Cálculo vectorial en el plano

El conjunto $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

- El conjunto formado por todos los pares ordenados de números reales se notará como $\mathbb{R}^2$
- Un elemento de este conjunto lo designaremos por (x,y), donde ***x*** es la primera componente e ***y*** es la segunda componente.
- Dos pares son iguales si las componentes, en el orden correspondiente, son iguales.

Ejemplos

$(2,3), \left(\frac{1}{2}, -3\right), (\sqrt{3}, -34), (1, \pi)$ son pares ordenados de números reales

Suma en $\mathbb{R}^2$

Definición:

Si (a,b) y $(a',b') \in \mathbb{R}^2$ $(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$

La suma es una operación interna: la suma de dos pares es otro par.

Propiedades

Asociativa

$$(a,b) + \big((a',b') + (a'',b'')\big) = \big((a,b) + (a',b')\big) + (a'',b'')$$

Elemento neutro

$$Existe\ el\ \ par\ (0{,}0)\ tal\ \ que\ (a,b) + (0{,}0) = (0{,}0) + (a,b)$$

Elemento opuesto

$$Para\ todo\ (a,b), existe\ (-a,-b), tal\ que, (a,b) + (-a,-b) = (0{,}0)$$

Conmutativa

$$Para\ cualuqiera\ dos\ pares\ (a,b) + (a',b') = (a',b') + (a,b\ )$$

Producto de un número real por un elemento de $\mathbb{R}^2$

Definición:

Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ y $k \in \mathbb{R}$ $k \cdot (a, b) = (k \cdot a, k \cdot b)$

El producto no es una operación interna.

Propiedades

$$k \cdot \big((a, b) + (a', b')\big) = k \cdot (a, b) + k \cdot (a', b')$$

$$(k + l) \cdot (a, b) = k \cdot (a, b) + l \cdot (a, b)$$

$$(k \cdot l) \cdot (a, b) = k \cdot \big(l \cdot (a, b)\big)$$

$$1 \cdot (a, b) = (a, b)$$

El conjunto $\mathbb{R}^2$ con las dos operaciones definidas (suma y producto de un escalar) tiene estructura de Espacio Vectorial. A los elementos se les denomina vectores

Ejemplo

Operaciones en $\mathbb{R}^2$

$$3\cdot(2,4)-3\cdot(-1,\ 4)=(6,12)\ -(-3,12)=(9,0)$$

$$\frac{2}{3}\cdot(1,0)-\left(2\cdot(3,5)+\ (-2)(-1,2)\right)=\left(\frac{2}{3},0\right)\ -\left((6,10)+\ (2,-4)\right)=$$

$$=\left(\frac{2}{3},0\right)\ -(8,6)=\left(\frac{2}{3}-8,-6\right)=\left(-\frac{22}{3},-6\right)$$

Combinación lineal

Definición:

Una **combinación lineal** es una expresión válida en la que se combina la suma de vectores y el producto por un escalar.

El resultado de una combinación lineal es otro vector.

Se dice que un vector es combinación lineal de otros, si es posible obtenerlo mediante una combinación lineal de éstos.

Ejemplo

El vector (9, 0) es combinación lineal de los vectores (1, -4) y (2, 4)

$$\mathbf{3 \cdot (2, 4) + 3 \cdot (1, -4) = (6, 12) + (3, -12) = (9, 0)}$$

Vectores linealmente independientes

Definición:

Un conjunto de vectores es linealmente independiente cuando ninguno de ellos se puede obtener como combinación lineal del resto.

Cuando un conjunto de vectores no es linealmente independientes, se dice que son dependientes.

Ejemplo

Los vectores $\{(\mathbf{2},\mathbf{4}),(\mathbf{1},-\mathbf{4}),(\mathbf{9},\mathbf{0})\}$ son linealmente dependientes, pues:

$$\mathbf{3}\cdot(\mathbf{2},\mathbf{4})+\mathbf{3}\cdot(\mathbf{1},-\mathbf{4})=(\mathbf{6},\mathbf{12})+(\mathbf{3},-\mathbf{12})=(\mathbf{9},\mathbf{0})$$

Ejemplo

¿Son linealmente independientes los vectores $\{(\mathbf{1},\mathbf{1}),(\mathbf{2},\mathbf{3}),(\mathbf{5},\mathbf{7})\}$?

Vamos a intentar ver si el vector (1,1) es combinación lineal del resto, para lo cual vamos a buscar números *k* y *l* tales que:

$\mathbf{(1,1)=}\boldsymbol{k}\mathbf{(2,3)+}\boldsymbol{l}\mathbf{(5,7)}$ **operando** $\mathbf{(1,1)=(2}\boldsymbol{k}\mathbf{,3}\boldsymbol{k}\mathbf{)+(5}\boldsymbol{l}\mathbf{,7}\boldsymbol{l}\mathbf{);}$
$\mathbf{(1,1)=(2}\boldsymbol{k}\mathbf{+5}\boldsymbol{l}\mathbf{,3}\boldsymbol{k}\mathbf{+7}\boldsymbol{l}\mathbf{)}$

Podemos plantear un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$\begin{cases} 2k+5l=1 \\ 3k+7l=1 \end{cases}$**;** **la solución es l = 1 y k = -2. Por tanto, al existir una combinación lineal dos vectores que proporcionan el otro vector, se trata de un conjunto de vectores linealmente dependientes.**

Base de $\mathbb{R}^2$

Definición:

Una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ está formada por dos vectores linealmente independientes.

Cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ se puede expresar como combinación lineal de dos vectores linealmente independientes.

La base mas sencilla del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ es la formada por los vectores $\{(\mathbf{1},\mathbf{0}),(\mathbf{0},\mathbf{1})\}$. A esta base se la denomina base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo

¿Forman una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$los vectores $\{(\mathbf{1},\mathbf{1}),(\mathbf{1},\mathbf{2})\}$?

Vamos a comprobar que los vectores son linealmente independientes:

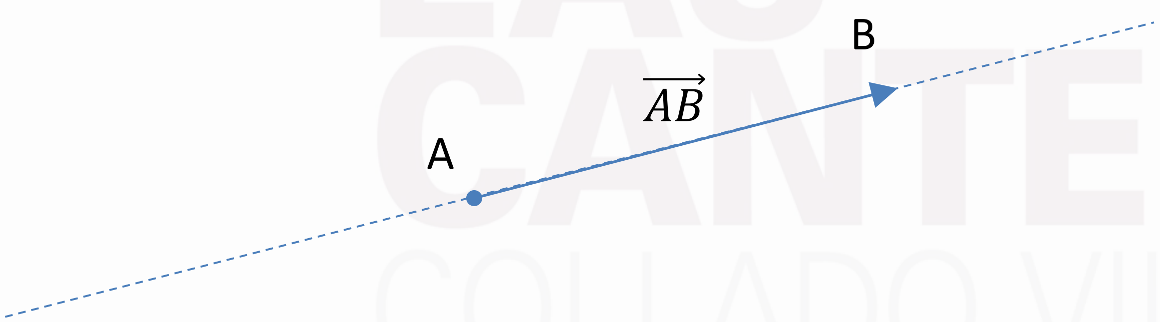
$(1{,}1)=\mathrm{k}(1{,}2)$, por tanto, $\begin{cases} 1=\mathrm{k} \\ 1=2\mathrm{k} \end{cases}$, como podemos comprobar no existe un valor k tal que un vector pueda se obtenido como combinación lineal del otro, por lo que se trata de una base de $\mathbb{R}^2$.

Definición (vector)

Un vector $\overrightarrow{AB}$ es un segmento orientado que tiene su origen en el punto A y su extremo en el punto B.

Un vector queda determinado por:

- Módulo: La longitud del segmento (siempre mayor o igual a 0), se representa por $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.
- Dirección: Es la dirección determinada por la recta que pasa por los puntos A y B.
- Sentido: Es el recorrido de la recta cuando nos trasladamos de A a B.

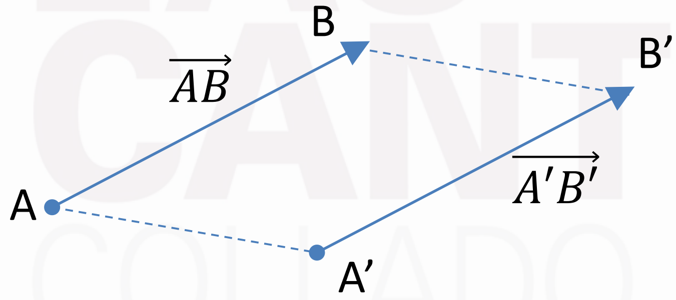


Vectores equipolentes

Dos vectores son **equipolentes** si tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

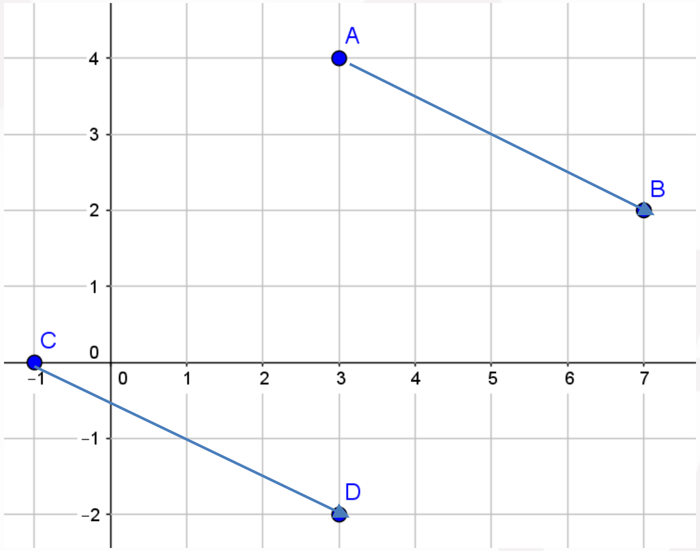
Todos los vectores equipolentes a uno dado representan el mismo vector, a dicho vector le denominaremos **vector libre**.
Representaremos a los vectores libres del plano mediante letras minúsculas.

Gráficamente podemos comprobar que dos vectores son equipolentes si al unir sus extremos se forma un paralelogramo



Ejemplo

¿Son equipolentes los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ siendo A (3,4), B (7,2), C (-1,0) y D (3,-2)?



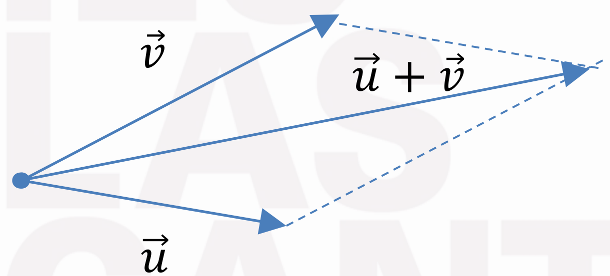
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (7,2) - (3,4) = (4,-2)$$

$$\overrightarrow{CD} = (3,-2) - (-1,0) = (4,-2)$$

Por tanto, los vectores son equipolentes

Suma de vectores

La suma de dos vectores es otro vector que se construye representando los dos vectores con origen el mismo punto. El vector suma se obtiene como la diagonal del paralelogramo que tiene por lados los dos vectores.



Producto de un número por un vector

Al multiplicar un escalar (k) por un vector ($\vec{v}$), se obtiene otro vector k·$\vec{v}$ con las siguientes propiedades:

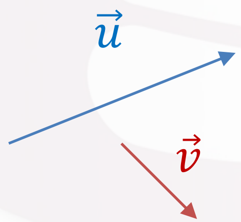
Su módulo es igual al del vector $\vec{v}$ por el valor absoluto del número k.

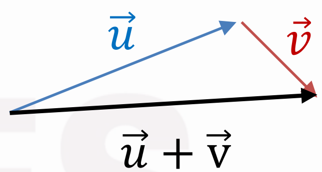
Su dirección es la misma que la del vector $\vec{v}$

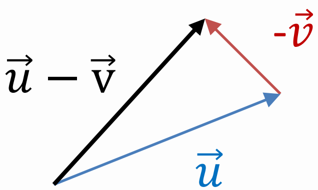
Su sentido es el mismo que el del vector $\vec{v}$ si k es positivo, el contrario, si k es negativo.

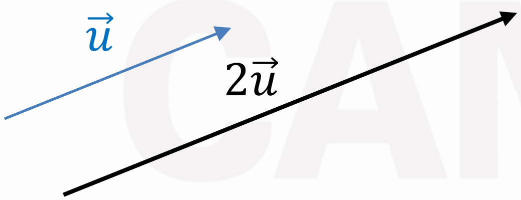
Ejemplo (cálculo con vectores libres)

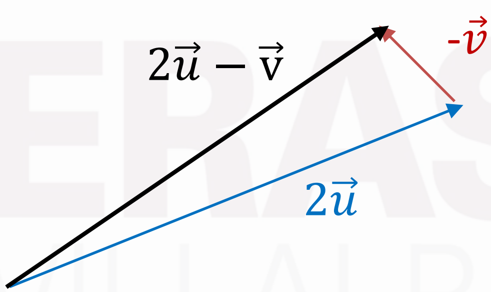
Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{\mathrm{v}}$, calculad: $\vec{u} + \vec{\mathrm{v}}$, $\vec{u} - \vec{\mathrm{v}}$, $2\vec{u}$ y $2\vec{u} - \vec{\mathrm{v}}$







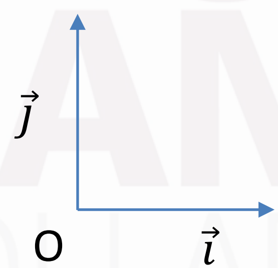




El espacio vectorial V^2

Al conjunto de los vectores libres del plano, junto con las operaciones suma y producto por un escalar forma un espacio vectorial, se denomina **Espacio Vectorial de los vectores libres del plano**.

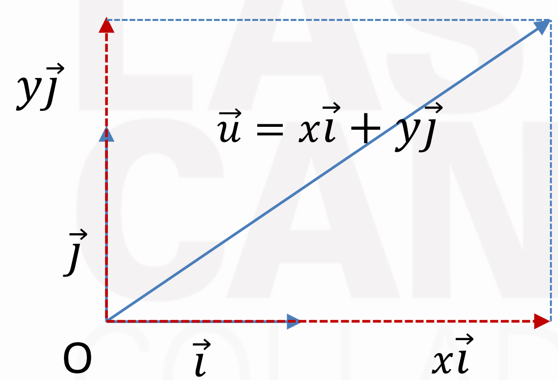
Una **base de V^2** está formada por dos vectores cualesquiera no nulos y no proporcionales. La base más sencilla es la formada por dos vectores perpendiculares y unitarios representados por $\vec{\imath}$ y $\vec{\jmath}$ cuyas coordenadas respecto de la base son $\vec{\imath}=(1,0)$ y $\vec{\jmath}=(0,1)$



Coordenadas cartesianas

Sea $B = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ una base del plano y $\vec{u}$ un vector cualquiera de V^2, se llama coordenadas cartesianas del vector $\vec{u}$ al par de números reales (x,y) tales que permiten expresar el vector $\vec{u}$ como combinación lineal de los vectores de la base de la siguiente forma:

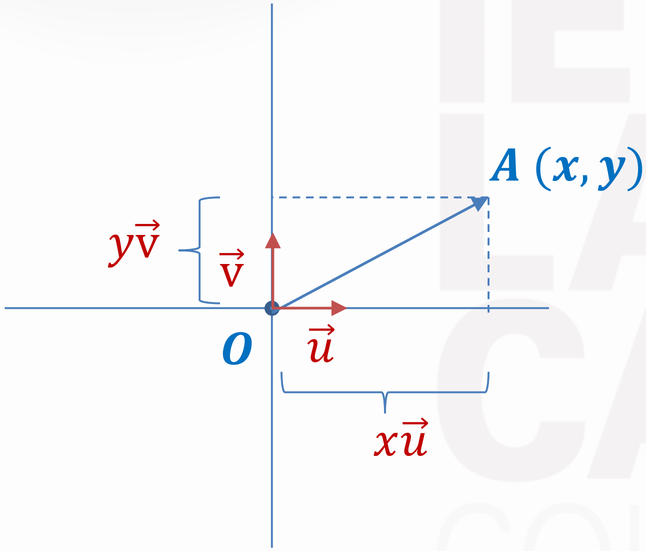
$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$



Sistema de referencia

Para situar un punto en el plano de forma única es necesario un sistema de referencia.

Un **sistema de referencia del plano $\{O; \vec{u}, \vec{v}\}$** se compone de un punto ***O***, denominado origen de coordenadas, y dos vectores no nulos linealmente independientes, que forman una base.



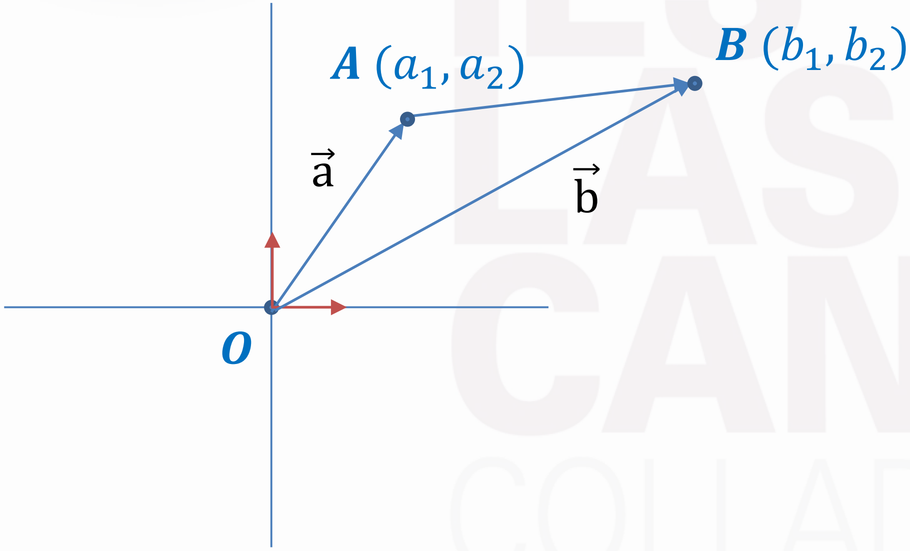
Vector de posición del punto A

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

Coordenadas de un vector libre determinado por dos puntos

Dado un sistema de referencia del plano $\{\boldsymbol{O}; \vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}\}$ sean dos puntos del plano A y B, cuyas coordenadas respecto del sistema de referencia son (a_1, a_2) y (b_1, b_2), respectivamente, el vector libre $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, tendrá por coordenadas :

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$



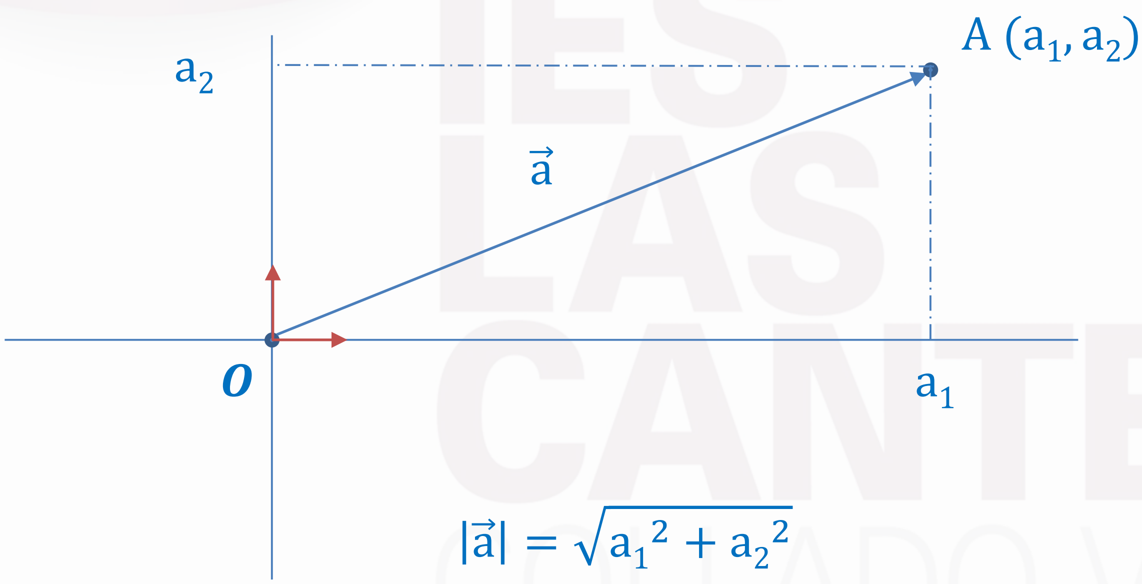
$$\vec{a} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$$

Módulo de un vector

En nuestro sistema de referencia el módulo de un vector coincide con al longitud del segmento que tiene los vértices en sus extremos:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$



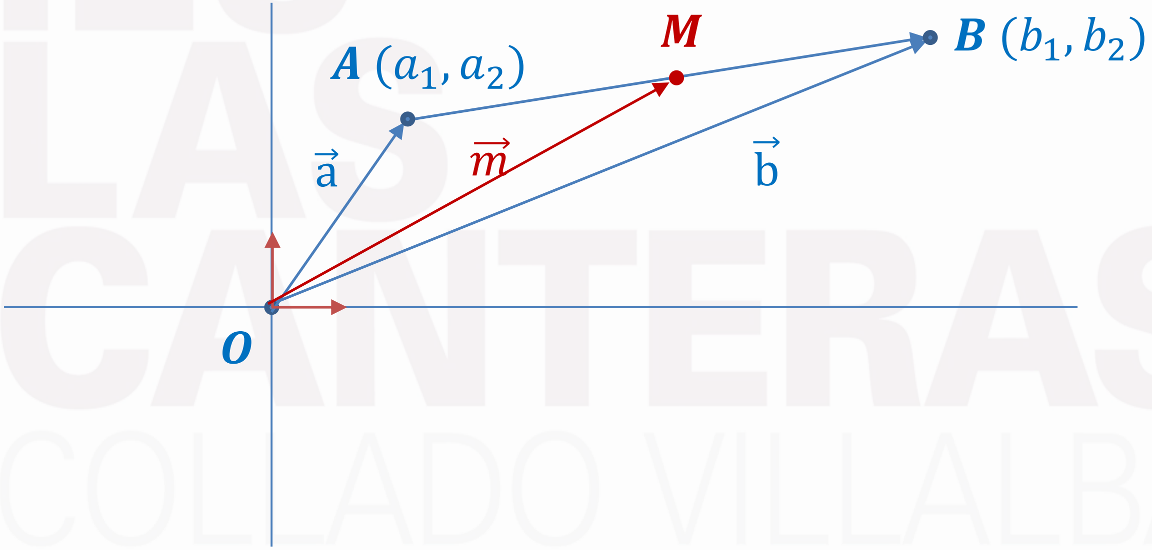
La fórmula procede de aplicar el teorema de Pitágoras

Coordenadas del punto medio de un segmento

Sea el segmento de extremos A y B, sea M su punto medio, entonces se verifica que:

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$\vec{m} = \vec{a} + \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$



Ejemplo (coordenadas de un vector)

El vector $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ tiene por coordenadas (3,-4), sabiendo que las coordenadas del origen A son (3,-1), ¿cuáles son las coordenadas de B?

Solución

Las coordenadas de $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ se han formado utilizando las coordenadas del vector de posición de los puntos A y B de la siguiente forma:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = (\boldsymbol{b_1 - a_1, b_2 - a_2})$$

Por tanto,

$$(\mathbf{3}, \mathbf{-4}) = (\boldsymbol{b_1} - \mathbf{3}, \boldsymbol{b_2} + \mathbf{1}) \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{3} = \boldsymbol{b_1} - \mathbf{3} \Rightarrow \boldsymbol{b_1} = \mathbf{6} \\ \mathbf{-4} = \boldsymbol{b_2} + \mathbf{1} \Rightarrow \boldsymbol{b_2} = \mathbf{-5} \end{cases}$$

Ejemplo (punto medio)

Calcular el punto medio del segmento cuyos extremos son A (2,3) y B (-7,2).

Solución

El punto medio verifica que:

$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}(-7-2{,}2-3) = (-\frac{9}{2}, -\frac{1}{2})$

Por tanto:

$$\mathrm{M} = \left(-\frac{9}{2} + 2, -\frac{1}{2} + 3\right) = (-\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$$

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

Definición

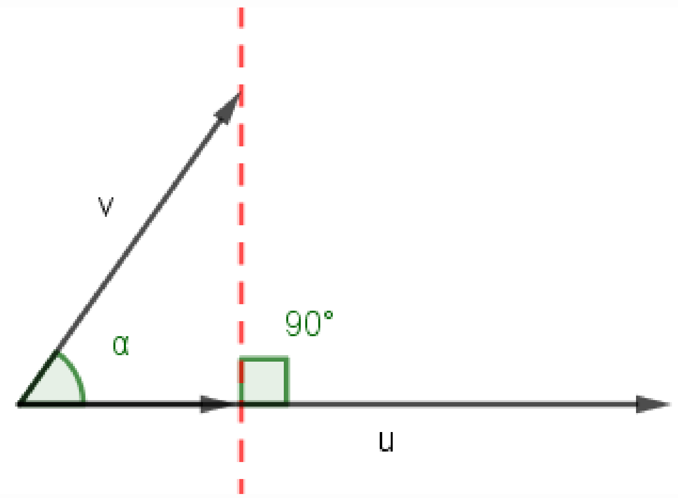
El **producto escalar** de dos vectores es un número definido como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$$

$\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$ denota el ángulo formado por los dos vectores

El producto escalar de dos vectores es igual a 0 si los dos vectores son perpendiculares o al menos uno de ellos es nulo.

El producto escalar de dos vectores es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre el primero



Propiedades

El producto escalar de un vector por sí mismo es siempre mayor que cero.

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot cos(0) = |\vec{u}|^2 \geq 0$$

El producto escalar es conmutativo $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Distributiva respecto a la suma vectorial: $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}$

Asociativa respecto al producto por un escalar $k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{w}$

Expresión analítica del producto escalar

Sea $B = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ la base canónica del plano y $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$, dos vectores cualesquiera, con sus correspondientes coordenadas expresadas en la base B.

El producto escalar puede ser expresado por:

$$\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{u_1} \cdot \boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{u_2} \cdot \boldsymbol{v_2}$$

Demostración

$$\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = (u_1 \cdot \vec{\imath} + u_2 \cdot \vec{\jmath}\,) \cdot (v_1 \cdot \vec{\imath} + v_2 \cdot \vec{\jmath}\,)$$

Aplicando las propiedades del producto escalar:

$$\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = u_1 \cdot v_1 \cdot \vec{\imath} \cdot \vec{\imath} + u_1 \cdot v_2 \cdot \vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} + u_2 \cdot v_1 \cdot \vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} + u_2 \cdot v_2 \cdot \vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath}$$

Teniendo en cuenta que el producto escalar de $\vec{\imath}\ y\ \vec{\jmath}$ es cero, pues son perpendiculares y que $\vec{\imath}^2 = |\vec{\imath}|^2 = 1\ y\ \vec{\jmath}^2 = |\vec{\jmath}|^2 = 1$

$$\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = u_1 \cdot v_1 \cdot \vec{\imath} \cdot \vec{\imath} + u_2 \cdot v_2 \cdot \vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$

Cálculo del ángulo que forman dos vectores

A partir del producto escalar se puede calcular el ángulo que forman dos vectores:

$$\boldsymbol{cos}\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2}{\sqrt{u_1{}^2+u_2{}^2}\cdot\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2}}$$

Ejemplo

Sean los vectores $\vec{u}=(2,3)$ y $\vec{v}=(1,2)$ referidos a la base canónica, calcularemos el ángulo que forman:

$$cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{2\cdot1+3\cdot2}{\sqrt{2^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{8}{\sqrt{65}}\Longrightarrow\widehat{\vec{u},\vec{v}}=7^o7'30''$$