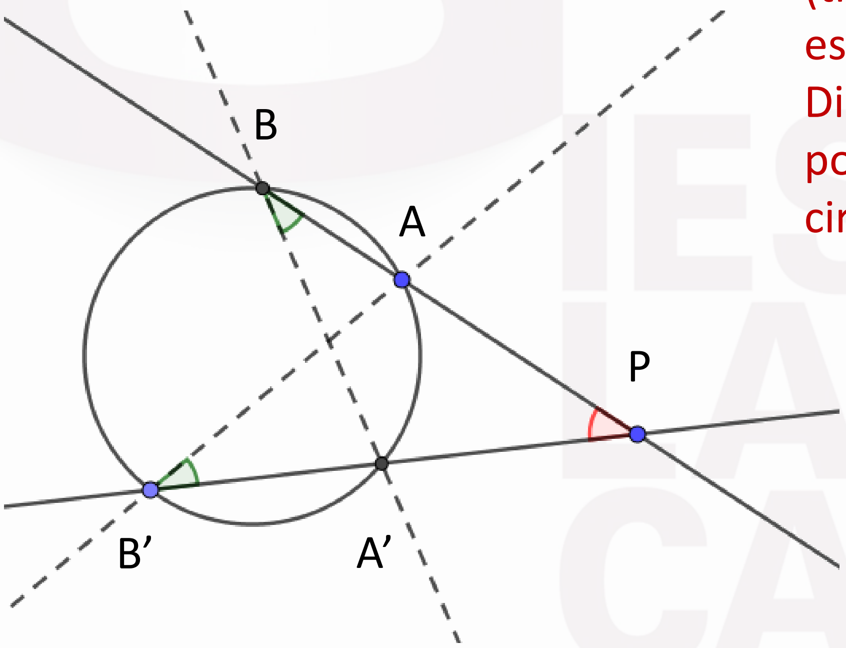


Concéntricas: no hay puntos de corte $C_1 = C_2$

Interiores: no hay puntos de corte $d(C_1,C_2)< r_1-r_2$



Potencia de un punto a una circunferencia: definición



Si trazamos dos rectas secantes a una circunferencia que se corten en un mismo punto, se forman 2 triángulos semejantes AB'P y PA'B (tienen dos ángulos iguales) y el producto PA·PB es igual a PA'·PB'.
Dicha cantidad es constante y se denomina potencia de un punto respecto de una circunferencia.

Cálculo analítico de la potencia de un punto respecto a una circunferencia

Cómo la potencia de un punto a una circunferencia no depende de la recta elegida, podemos calcularla utilizando la recta que pasa por el punto $P(p_1,p_2)$ y el centro de la circunferencia $C(c_1,c_2)$:

$$d(P,C) = \sqrt{(p_1 - c_1)^2 + (p_2 - c_2)^2}$$

$$Potencia(P,C) = (d(P,C) - r)(d(P,C) + r) = d(P,C)^2 - r^2 =$$

$$= (p_1 - c_1)^2 + (p_2 - c_2)^2 - r^2$$

Es decir, para calcular la potencia de un punto a una recta basta con sustituir las coordenadas del punto en la ecuación de la circunferencia igualada a cero.

Eje radical de dos circunferencias

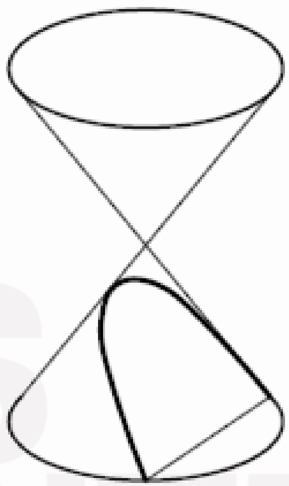
Dadas dos circunferencias, el eje radical es el lugar de los puntos del plano que tienen igual potencia respecto de ambas.

Para calcularlo analíticamente procederemos a tomar un punto genérico P(x,y), calcularemos la potencia con respecto a cada una de las circunferencias e igualaremos:

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2-r^2=(x-c'_1)^2+(y-c'_2)^2-r'^2$$

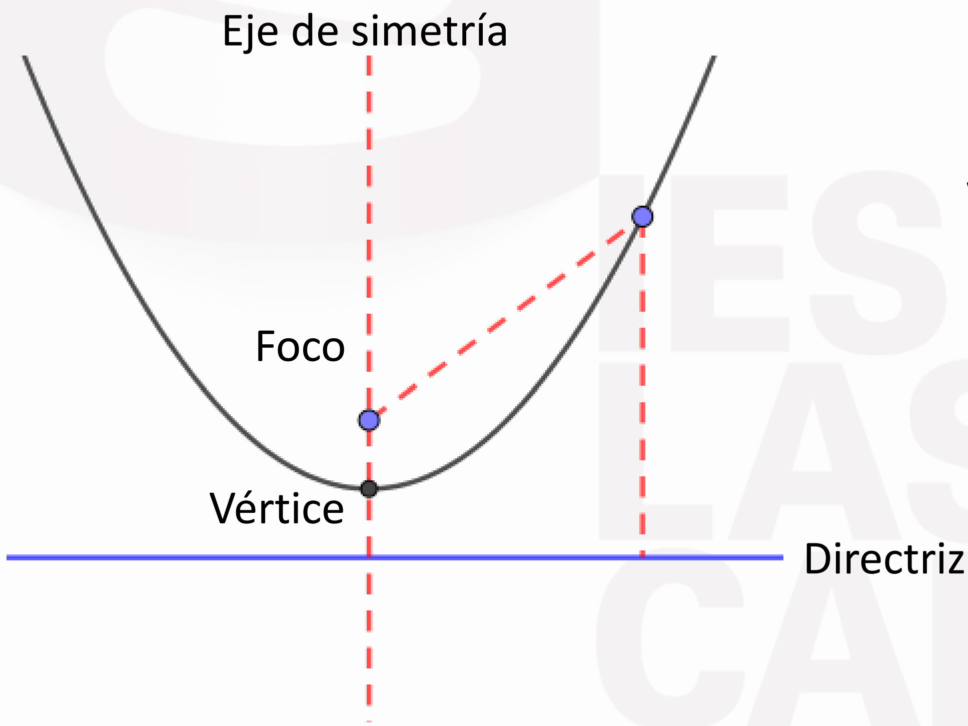
Tras simplificar, se puede observar que se trata de una recta.

LA PARÁBOLA



Definición

La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de una recta (directriz) y un punto (foco).



Eje de simetría: recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco

Vértice: punto de intersección del eje de simetría y la parábola

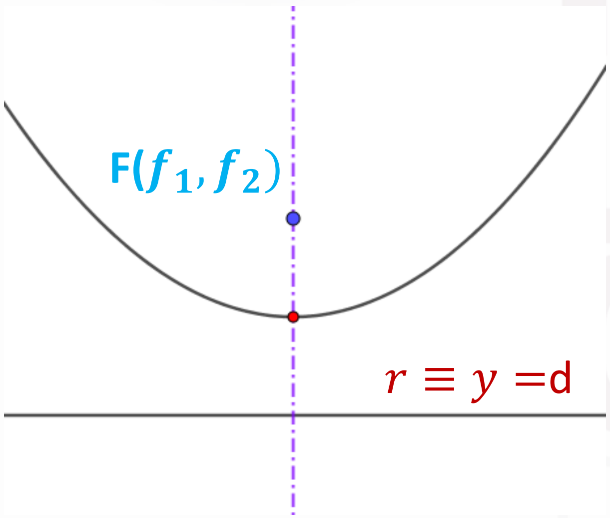
Parámetro: distancia entre el foco y la directriz.

Ecuación de la parábola

Sea el punto P(x,y) perteneciente a la parábola. Utilizaremos la definición para calcular su ecuación, siendo la directriz $r \equiv y =$d y el foco $\mathrm{F}(f_1, f_2)$.

$$d(P,F) = \sqrt{(x-f_1)^2 + (y-f_2)^2}$$

$$d(P,d) = |y-d|$$



$$\sqrt{(x-f_1)^2 + (y-f_2)^2} = |y-d|$$

$$(x-f_1)^2 + (y-f_2)^2 = (y-d)^2$$

$$(x-f_1)^2 + y^2 - 2yf_2 + {f_2}^2 = y^2 - 2dy + d^2$$

$$(x-f_1)^2 - d^2 + {f_2}^2 = -y^2 + 2yf_2 + y^2 - 2dy$$

$$(x-f_1)^2 + {f_2}^2 - d^2 = 2(f_2 - d)y$$

Ejemplo

Calcularemos la ecuación de la parábola que tiene por foco el punto (2, 5) y la directriz y = 3:

Siendo el punto P(x,y) un punto genérico de la parábola:

$$d(P,F) = \sqrt{(x-f_1)^2 + (y-f_2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2}$$

$$d(P,d) = |y-3|$$

Igualando $\sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2} = |y-3|$

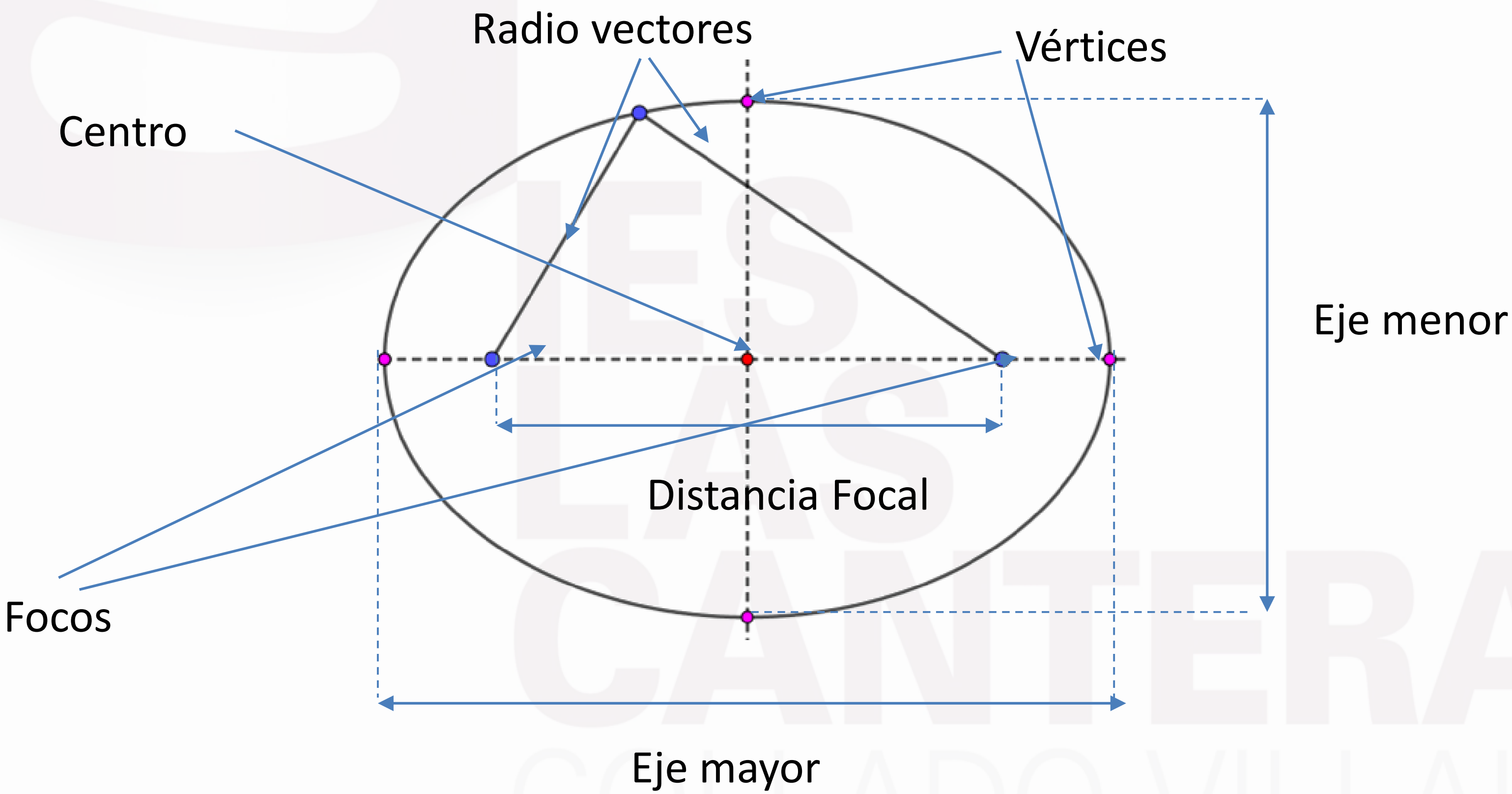
$$(x-2)^2 + (y-5)^2 = (y-3)^2$$

Desarrollando: $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = y^2 - 6y + 9$

Despejando: $x^2 - 4x + 20 = 4y \Rightarrow y = \frac{1}{4}x^2 - x + 5$

La elipse

La elipse es el conjunto de puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, denominados focos, es constante.



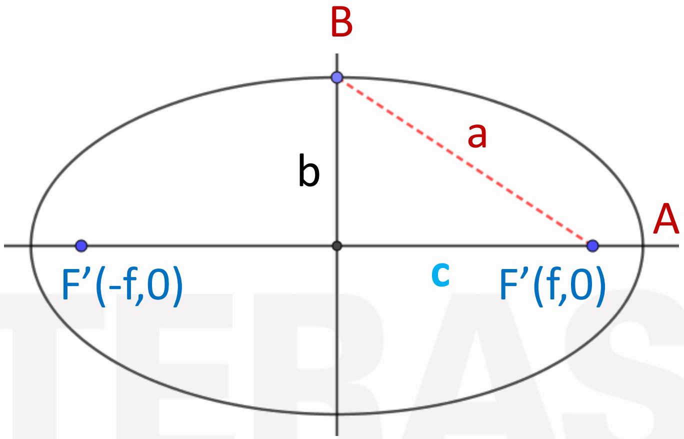
Relación fundamental de la elipse

Por definición, cualquier punto de la elipse cumple que la suma de las distancias a los focos es constante. Como A, uno de los vértices de la elipse, pertenece a ésta:

$$\overline{AF} + \overline{AF'} = \overline{AF'} + \overline{F'A'} = 2a \text{ (longitud del eje mayor)}$$

B el vértice del eje menor es también de la elipse, por tanto:

$$\overline{BF} = \overline{BF'} = a \text{ (semilongitud del eje mayor)}$$



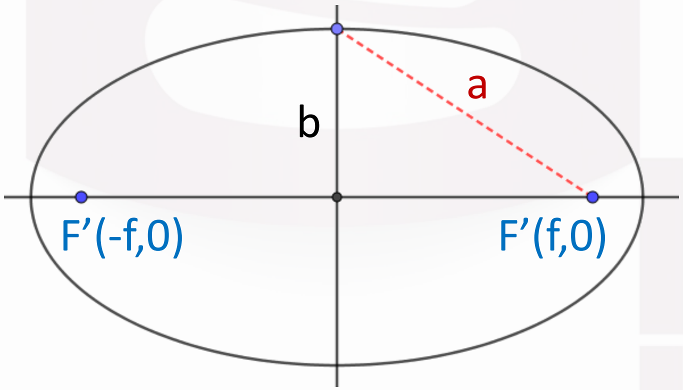
Utilizando el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Donde ***a*** es la longitud del semieje mayor, ***b*** es la longitud del semieje menor y ***c*** es la semidistancia focal

Ecuación reducida de la elipse

Situaremos el centro de la elipse como centro de coordenadas y el eje mayor y menor como ejes. Sea P(x,y) un punto genérico que pertenece a la elipse:



Aplicando la condición para que un punto pertenezca a la elipse:

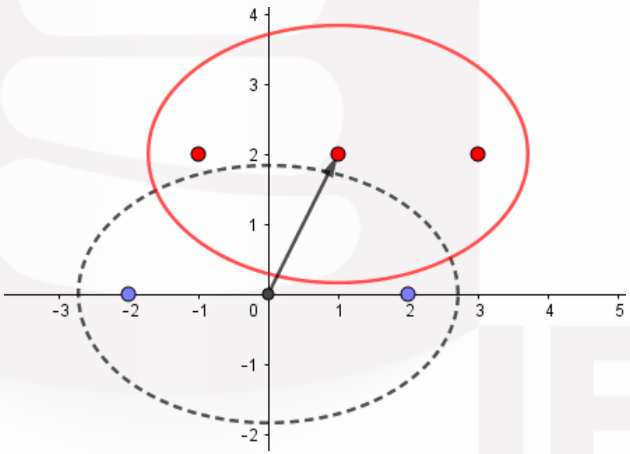
$$d(P,F) + d(P,F') = 2a$$

$$\sqrt{(x-f)^2 + y^2} + \sqrt{(x+f)^2 + y^2} = 2a$$

Desarrollando y simplificando esta expresión obtendremos la ecuación reducida:

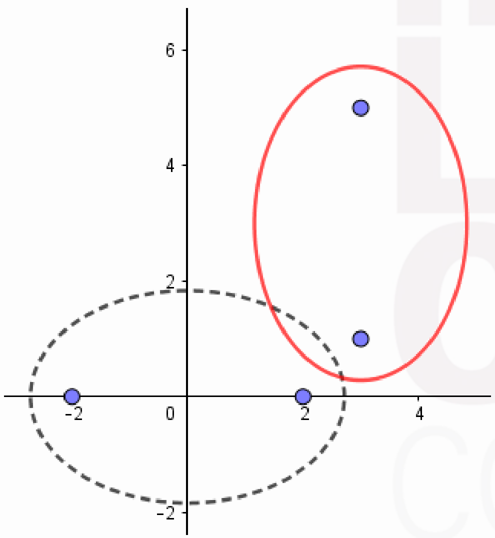
$$\mathbf{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Ecuación de la elipse en otros casos



Cuando realizamos una traslación de una elipse centrada en el origen a otro punto C $(\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2})$, la ecuación se modificará de la forma:

$$\frac{(x-c_1)^2}{\mathbf{a}^2}+\frac{(x-c_2)^2}{\mathbf{b}^2}=1$$



Cuando el eje focal es paralelo al eje de ordenadas, la ecuación de la elipse queda:

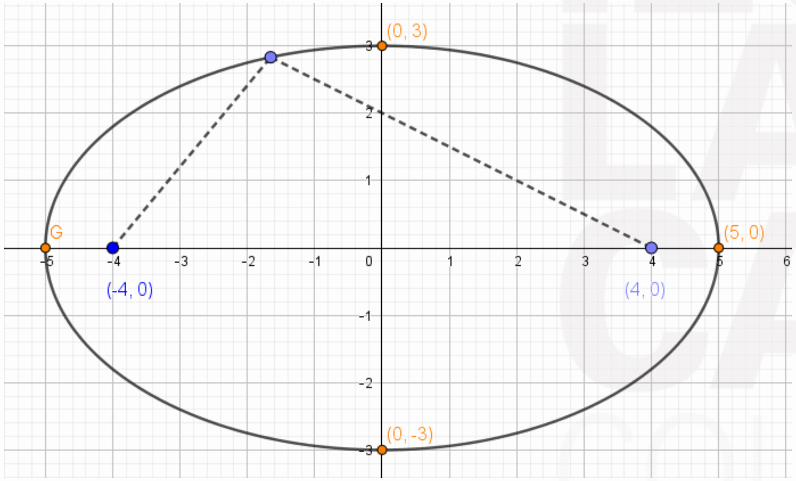
$$\frac{(x-c_1)^2}{\mathbf{b}^2}+\frac{(x-c_2)^2}{\mathbf{a}^2}=1$$

Ejemplo

Dada la ecuación de la elipse $9x^2 + 25y^2 = 255$, calcularemos el valor de sus vértices, la distancia focal y las coordenadas de los focos y vértices:

Dividiendo por 255 ambos miembros de la ecuación:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

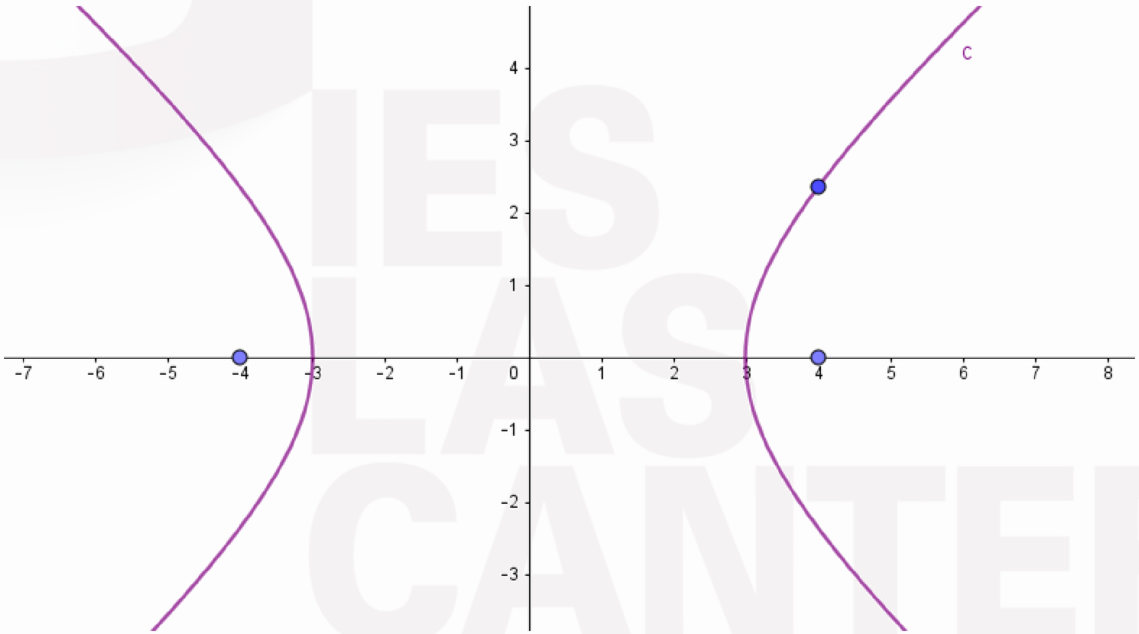


Por tanto, los vértices del semieje mayor son (5,0) y (-5,0). Los vértices del semieje menor son (0,-3) y (-3,0).

La semidistancia focal se calcula utilizando el teorema de Pitágoras: $\sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$. Por tanto, los focos son (-4,0) y (4,0).

La hipérbola

La hipérbola es el conjunto de puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, denominados focos, es constante.



Elementos de la hipérbola

Focos F(c,0); F’(-c,0)

Centro (0,0)

Vértices: A(a,0);A’(-a,0);B(0,b);B(0,-b)

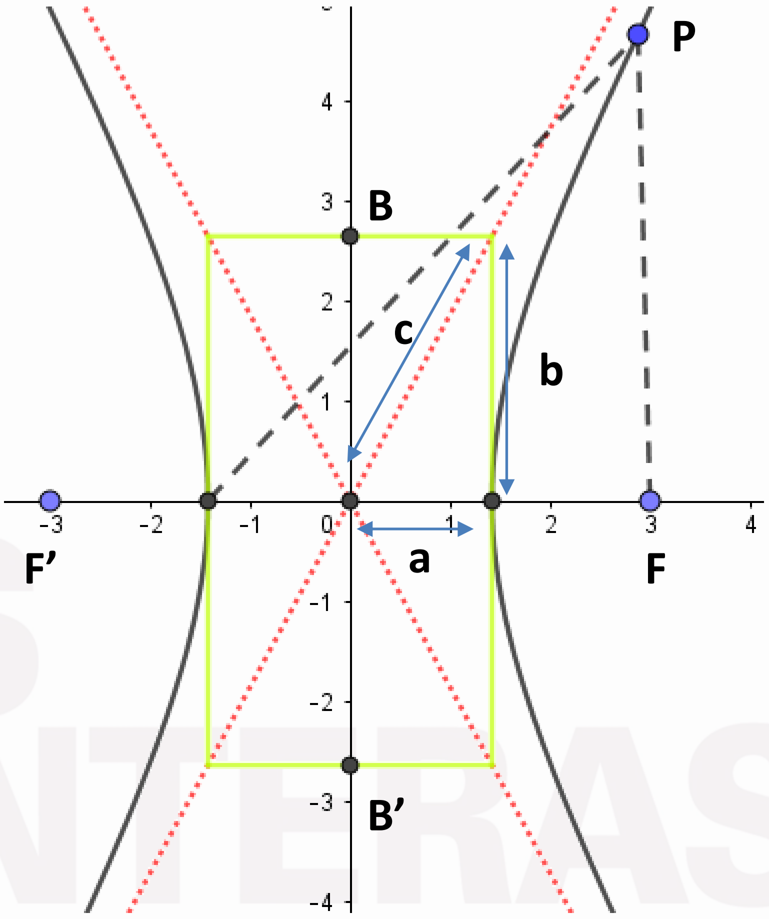
Radios vectores del punto P: $\overline{PF} y \overline{PF'}$

Semieje real: **a**

Semieje imaginario: **b**

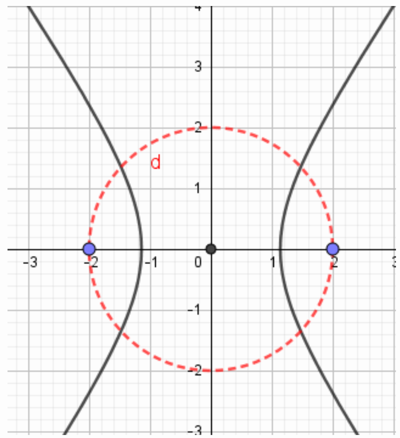
Semidistancia focal: **c**

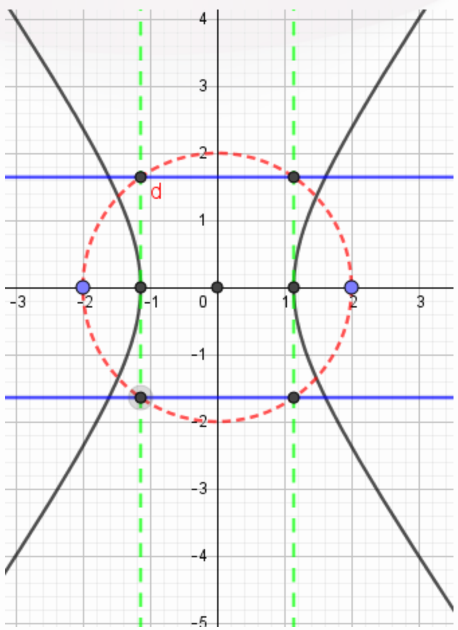
Distancia focal: $\overline{FF'}$



Cálculo del eje imaginario

Para calcular el eje imaginario de la hipérbola trazaremos la circunferencia con centro en el centro de la hipérbola y radio la semidistancia focal.





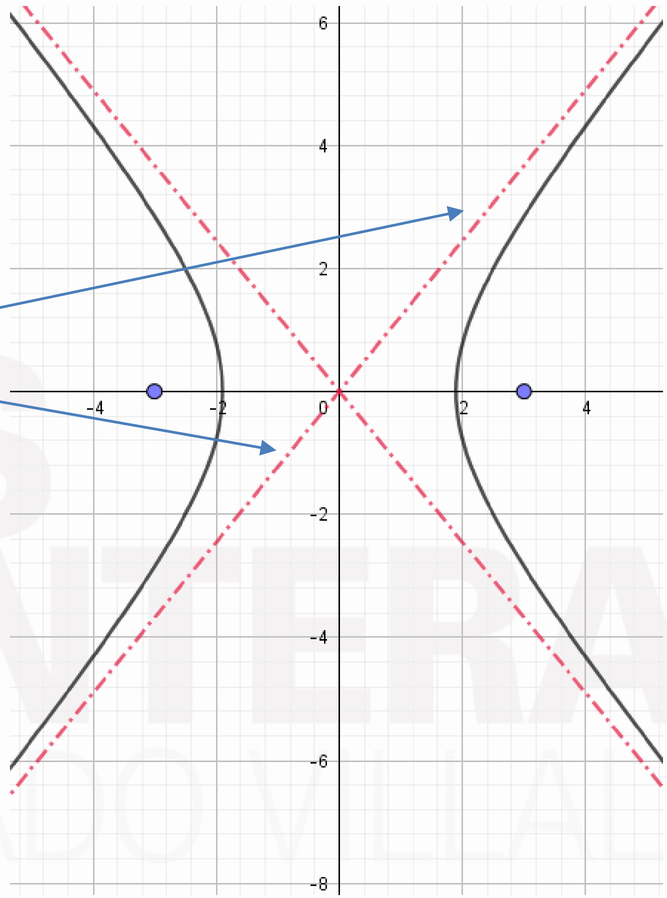
Los puntos que determinan el eje imaginario son la intersección de la circunferencia con las rectas perpendiculares al eje real que pasan por el punto de corte de la hipérbola con el eje real

Asíntotas de la hipérbola

Son las rectas que pasan por el centro de la hipérbola y cumplen que se acercan a las ramas de la hipérbola a medida que se alejan del centro de la hipérbola.

Las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y = \frac{b}{a}x \,;\, y = -\frac{b}{a}x$$



Las asíntotas son útiles para dibujar la hipérbola.

Ecuación reducida de la hipérbola

Si consideramos el punto P(x,y), genérico, perteneciente a la hipérbola centrada en el origen y siendo sus focos F’(-c,0) y F(c,0).

Como el punto P pertenece a la hipérbola:

$$\overline{PF} - \overline{PF'} = 2a \;\Rightarrow\; \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Elevando dos veces al cuadrado y simplificando se obtiene: $\mathbf{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$

Si los focos se encuentran en el eje de ordenadas: $\mathbf{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$

Si se encuentra centrada en $C(c_1,c_2)$, no en (0,0): $\mathbf{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$

Excentricidad de una cónica

La excentricidad, ε (épsilon) es un parámetro que determina el grado de desviación de una sección cónica con respecto a una circunferencia.

Así, en una elipse medirá el mayor o menor achatamiento y en una hipérbola la mayor o menor apertura de sus ramas.

Circunferencia

$\varepsilon = 0$

Parábola

$\varepsilon = 1$

Elipse

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$0 < \varepsilon < 1$

a longitud del semieje mayor
b longitud del semieje menor

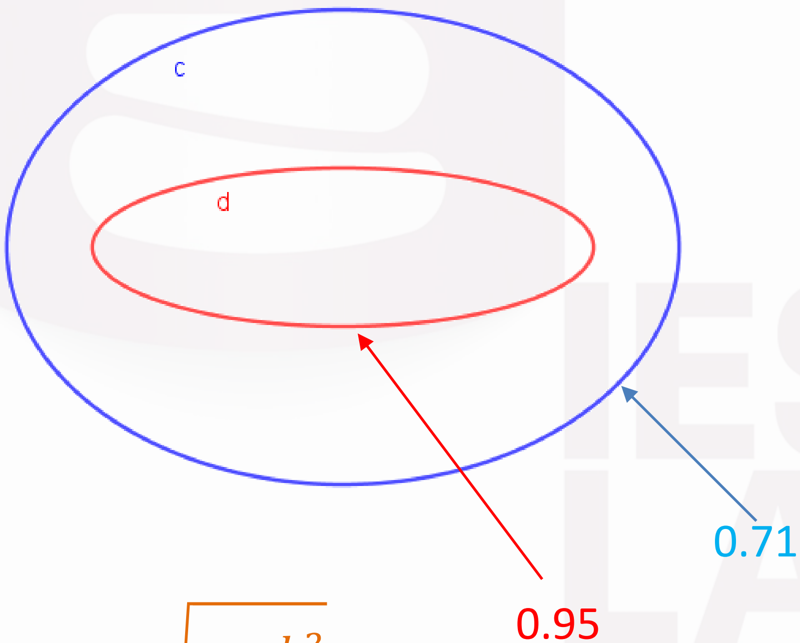
Hipérbola

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

$\varepsilon > 1$

a longitud del semieje real
b longitud del semieje imaginario

Ejemplos



$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$