Lugares geométricos: ejercicios resueltos (1º Bachillerato CC)

1. Hallar la ecuación de una circunferencia que tiene su centro en la recta, $3x - 2y = 5$ y que pasa por los puntos (1,1) y (6, 2)

Solución

Sea el centro de la circunferencia $C = (c_1, c_2)$. Como pertenece a la recta:

$C = \left(c_1, \frac{3c_1-5}{2}\right)$.

Como pasa por los puntos (1,1) y (6, 2), la distancia del centro a cada uno de ellos debe ser la misma, por tanto:

$$\sqrt{(c_1-1)^2 + \left(\frac{3c_1-5}{2} - 1\right)^2} = \sqrt{(c_1-6)^2 + \left(\frac{3c_1-5}{2} - 2\right)^2}$$

Elevando ambos miembros de la ecuación al cuadrado:

$$(c_1-1)^2 + \left(\frac{3c_1-5}{2} - 1\right)^2 = (c_1-6)^2 + \left(\frac{3c_1-5}{2} - 2\right)^2$$

Desarrollando:

$$c_1{}^2 - 2c_1 + 1 + \frac{9c_1{}^2 - 42c_1 + 49}{4} = c_1{}^2 - 12c_1 + 36 + \frac{9c_1{}^2 - 54c_1 + 81}{4}$$

Simplificando:

$$-8c_1 + 4 + 9c_1{}^2 - 42c_1 + 49 = -48c_1 + 144 + 9c_1{}^2 - 54c_1 + 81$$

$$-8c_1 + 4 - 42c_1 + 49 = -48c_1 + 144 - 54c_1 + 81$$

$$-50c_1 + 53 = -102c_1 + 225$$

$$c_1 = \frac{172}{52} = \frac{43}{13}$$

$$c_2 = \frac{3c_1 - 5}{2} = \frac{3 \cdot \frac{43}{13} - 5}{2} = \frac{32}{13}$$

Por tanto, el centro es $C = \left(\frac{43}{13}, \frac{32}{13}\right)$

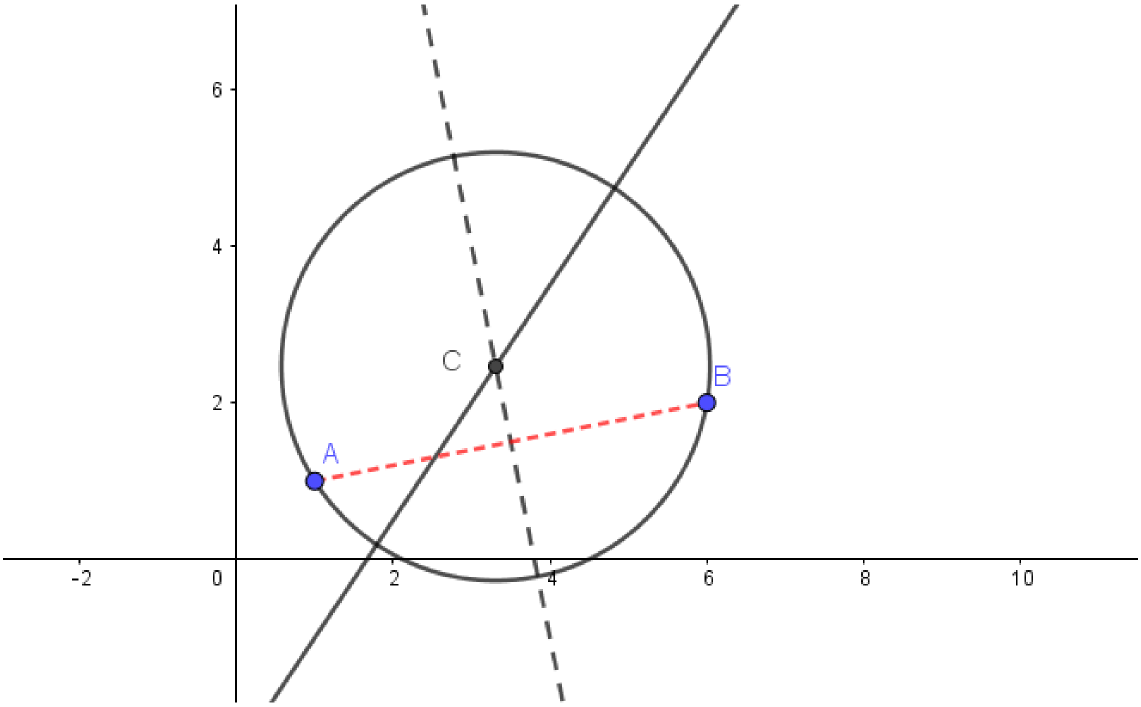
El radio se puede calcular utilizando la distancia del punto C a cualquiera de los puntos dados:

$$r = \sqrt{\left(\frac{43}{13} - 1\right)^2 + \left(\frac{32}{13} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{1261}}{13}$$

Por tanto, la ecuación de la circunferencia queda:

$$\left(x-\frac{43}{13}\right)^2+\left(y-\frac{32}{13}\right)^2=\frac{1261}{169}$$

Nota.- Se puede obtener la misma solución calculando la mediatriz del segmento formado por los dos puntos dados. El centro se encontrará en la intersección de la mediatriz con la recta dada. Posteriormente se puede calcular el radio como la distancia del centro a uno de los puntos.



2. Calcula el radio y el centro de la siguiente circunferencia:

$$3x^2+3y^2+6x-12y-48=0$$

Solución

Vamos a expresar la ecuación de la siguiente forma

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=r^2$$

Dividimos entre 3 toda la expresión:

$x^2+y^2+2x-4y-16=0$

Agrupando en suma de cuadrados:

$(x+1)^2-1+(y-2)^2-4-16=0$

Despejando:
$(x+1)^2+(y-2)^2=21$

$$\left(x-(-1)\right)^2+(y-2)^2=\sqrt{21}^2$$

Por tanto, el centro es $C(-1,2)$ y su radio $r=\sqrt{21}$

3. Calcula la ecuación de la circunferencia de diámetro AB siendo $A(-1,5)\ y\ B(3,-7)$.

Solución

El radio de la circunferencia será la distancia de uno de los puntos al centro y el centro el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

$$C=\left(\frac{-1+3}{2},\frac{5+(-7)}{2}\right)=(1,-1)$$

$$r=\sqrt{(-1-1)^2+(5-(-1))^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}$$

La ecuación queda:

$$(x-1)^2+(y+1)^2=40$$

4. Dados los puntos A(1,3), B(4,4), C(3, 1), hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo que determinan.

Solución

Como los tres puntos pertenecen a la circunferencia podemos sustituir en la ecuación general obteniendo un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas que podremos resolver:

$$\begin{cases}1^2+3^2+A\cdot 1+B\cdot 3+\mathrm{C}=0\\4^2+4^2+A\cdot 4+B\cdot 4+\mathrm{C}=0\\3^2+1^2+A\cdot 3+B\cdot 1+\mathrm{C}=0\end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases}A+3B+\mathrm{C}=-10\\4A+4B+\mathrm{C}=-32\\3A+B+\mathrm{C}=-10\end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos: $A=-\frac{11}{2};B=-\frac{11}{2};C=12$

5. Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente al eje de abscisas en el punto A(6,0) y es tangente a la recta de ecuación $\frac{x}{16}+\frac{3y}{64}=1$

Solución

El centro de la circunferencia buscada se encuentra en la recta x=6, perpendicular al eje de abscisas y que lo corta en A. Este punto, debe tener la misma distancia al eje de abscisas que la distancia a la recta que nos proporcionan.

Sea $C = (6, c)$ el centro de la circunferencia. Podemos poner:

$d(C, A) = d(C, r)$

$d(C, A) = c$

$$d(C, r) = \frac{\left|\frac{6}{16} + \frac{3c}{64} - 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^2 + \left(\frac{3}{64}\right)^2}} = \frac{\left|\frac{3c - 40}{64}\right|}{\frac{5}{64}} = \frac{|3c - 40|}{5}$$

Por tanto:

$$\frac{|3c - 40|}{5} = c \Longrightarrow |3c - 40| = 5c \Longrightarrow \begin{cases} 3c - 40 = 5c \Longrightarrow c = -20 \\ -3c + 40 = 5c \Longrightarrow c = 5 \end{cases}$$

6. Determina la posición relativa que ocupan las circunferencias:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 12x - 16y = 0 \end{cases}$$

Solución

Vamos a expresar las ecuaciones de tal forma que podamos conocer el centro y el radio de las circunferencias:

Primera circunferencia:

$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0 \Longrightarrow \left(x - (-1)\right)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 - 4 = 0$

$\left(x - (-1)\right)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$ Por tanto, el centro es $C_1 = (-1,2)$ y $r_1 = 3$

Segunda circunferencia:

$x^2 + y^2 - 12x - 16y = 0 \Longrightarrow (x - 6)^2 - 36 + (y - 8)^2 - 64 = 0$

$(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 10^2$ Por tanto, el centro es $C_2 = (6,8)$ y $r_2 = 10$

Calculamos la distancia entre los centros de ambas circunferencias:

$d(C_1, C_2) = \sqrt{(-1 - 6)^2 + (2 - 8)^2} = \sqrt{49 + 36} = \sqrt{85}$

Calculamos la suma y diferencia de la longitud de los radios:

$$r_1 + r_2 = 3 + 10 = 13$$
$$r_2 - r_1 = 10 - 3 = 7$$

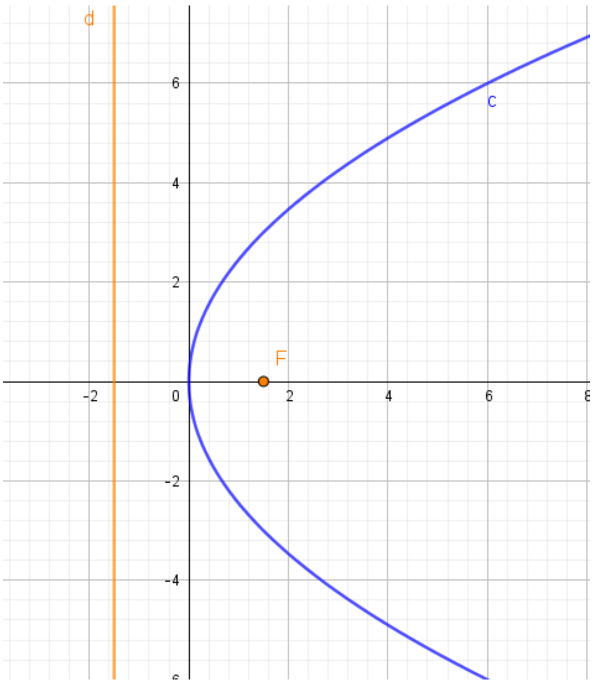
Como $r_2 - r_1 < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$ las circunferencias son secantes (dos puntos de corte).

7. Calcula los elementos principales de la parábola $y^2 = 6x$ y dibuja su gráfica.

Solución

Se trata de una ecuación reducida de la parábola $y^2 = 6x = 2 \cdot 3x$, por tanto, el vértice se encuentra en el origen de coordenadas, y su eje de simetría es el eje de abscisas.

El foco es el punto $F\left(\frac{3}{2}.0\right)$ y la directriz $x = -\frac{3}{2}$



8. Calcula la tangente a la parábola $y^2 = 6x$ en el punto $P(6{,}6)$. (la tangente es la bisectriz del ángulo que forman el radiovector PF y la recta perpendicular por P a la directriz).

Solución

Se trata de una ecuación reducida de la parábola $y^2 = 6x = 2 \cdot 3x$, por tanto, el vértice se encuentra en el origen de coordenadas, y su eje de simetría es el eje de abscisas.

El foco es el punto $F\left(\frac{3}{2}.0\right)$ y la directriz $x = -\frac{3}{2}$

Calculemos la recta que pasa por los puntos P y F.

$$\frac{x-6}{6-\frac{3}{2}} = \frac{y-6}{6} \Rightarrow 4x - 3y - 6 = 0$$

La recta perpendicular a la directriz que pasa por P es $y = 6 \Rightarrow y - 6 = 0$

Para calcular la bisectriz tomaremos un punto genérico $R(\mathrm{x,y})$ perteneciente a la bisectriz. Éste verifica que la distancia a ambas rectas es la misma, por tanto:

$$\frac{|4x - 3y - 6|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|y - 6|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \Rightarrow \frac{|4x - 3y - 6|}{5} = \frac{|y - 6|}{1}$$

Existen dos soluciones que vienen dadas por:

$$4x - 3y - 6 = 5(y - 6) \Rightarrow 4x - 8y + 24 = 0$$

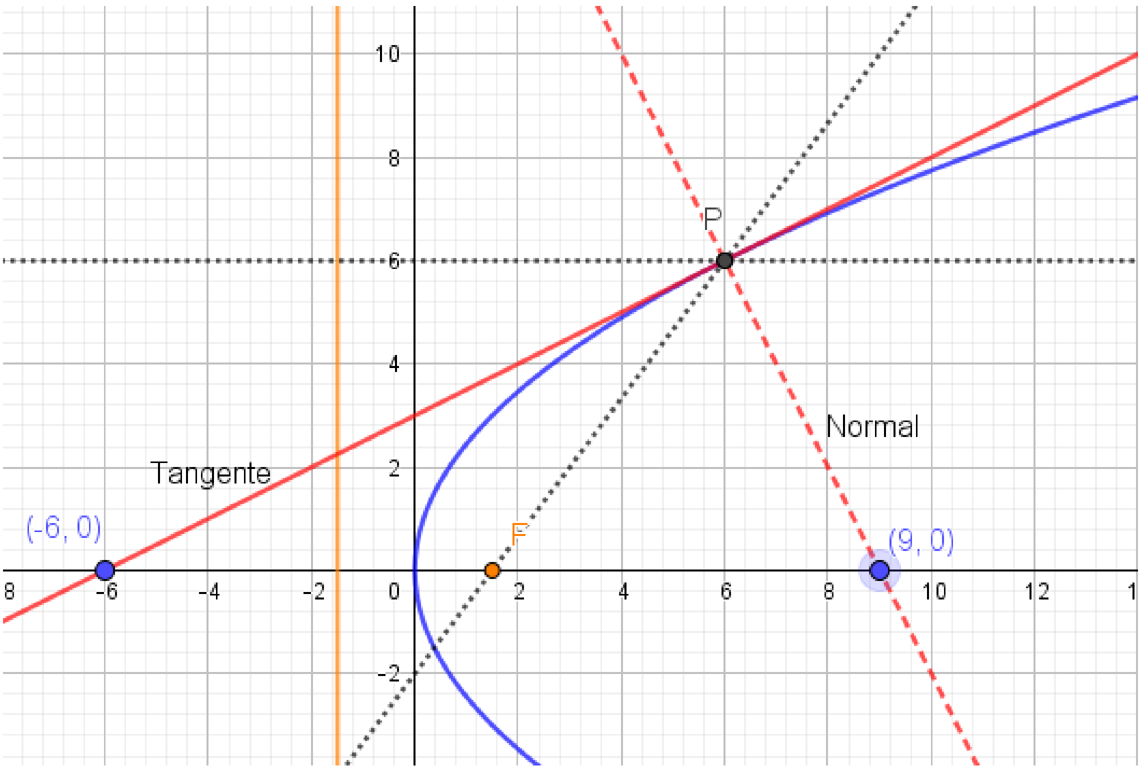
$$4x - 3y - 6 = -5(y - 6) \Rightarrow 4x + 2y - 36 = 0$$

Para decidir cuál de éstas rectas es la tangente calculamos el punto de corte de ambas rectas con el eje de abscisas. Si el punto de corte no queda "encerrado" por la parábola, dicha recta se corresponderá con la tangente.

$$Para\ y = 0;\ 4x - 8 \cdot 0 + 24 = 0 \ \Rightarrow x = -6$$

$$Para\ y = 0;\ 4x + 2 \cdot 0 - 36 = 0 \Rightarrow x = 9$$

Por tanto, la tangente es $4x - 8 \cdot 0 + 24 = 0$



9. Calcular el vértice, el foco, el eje y la directriz de la parábola:

$y^2 - 4y - 8x + 36 = 0$

Solución

Expresemos la ecuación agrupando las variables como el cuadrado de una diferencia en la variable y:

$$y^2 - 4y - 8x + 36 = 0 \Rightarrow (y-2)^2 - 4 - 8x + 36 = 0 \Rightarrow (y-2)^2 = 8(x-4)$$

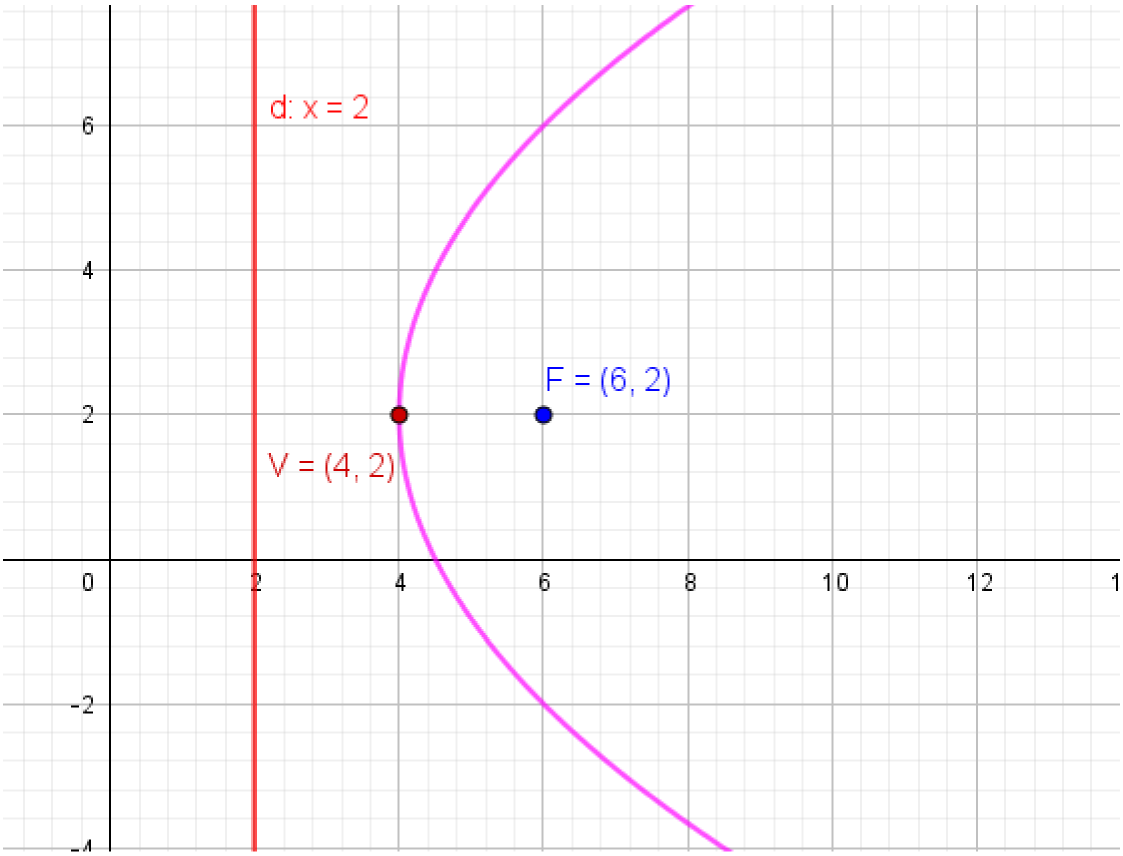
Por tanto, el vértice es $V(4,2)$.

Para calcular el foco necesitamos: $2p = 8 \;\Rightarrow p = 4 \;\Rightarrow d = \frac{p}{2} = 2$

El foco es $F = V\left(v_1 + \frac{p}{2}, v_2\right)(4+2,2) = (6,2)$

La directriz es paralela al eje OY y dista del vértice $\frac{p}{2}$ unidades:

$$d \equiv x = v_1 - \frac{p}{2} = 4 - 2 = 2$$



10. Calcula el valor de ***k*** para que la recta $y = 2x + k$ sea tangente a la parábola $y = 2x^2 - 1$.

Solución

Un punto genérico de la parábola es $P(x, 2x^2-1)$, si la recta es tangente en es punto a la parábola debe verificar la ecuación de la recta:

$$2x^2-1=2x+k$$

Transponiendo términos:

$$2x^2-2x+(-1-k)=0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$x=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 2\cdot(-1-k)}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{12+8k}}{4}$$

Puesto que la recta debe ser tangente, esta ecuación no puede tener más que una solución, por tanto, el discriminante debe ser cero:

$$12+8k=0 \Rightarrow k=-\frac{12}{8}=-\frac{3}{2}$$

11. Calcula la ecuación de la elipse formada por los puntos cuya suma de distancias a $F(1,-1)$ y $F'(7,1)$ es igual a 10.

Solución

Sea $P(x,y)$ un punto genérico de la elipse. Debe verificarse:

$$d(P,F)=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$$

$$d(P,F')=\sqrt{(x-7)^2+(y-1)^2}$$

$$d(P,F)+d(P,F')=10 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-7)^2+(y-1)^2}=10$$

Despejando:

$$(x-1)^2+(y+1)^2=100+(x-7)^2+(y-1)^2-20\sqrt{(x-7)^2+(y-1)^2}$$

$$\frac{-(x-1)^2-(y+1)^2+100+(x-7)^2+(y-1)^2}{20}=\sqrt{(x-7)^2+(y-1)^2}$$

$$\frac{-3x-y+37}{5}=\sqrt{(x-7)^2+(y-1)^2}$$

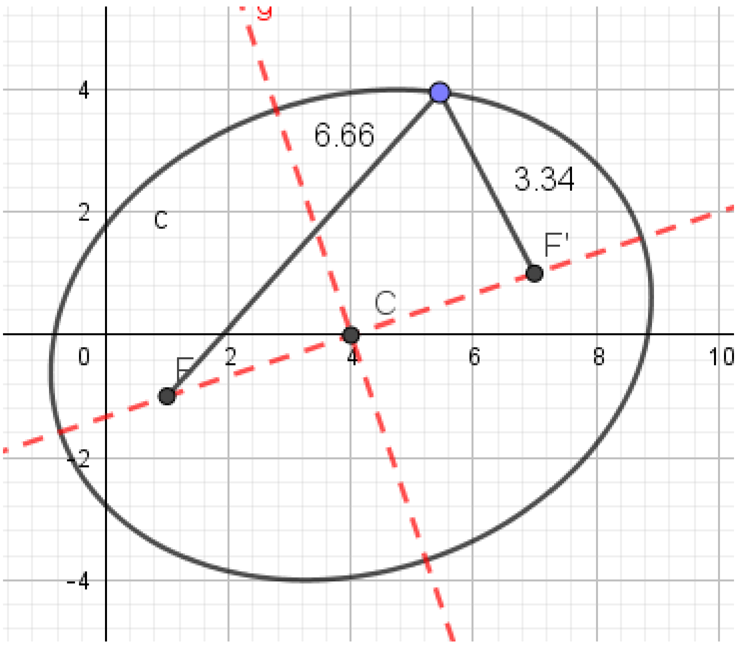
$$\left(\frac{-3x-y+37}{5}\right)^2=(x-7)^2+(y-1)^2$$

$$\frac{9x^2+y^2+6xy-222x-74y+1369}{25}=x^2+y^2-14x-2y+50$$

$$9x^2 + y^2 + 6xy - 222x - 74y + 1369 = 25x^2 + 25y^2 - 350x - 50y + 1250$$

Ecuación de la elipse:

$$16x^2 + 24y^2 - 6xy - 128x + 24y - 119 = 0$$



12.Encuentra los elementos principales de la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$. Realiza una representación gráfica.

Solución

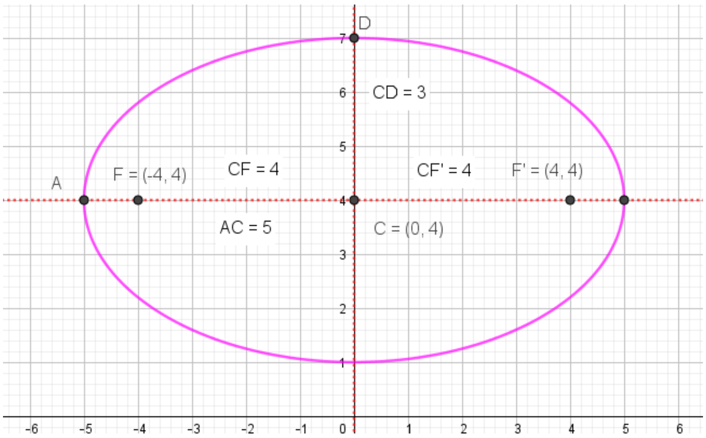
El centro de la elipse es $C(0,4)$

Longitud el semieje mayor: 5

Longitud del semieje menor: 3

Semidistancia focal: $\sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$

Los focos son: $F(-4,4)\ y\ F'(4,4)$



13. Calcula la ecuación reducida de la elipse cuya distancia focal es 16 y cuyo semieje mayor tiene longitud 10.

Solución

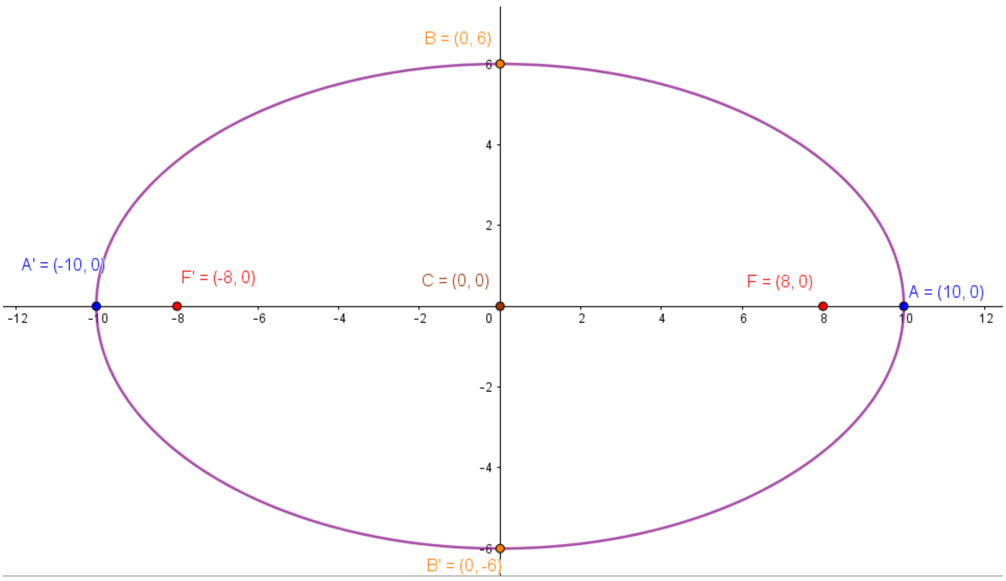
El centro de la elipse es $C(0,0)$, pues nos piden la ecuación reducida. Al ser la distancia focal 16 los focos son los puntos $F(8,0)\ y\ F'(-8,0)$.

En una elipse siempre se cumple que $a^2 = b^2 + c^2$, donde a es el semieje mayor, b es el semieje menor y c la semidistancia focal, por tanto:

$$10^2 = b^2 + 8^2 \implies 100 = b^2 + 64 \implies b = \sqrt{36} = 6$$

Por tanto, el semieje menor tiene una longitud de 9. Por tanto, la ecuación reducida es:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$



14. Calcula la ecuación de la tangente a la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ en el punto de abscisa 5.

Solución

La ordenada en x=5 es 0, por tanto buscamos la tangente en el punto $P(5,0)$.

Como el punto pertenece al eje mayor, la recta tangente debe ser perpendicular al eje, por tanto, la recta buscada es x=5.

15. Calcula la ecuación de la elipse cuya suma de distancias a $F(8,0)\ y\ F'(-8,0)$ vale 20.

Solución

La semidistancia focal es 16 y el semieje mayor vale 10. En una elipse siempre se cumple que $a^2=b^2+c^2$, donde a es el semieje mayor, b es el semieje menor y c la semidistancia focal, por tanto:

$$10^2=b^2+8^2 \implies 100=b^2+64 \implies b=\sqrt{36}=6$$

Por tanto, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$$

16. Halla la ecuación de la elipse que pasa por el punto $P\left(6,\frac{64}{10}\right)$ y cuyos semiejes mayor y menor son proporcionales, respectivamente a 5 y 4.

Solución

La ecuación de la elipse se puede expresar como:

$$\frac{x^2}{25n^2}+\frac{y^2}{16n^2}=1$$

Al pertenecer el punto P a la elipse:

$$\frac{6^2}{25n^2}+\frac{\left(\frac{64}{10}\right)^2}{16n^2}=1 \implies n^2=\frac{6^2}{25}+\frac{\left(\frac{64}{10}\right)^2}{16}=4 \implies n=2$$

Por tanto, la ecuación es:

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$$

17.Calcula la ecuación de la elipse cuyo centro es $C(2,1)$, uno de los vértices $A(7,1)$ y la excentricidad $\varepsilon = \frac{3}{5}$.

Solución

La excentricidad de la elipse es $\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{3}{5}$, el semieje mayor vale 5 (distancia entre uno de los vértices y el centro de la elipse).

$$\sqrt{1 - \frac{b^2}{5^2}} = \frac{3}{5} \Longrightarrow \sqrt{25 - b^2} = 3 \Longrightarrow 25 - b^2 = 9 \Longrightarrow b = 4$$

Por tanto, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

18.Calcula los elementos principales de la hipérbola $4x^2 - 9y^2 = 36$.

Solución

Transformando la ecuación (dividiendo por 36 y simplificando):

$$\frac{4x^2}{36} - \frac{9y^2}{36} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Por tanto:

El semieje real (a) vale 3

El semieje imaginario (b) vale 2

La semidistancia focal (c) puede calcularse gracias al teorema de Pitágoras y su relación con los semiejes real (a) e imaginario (b):

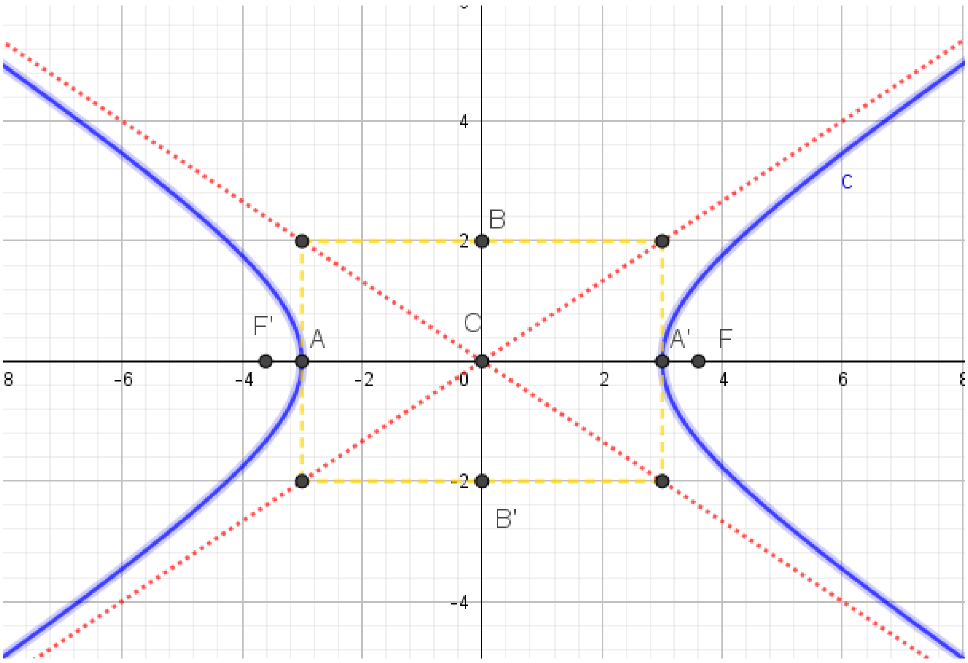
$$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow c^2 = 3^2 + 2^2 \Longrightarrow c = \sqrt{13}$$

El centro es $C(0,0)$

Los focos son $F\left(\sqrt{13}, 0\right)\, y\, F'\left(-\sqrt{13}, 0\right)$

Los vértices son $A(3,0)\,, A'(-3,0), B(0,2)\, y\, B'(0,-2)$

Las asíntotas: $y = \frac{2}{3}x\,;\; y = -\frac{2}{3}x$



19.Calcula la ecuación reducida de la hipérbola pasa por $V(2{,}0)$ y una de sus asíntotas es $y = \frac{1}{2}x$.

Solución

Como la pendiente de la asíntota es $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$, es decir, el semieje real es dos veces el semieje imaginario.

El centro es $C(0{,}0)$, por tanto, podemos expresar la ecuación de la hipérbola: $\frac{x^2}{(2b)^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Puesto que $V(2{,}0)$ pertenece a la hipérbola:

$$\frac{2^2}{(2b)^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1 \implies \frac{4}{4b^2} = 1 \implies b = 1 \; y \; a = 2$$

La ecuación reducida de la parábola es: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$

20.Calcula los vértices, los focos, las asíntotas y la excentricidad de $-\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{144} = 1$

Solución

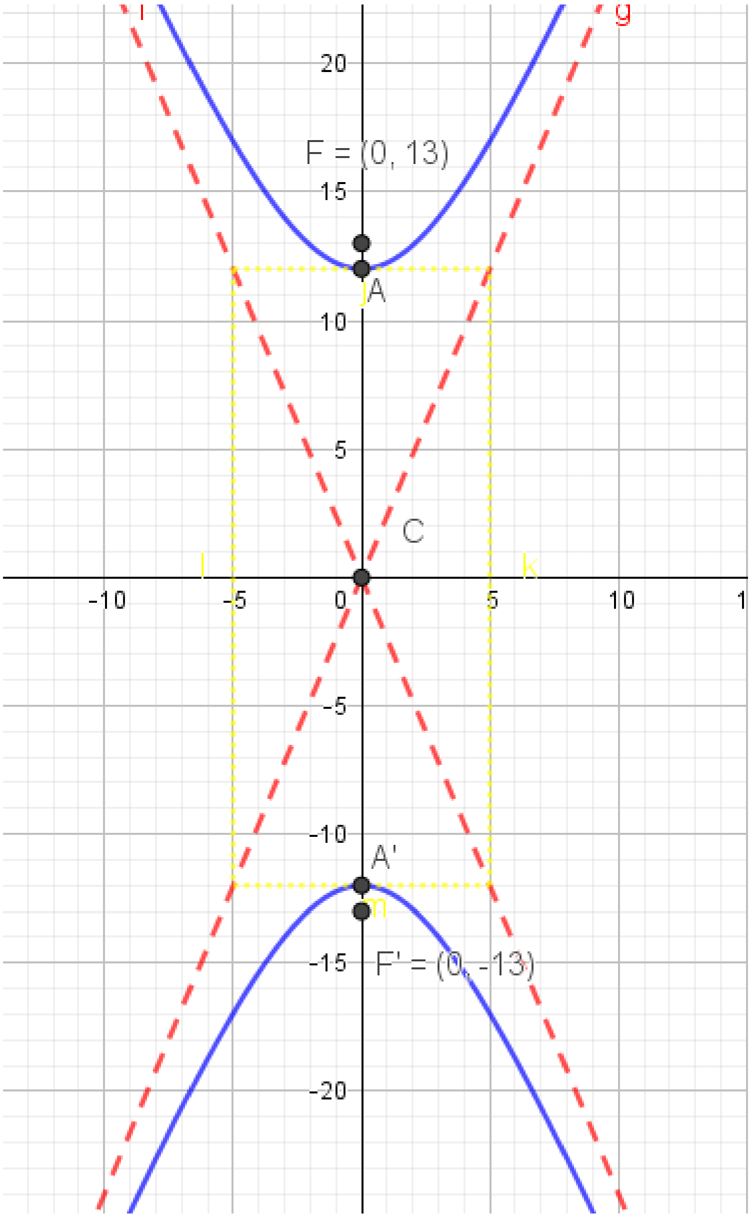
En este caso el eje focal se encuentra situado en el eje de ordenadas.

Podemos expresar esta ecuación como $-\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1$, por tanto,

$$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow c^2 = 5^2 + 12^2 \Longrightarrow c = \sqrt{169} = 13$$

Por tanto, los focos son $F(0,13)\ y\ F'(0,-13)$, el centro es el punto $C(0,0)$.
Los vértices de la hipérbola son: $B(5,0), B'(-5,0)$ y $A(0,12) y\ A'(0,-12)$.

Las asíntotas son $y = \frac{12}{5}x$; $y = -\frac{12}{5}x$.



21. Calcula el parámetro ***m*** para que la recta $y = x + m$ sea tangente a la hipérbola $x^2 - 2y^2 = 4$.

Solución

Podemos caracterizar un punto de la recta como $P(p, p + m)$.
Sustituyendo en la ecuación de la hipérbola:

$$p^2 - 2(p+m)^2 = 4 \implies p^2 - 2p^2 - 2m^2 - 4pm = 4 \Longrightarrow -p^2 - 4pm - 2m^2 - 4 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado en p, el discriminante de la ecuación quedará:

$$(-4m)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2m^2 - 4)$$

Igualando a cero (nos piden que la recta sea tangente, por tanto, el discriminante debe ser igual a 0):

$$(-4m)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2m^2 - 4) = 0\,;16m^2 - 8m^2 - 16 = 0\,;\ 8m^2 - 16 = 0$$

Por tanto, las rectas son: $y = x + \sqrt{2}\,;\ y = x - \sqrt{2}$