Números complejos

Definiciones

La unidad imaginaria, que designaremos por ***i***, es el número $\sqrt{-1}$

El conjunto de los número complejos $\mathbb{C}$ se define por:

$$\mathbb{C} = \{a + bi / a , b \in \mathbb{R}\}$$

En un número complejo se distingue una parte real y una parte imaginaria.

Con los números complejos se pueden expresar soluciones de ecuaciones en el conjunto de los números complejos que no tienen solución en el conjunto de los números reales.

Dos números complejos son iguales si tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria.

Ejemplos

El número complejo ***2-3i*** tiene como parte real ***2*** y como parte imaginaria -***3***.

El número complejo ***4i*** sólo tiene parte imaginaria y vale ***4.***

El conjunto de los números reales está incluido en el conjunto de los números enteros: son aquellos cuya parte imaginaria es nula.

La ecuación $x^2 + 9 = 0$ tiene solución en el conjunto de los números complejos:

$$x^2 = -9\,;\; x = \pm\sqrt{-9} = \pm 3\sqrt{-1} = \pm 3i$$

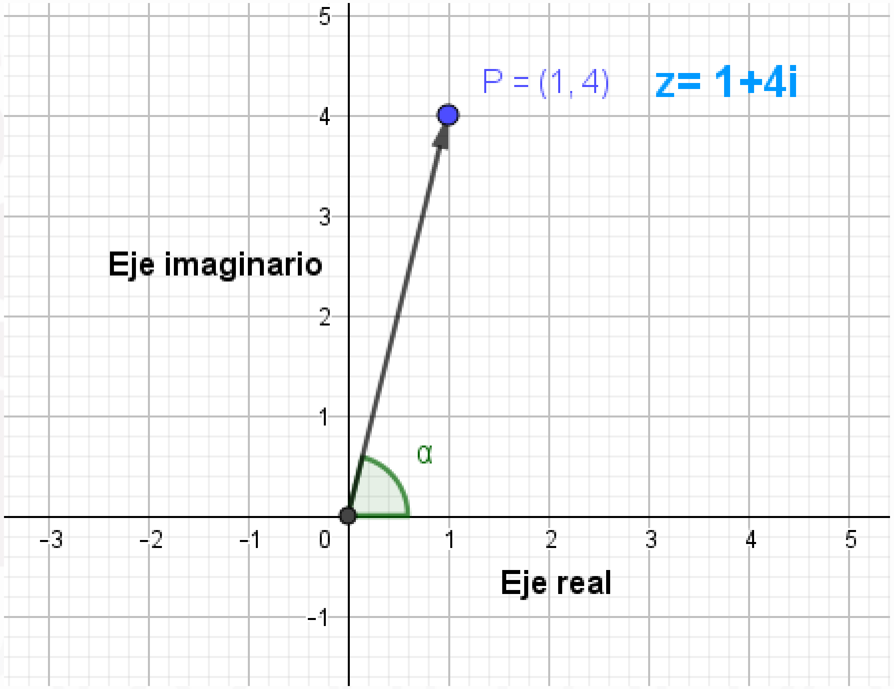
Forma binómica

A la expresión del tipo **z = a + bi** se le denomina **forma binómica** de un número complejo.

Al valor **a** se le denomina **parte real** y se expresará como **a = Re(z)**

Al valor **b** se le denomina **parte imaginaria** y se expresará como **b = Im(z)**

Sobre el plano euclídeo se puede **representar** un número complejo, el eje de abscisas (eje real) se representará la parte real y en el eje de ordenadas (eje imaginario) se representará la parte imaginaria. Todo número complejo queda asociado con un punto del plano denominado **afijo** siendo su vector de posición $\overrightarrow{OP}$**.**



Opuesto, conjugado y módulo

El conjugado de un número complejo es otro número complejo con igual parte real y con su parte imaginaria opuesta. Se representa por $\bar{z}$

$$z = a + bi \text{ su conjugado es } \bar{z} = a - bi$$

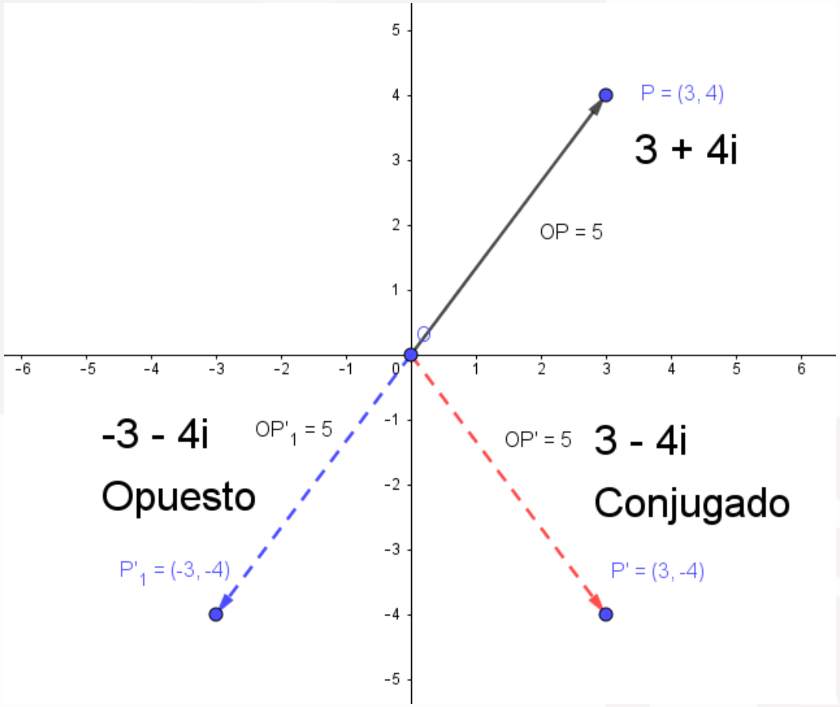
El opuesto de un número complejo la parte real opuesta y la parte imaginaria opuesta. Se representa por $-\mathrm{z}$

$$\mathrm{z = a + bi \text{ su opuesto es } -z = a - bi}$$

El módulo de un número complejo es el módulo del vector de posición de su afijo. Se representa por $|z|$

$$\mathrm{z = a + bi \text{ el }} módulo\ es\ \ |\mathrm{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejemplos



$z = -3 + 2i$

El conjugado es: $\bar{z} = -3 - 2i$

El opuesto es: $-z = 3 + 2i$

El módulo es: $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

$z = 1 - 2i$

El conjugado es: $\bar{z} = 1 + 2i$

El opuesto es: $-z = -1 + 2i$

El módulo es: $|z| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

$z = -3i$

El conjugado es: $\bar{z} = 3i$

El opuesto es: $-z = 3i$

El módulo es: $|z| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3$

NÚMEROS COMPLEJOS: OPERACIONES

Suma de números complejos

La suma de dos número complejos es otro número complejo cuya parte real es la suma de las partes reales de los sumandos y la parte imaginaria es la suma de las partes imaganinarias de los sumandos. Para restar, sumaremos el opuesto del sustraendo.

Ejemplos

$z_1 = -3 + 2i \quad z_2 = 1 + i$

$\boldsymbol{z_1} + \boldsymbol{z_2} = -3 + 2i + 1 + i = -2 + 3i$

$z_1 = -3 + 2i \quad z_2 = 1 + i$

$\boldsymbol{z_1} - \boldsymbol{z_2} = -3 + 2i - 1 - i = -4 + i$

$z_1 = 4 - 2i \quad z_2 = -1 + 2i$

$\boldsymbol{z_1} + \boldsymbol{z_2} = 4 - 2i + (-1) + 2i = 3$

$z_1 = 4 - 2i \quad z_2 = -1 + 2i$

$\boldsymbol{z_1} - \boldsymbol{z_2} = 4 - 2i + 1 - 2i = 5 - 4i$

Producto de números complejos

El producto de dos números complejos es otro número complejo que se obtiene aplicando la propiedad distributiva y teniendo en cuenta que $\boldsymbol{i^2 = -1}$.

Ejemplos

$\boldsymbol{z_1} = -3 + 2i \quad \boldsymbol{z_2} = 1 + i$

$\boldsymbol{z_1} \cdot \boldsymbol{z_2} = (-3 + 2i) \cdot (1 + i) = -3 - 3i + 2i + 2i^2 = -5 - i$

$\boldsymbol{z_1} = 4 - 2i \quad \boldsymbol{z_2} = -1 + 2i$

$\boldsymbol{z_1} \cdot \boldsymbol{z_2} = (4 - 2i) \cdot (-1 + 2i) = -4 + 8\mathrm{i} + 2\mathrm{i} - 4i^2 = 10i$

Inverso de un número complejo

Todo número complejo distinto de cero tiene inverso, esto es, un número complejo que multiplicado por el primero da como resultado 1.

Para calcular el inverso de un número complejo basta con realizar los siguientes cálculos: $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Ejemplos

$z = 3 - 2i$ $\quad z^{-1} = \frac{1}{3-2i} = \frac{1}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{3+2i}{13} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$

$z = 1 + \sqrt{3}i$ $\quad z^{-1} = \frac{1}{1+\sqrt{3}i} = \frac{1}{1+\sqrt{3}i} \cdot \frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{1-\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$

División de números complejos

Para dividir dos números complejos basta con calcular el inverso del divisor y multiplicarlo por el dividendo.

Ejemplo

$\boldsymbol{z_1} = -3 + 2i \quad \boldsymbol{z_2} = 1 + i$

$$\boldsymbol{z_2^{-1}} = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i$$

$$\frac{\boldsymbol{z_1}}{\boldsymbol{z_2}} = \boldsymbol{z_1} \cdot \boldsymbol{z_2^{-1}} = (\boldsymbol{-3 + 2i}) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\right) = -\frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{2} i + i = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} i$$

Propiedades del conjugado

$$\boldsymbol{z = 3 - 2i\ ;\ \bar{z} = 3 + 2i}$$

$z + \bar{z} = 2Re(z)$	$z + \bar{z} = 3 - 2i + 3 + 2i = 6$
$z - \bar{z} = 2Im(z)i$	$z - \bar{z} = 3 - 2i - 3 - 2i = -4i$
$z \cdot \bar{z} = \lvert z\rvert^2$	$z \cdot \bar{z} = (3 - 2i)(3 + 2i) = 9 + 6i - 6i - 4i^2 = 9 + 4 = 13$

$$\boldsymbol{z_1 = 3 - 2i\ ;\ \overline{z_1} = 3 + 2i; z_2 = 1 + i + \overline{z_2} = 1 - i}$$

$\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$	$\overline{z_1} + \overline{z_2} = 3 + 2\mathrm{i} + 1 - \mathrm{i} = 4 + \mathrm{i}$ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(3 - 2i) + (1 + i)} = \overline{4 - i} = 4 + i$
$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2}$	$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (3 + 2\mathrm{i})(1 - \mathrm{i}) = 5 - \mathrm{i}$ $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(3 - 2i) \cdot (1 + i)} = \overline{5 + i} = 5 - i$

Potencias de ***i***

Los únicos valores que puede tomar una potencia de ***i*** son *1, -1, i* y *–i*.

$$\boldsymbol{i = \sqrt{-1}}$$

$$\boldsymbol{i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1}$$

$$\boldsymbol{i^3 = \left(\sqrt{-1}\right)^3 = \sqrt{-1}\cdot\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -\sqrt{-1} = -i}$$

$$\boldsymbol{i^4 = \left(\sqrt{-1}\right)^4 = \left(\sqrt{-1}\right)^2\cdot\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1\cdot(-1) = 1}$$

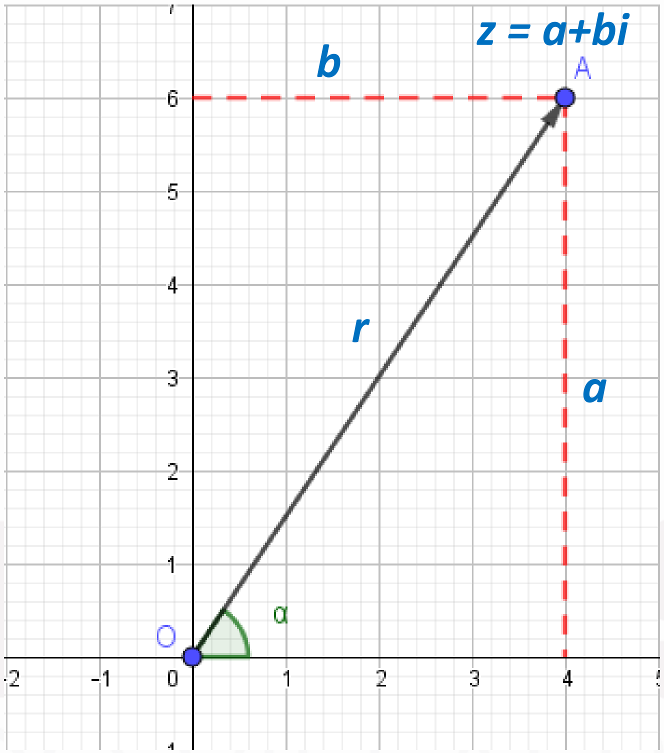
$$\boldsymbol{i^{11} = i^{4\cdot 2+3} = \left(i^4\right)^2\cdot i^3 = (1)^2\cdot\left(-\sqrt{-1}\right) = -i}$$

$$\boldsymbol{i^{21} = i^{4\cdot 5+1} = \left(i^4\right)^5\cdot i = (1)^5\cdot i = i}$$

NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR

Argumento de un número complejo

Al ángulo que forma el vector de posición del afijo de un número complejo con el semieje positivo de abscisas se le llama argumento de un número complejo.



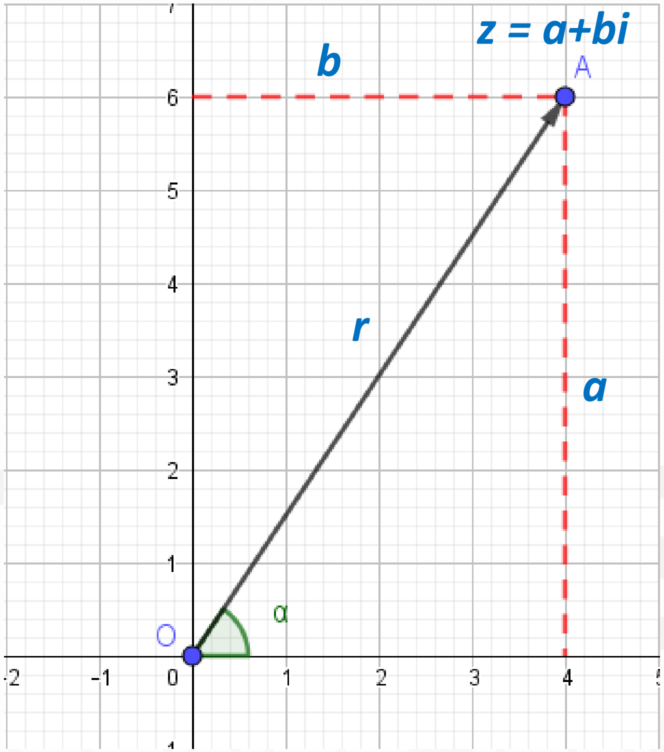
La expresión $\alpha = arctg\,\frac{b}{a}$ no identifica un único argumento. Si restringimos el valor a $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ hay dos ángulos que difieren en 180º y que tienen la misma tangente, pero queda esta vez identificado de forma univoca por los signos de a y b, siendo este ángulo el **argumento principal** del número complejo.

Forma polar de un número complejo

Un número complejo se encuentra en notación polar cuando se expresa en función de su módulo y argumento.

$$z = r_\alpha$$

La relación entre la notación polar y binómica se puede establecer debido a las siguientes relaciones.



$$a = r \cdot cos\alpha$$

$$b = r \cdot sen\alpha$$

$$z = a + bi = r \cdot (\cos\alpha \ + \ i \cdot sen\ \alpha\,)$$

Ejemplos

El número **z = *i*** se puede expresar como:

$$\mathbf{|z| = 1; \alpha = 90^o; z = 1_{90^o}}$$

El número $\mathbf{z = 2_{315^o}}$ se puede expresar como:

$$\mathbf{z = 2(cos\ 315^o + i \cdot sen315^o) = 2(cos\ 45^o - i \cdot sen45^o) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)}$$

$$\mathbf{= \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot i}$$

El número $\mathbf{z = -2\sqrt{3} + 2i}$ se puede expresar como:

$$|z| = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$\alpha = arctg \frac{2}{-2\sqrt{3}} = arctg - \frac{\sqrt{3}}{3} = 150^o$$ (se encuentra en el segundo cuadrante)

$$z = 4_{150^o}$$

Producto en forma polar

El producto de dos números complejos en forma polar es otro número complejo que tiene por módulo el producto de los módulos y por argumento principal la suma de los argumentos.

$$r_\alpha \cdot s_\beta = (r \cdot s)_{\alpha+\beta}$$

Demostración

$$\begin{aligned} r_\alpha \cdot s_\beta &= r(\cos\alpha + i \cdot sen\alpha) \cdot s(\cos\beta + i \cdot sen\beta) \\ &= r \cdot s \cdot \big((\cos\alpha \cdot \cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta) + i \cdot (sen\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot sen\beta)\big) \\ &= r \cdot s\big(\cos(\alpha+\beta) + i \cdot sen\,(\alpha+\beta)\big) = (r \cdot s)_{\alpha+\beta} \end{aligned}$$

División y potencia en forma polar

Para calcular el cociente de dos números complejos en forma polar aplicaremos la siguiente fórmula: $\boldsymbol{\frac{r_\alpha}{s_\beta} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\alpha-\beta}; s \neq 0}$

Demostración

$Buscamos\ un\ número\ complejo\ x_y\ tal\ que\ \boldsymbol{\frac{r_\alpha}{s_\beta}} = x_y\ , es\ decir, \boldsymbol{s_\beta} \cdot x_y = \boldsymbol{r_\alpha},$

$utilizando\ la\ fórmula\ del\ producto:\ (s \cdot x)_{\beta+y} = r_\alpha;$

$Por\ tanto: s \cdot x = r\ \ y\ \ \beta + y = \alpha, es\ decir, x = \frac{r}{s}\ e\ \ y = \alpha - \beta$

Para calcular la potencia de un número complejo en forma polar basta con aplicar el producto sucesivo del mismo, resultando la siguiente fórmula: $\boldsymbol{(r_\alpha)^n = r^n_{n\cdot\alpha}}$

Potencia en forma polar

La potencia n-ésima de un número complejo en forma polar es otro número complejo, tal que:

Su módulo es la potencia n-ésima del módulo del número dado

Su argumento es n veces el argumento del número dado.

$$\boldsymbol{(r_\alpha)^n = r^n_{n\cdot\alpha}}$$

La fórmula de De Moivre es precisamente la expresión anterior expresada mediante razones trigonométricas:

$$\boldsymbol{z^n = (r_\alpha)^n = r^n_{n\cdot\alpha} = r^n(\cos n \propto + i \cdot \mathrm{sen}\, n \propto)}$$

Raíz en forma polar

Para calcular la raíz n-ésima de un número complejo en forma polar basta con aplicar la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{\sqrt[n]{r_{\propto}} = \sqrt[n]{r}_{\frac{\propto+2k\pi}{n}}, \forall k \in \{0, 1, 2 \ldots n-1\}}$$

La anterior fórmula indica que un número complejo tiene n raíces complejas. Cada una de ellas situada en el vértice de un polígono regular inscrito en una circunferencia de radio $\boldsymbol{\sqrt[n]{r}}$.

Demostración

$$Buscamos\ un\ número\ complejo\ tal\ que \sqrt[n]{r_{\propto}} = x_y, es\ decir, \left(x_y\right)^n = r_{\propto}, por\ tanto,$$

$$x^n = r, es\ decir, x = \sqrt[n]{r}\ y\ además, n \cdot y = \propto +2k\pi, de\ donde, y = \frac{\propto +2k\pi}{n}$$