Razones trigonométricas

Medidas de ángulos

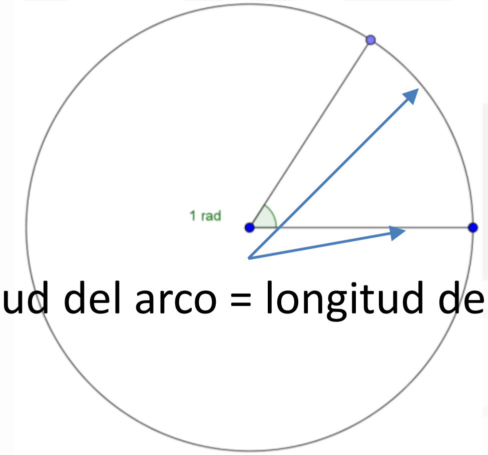
La medida de ángulos se basa en la medida del arco que intercepta sobre una circunferencia un ángulo cuyo vértice es el centro de aquella.

Grado:

Un grado es el ángulo plano que teniendo su vértice en el centro de la circunferencia intercepta sobre la circunferencia un arco de longitud $\frac{2\pi r}{360^0}$

Radián:

Un radián es el ángulo plano que teniendo su vértice en el centro de la circunferencia intercepta sobre la circunferencia un arco de longitud el radio de la circunferencia.



Longitud del arco = longitud del radio

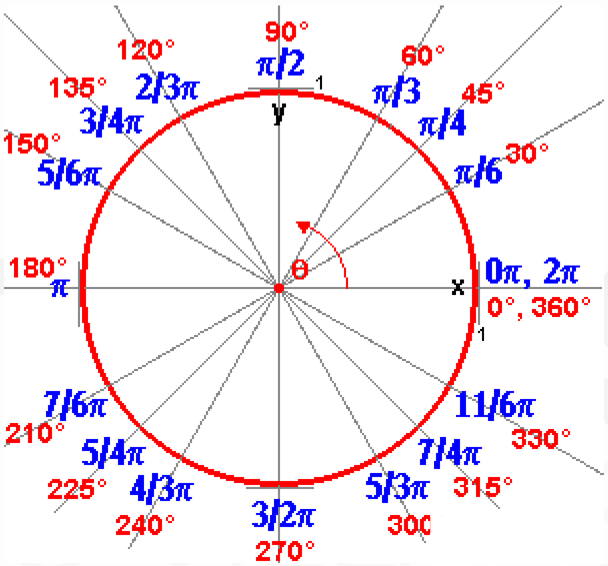
Equivalencia entre grados y radianes

Cómo la longitud de toda circunferencia es de $2\pi r$, un ángulo que abarque toda ella tiene 2π rad, es decir, 360 grados equivalen a 2π rad. Por tanto:

1 rad es igual a $\frac{360^0}{2\pi} = 57^0 17' 45'', 71..$

1 grado es igual a $\frac{2\pi}{360^0} = 0,0017453 \ldots rad$

GRADOS	RADIANES
360	2π
180	π
90	π/2
60	π/3
45	π/4
30	π/6



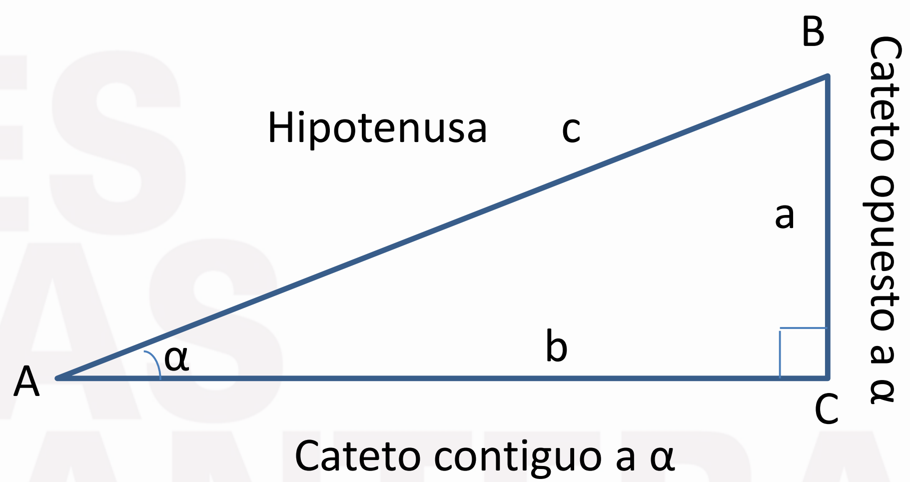
Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

Dado un triángulo rectángulo, se definen sus razones trigonométricas respecto de uno de sus ángulos α como:

$$sen\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

$$cos\alpha = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

$$tg\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{a}{b}$$



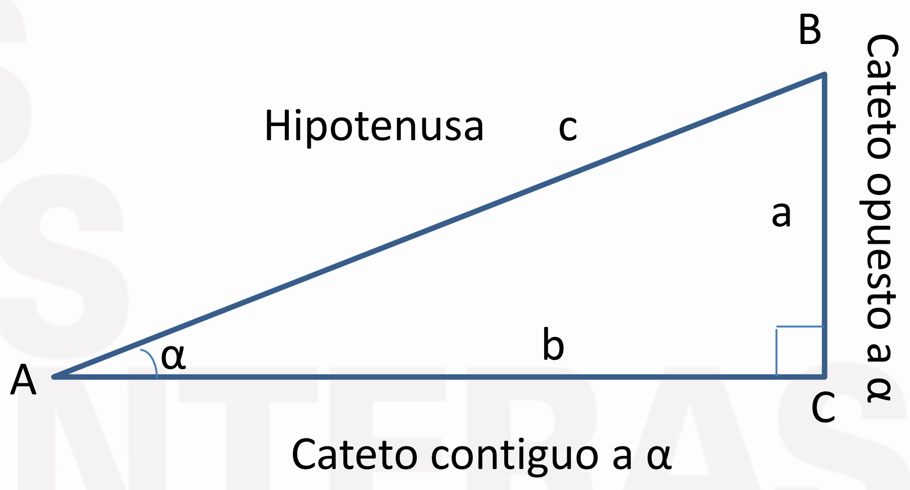
Razones inversas

Las razones inversas del seno, coseno y tangente se denominan, respectivamente, **cosecante**, **secante** y **cotangente**.

$$cosec\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{c}{a} = \frac{1}{sen\alpha}$$

$$sec\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ contiguo} = \frac{c}{b} = \frac{1}{cos\alpha}$$

$$cotg\alpha = \frac{cateto\ contiguo}{cateto\ opuesto} = \frac{b}{a} = \frac{1}{tg\alpha}$$

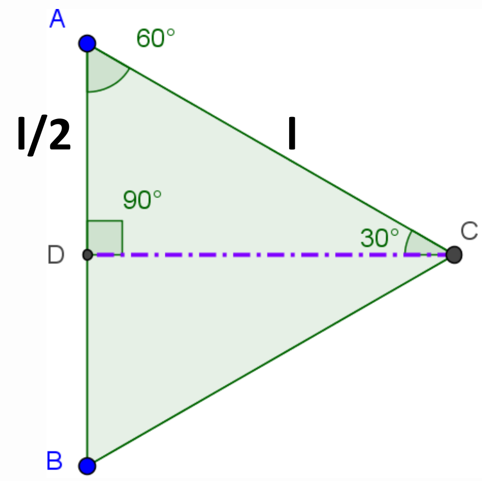


Cálculo de las razones trigonométricas del ángulo de 30^o

Si en un triángulo equilátero trazamos una de las alturas, queda dividido en dos triángulos rectángulos con ángulos de 30^o y 60^o

El triángulo ABC es equilátero y el triángulo ADC es rectángulo, un cateto es la mitad de la hipotenusa (AC=2AD).
La altura CD se puede calcular utilizando el teorema de Pitágoras: $AC^2 = AD^2 + CD^2 \Rightarrow l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + CD^2$

$$CD^2 = \frac{3}{4} l^2 \Rightarrow CD = \frac{\sqrt{3}}{2} l$$



Ya podemos calcular las razones trigonométricas:

$$\mathrm{sen}30^0 = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{\mathrm{l}}{2}}{\mathrm{l}} = \frac{1}{2}$$

$$cos30^0 = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

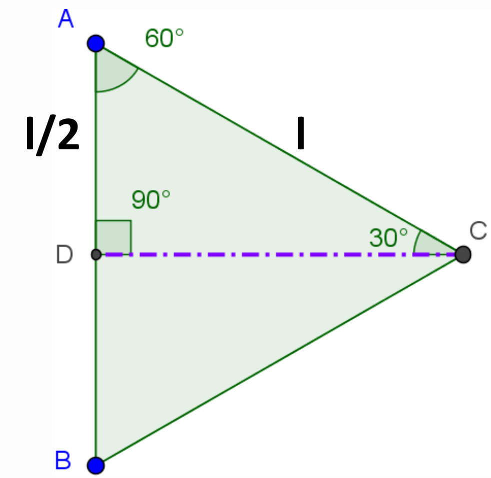
$$tg30^0 = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{\frac{1}{2} l}{\frac{\sqrt{3}}{2} l} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Cálculo de las razones trigonométricas del ángulo de 60^o

Si en un triángulo equilátero trazamos una de las alturas, queda dividido en dos triángulos rectángulos con ángulos de 30^o y 60^o

El triángulo ABC es equilátero y el triángulo ADC es rectángulo, un cateto es la mitad de la hipotenusa (AC=2AD).
La altura CD se puede calcular utilizando el teorema de Pitágoras: $AC^2 = AD^2 + CD^2 \Rightarrow l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + CD^2$

$CD^2 = \frac{3}{4}l^2 \Rightarrow CD = \frac{\sqrt{3}}{2}l$



Ya podemos calcular las razones trigonométricas:

$$\text{sen}60^0 = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

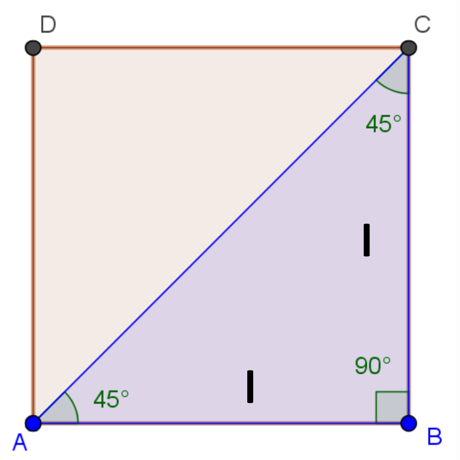
$$cos60^0 = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \frac{\frac{\text{l}}{2}}{\text{l}} = \frac{1}{2}$$

$$tg60^0 = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}l}{\frac{1}{2}l} = \sqrt{3}$$

Cálculo de las razones trigonométricas del ángulo de 45^o

Si en un cuadrado trazamos una de las diagonales, queda dividido en dos triángulos rectángulos isósceles con ángulos de 45^o.

El triángulo ABC es rectángulo e isósceles, por lo que AB=BC.
Podemos calcular el valor de la hipotenusa utilizando el teorema de Pitágoras: $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = l^2 + l^2$
$AC^2 = 2l^2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}l$



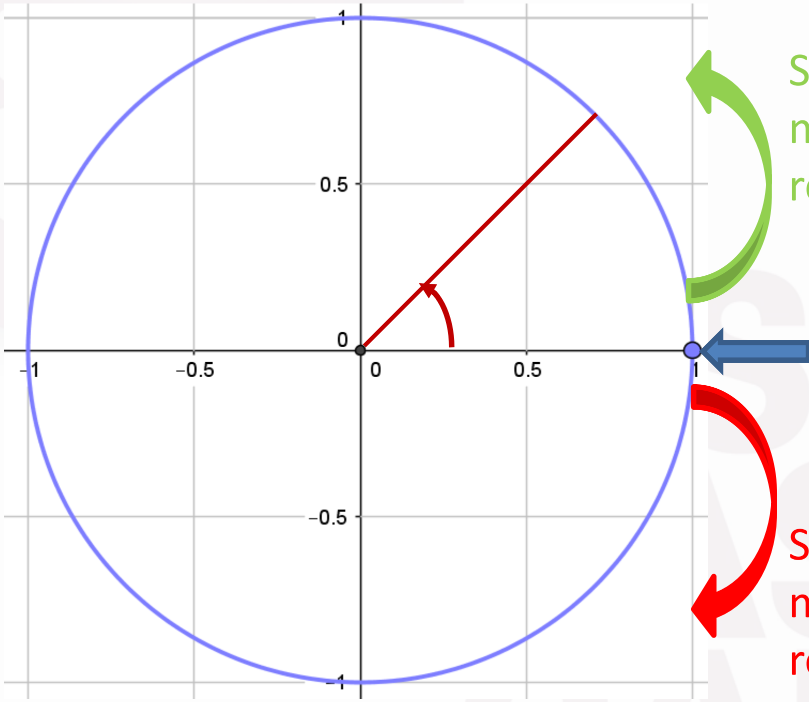
Ya podemos calcular las razones trigonométricas:

$$\mathrm{sen}45^0 = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{l}{\sqrt{2}l} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos45^0 = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \frac{l}{\sqrt{2}l} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg45^0 = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{l}{l} = 1$$

Ampliación del concepto de ángulo I

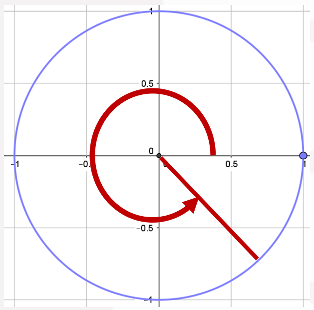


Sentido positivo: contrario al movimiento de las agujas de un reloj.

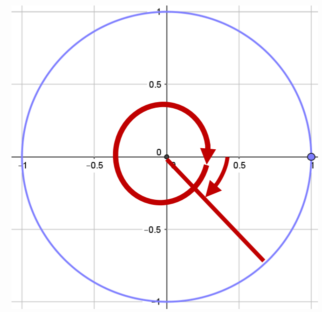
Origen de los ángulos

Sentido negativo: igual al movimiento de las agujas de un reloj.

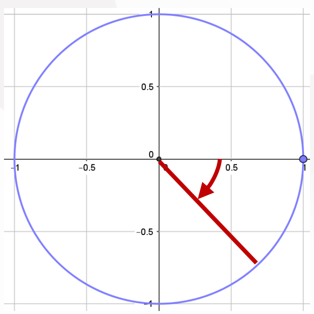
Ampliación del concepto de ángulo II



Ángulo de $315^0 = \frac{7}{4}\pi\, rad$



Ángulo de $-405^0 = -360^0 - 45^0 =$
$-2\pi - \frac{1}{4}\pi\, rad$

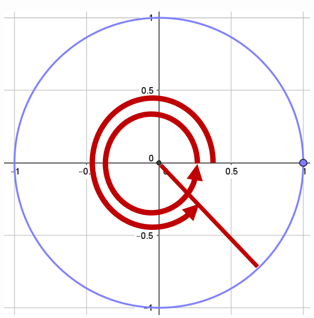


Ángulo de $-45^0 = -\frac{1}{4}\pi\, rad$

Ángulos mayores de 360^0

$1170^0 = 3 \cdot 360^0 + 90^0 = 6\pi + \frac{\pi}{2} rad$

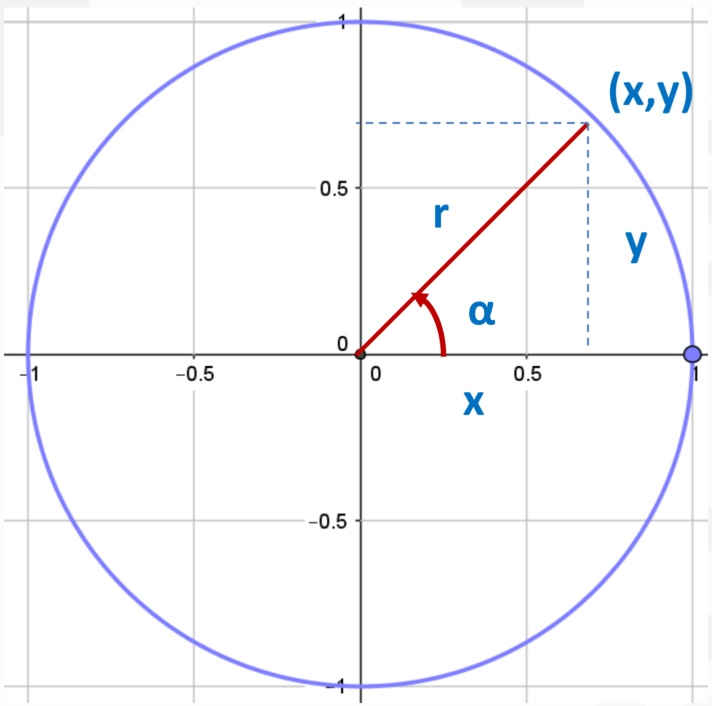
$7245^0 = 20 \cdot 360^0 + 45^0 = 40\pi + \frac{\pi}{4} rad$

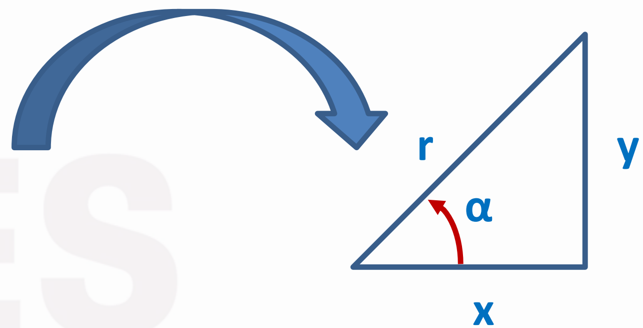


Ángulo de
$675^0 = 360^0 + 315^0 = 2\pi + \frac{7}{4}\pi\, rad$

Razones trigonométricas de cualquier ángulo I

Para un ángulo agudo



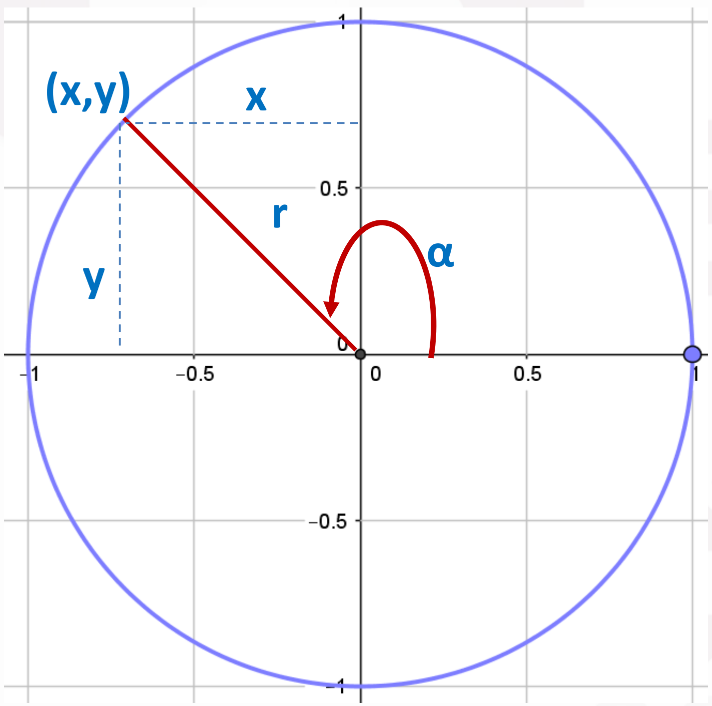


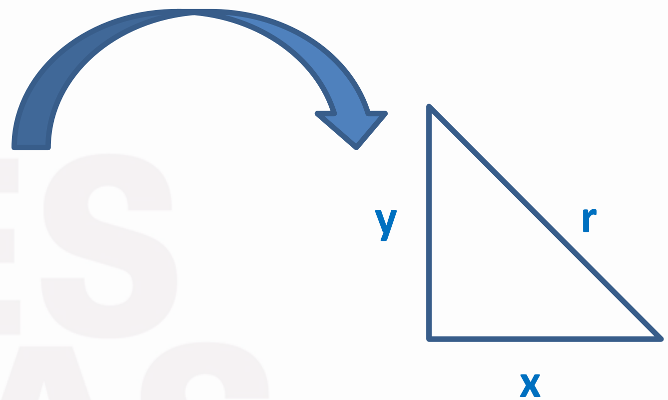
$$\text{sen}\alpha = \frac{ordenada}{radio} = \frac{\text{y}}{\text{r}} \qquad \cos\alpha = \frac{abcisa}{radio} = \frac{\text{x}}{\text{r}}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{ordenada}{abcisa} = \frac{\text{y}}{\text{x}} = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Razones trigonométricas de cualquier ángulo II

Es posible extender la definición de las razones trigonométricas a cualquier ángulo que no sea agudo (presente en un triángulo rectángulo)



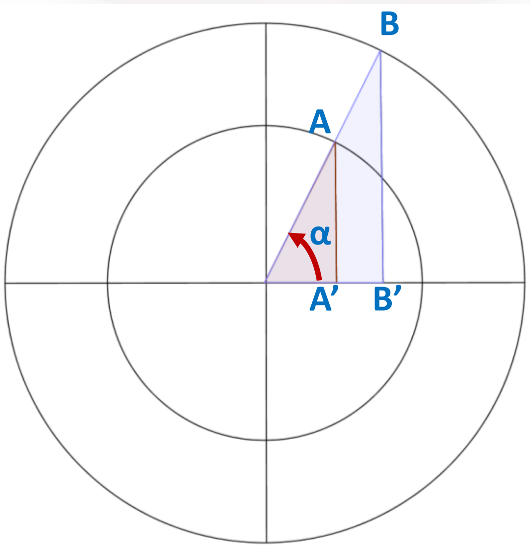


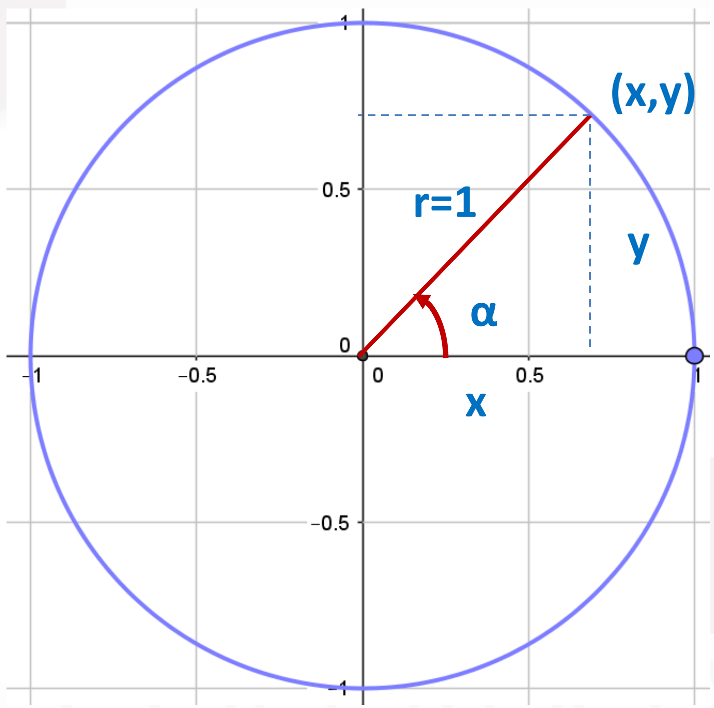
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{ordenada}{radio} = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{r}} \qquad \cos\alpha = \frac{abcisa}{radio} = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{r}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{ordenada}{abcisa} = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

La circunferencia goniométrica

Las razones trigonométricas no dependen del radio de la circunferencia elegida para definirla, pues los triángulos que se forman son semejantes. La circunferencia más sencilla para definir las razones trigonométricas tiene por radio uno y se denomina **círculo unitario** o **circunferencia goniométrica**.





Cuando r = 1

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{ordenada}{radio} = y$$

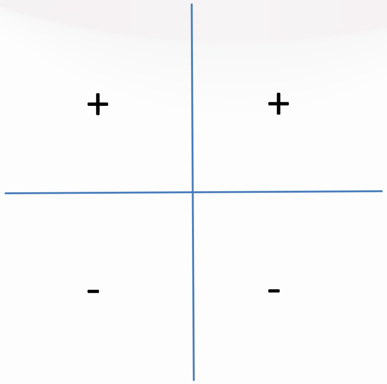
$$\cos\alpha = \frac{abcisa}{radio} = x$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{ordenada}{abcisa} = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$$

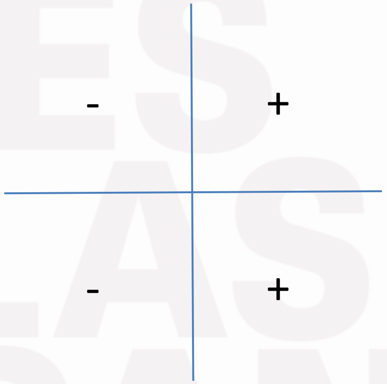
Signo de las razones trigonométricas

El signo de las razones trigonométricas dependerá del cuadrante donde se encuentre el ángulo:

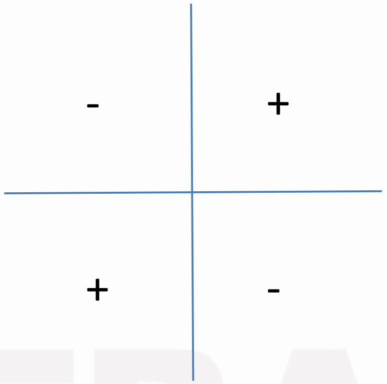
Seno



Coseno

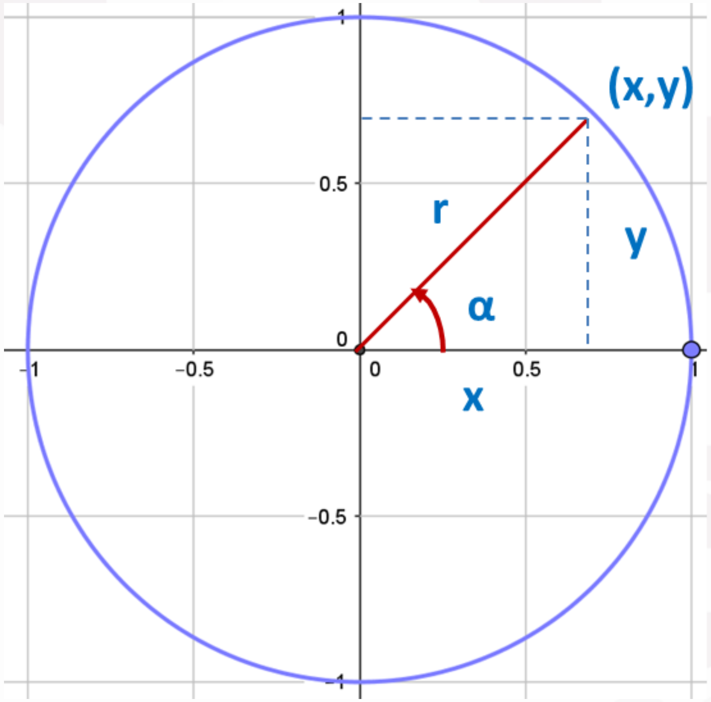


Tangente



Relación fundamental

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$



$$\text{sen}\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}$$

Utilizando el teorema de Pitágoras:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Dividiendo ambos miembros de la igualdad por r^2 queda:

$$\frac{r^2}{r^2} = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}$$

Simplificando:

$$1 = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2$$

Es decir:

$$1 = sen^2\alpha + cos^2\alpha$$

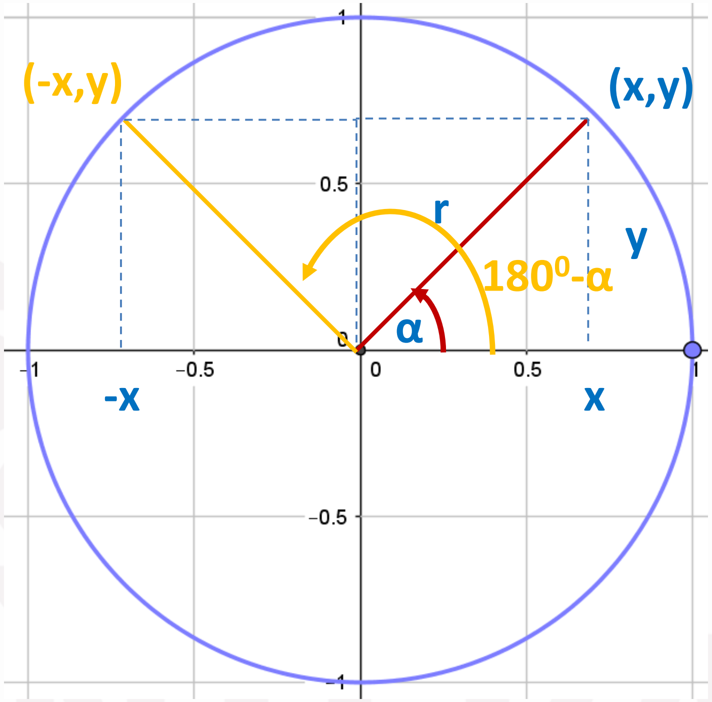
Relación entre las razones de ángulos suplementarios

Ángulos suplementarios $\boldsymbol{\alpha}$ $\boldsymbol{y}$ $\mathbf{180^0} - \boldsymbol{\alpha}$

$$sen(180^0 - \alpha) = \text{sen}\ \alpha$$

$$cos(180^0 - \alpha) = -cos\ \alpha$$

$$tg(180^0 - \alpha) = -tg\ \alpha$$



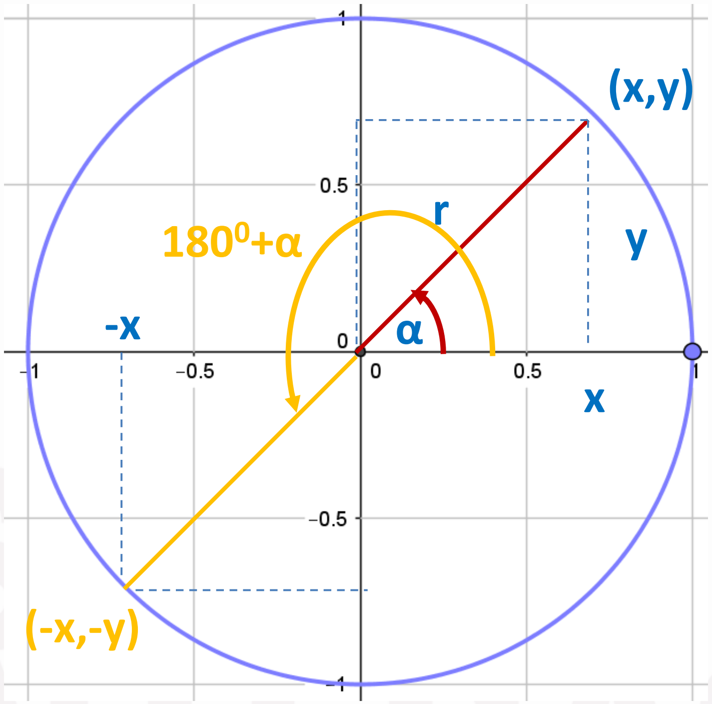
Relación entre las razones de ángulos que distan 180^0

Ángulos $\boldsymbol{\alpha}$ y $\mathbf{180^0} + \boldsymbol{\alpha}$

$$sen(180^0 + \alpha\,) = -\text{sen}\,\alpha$$

$$cos(180^0 + \alpha\,) = -cos\ \alpha$$

$$tg(180^0 + \alpha\,) = +tg\ \alpha$$



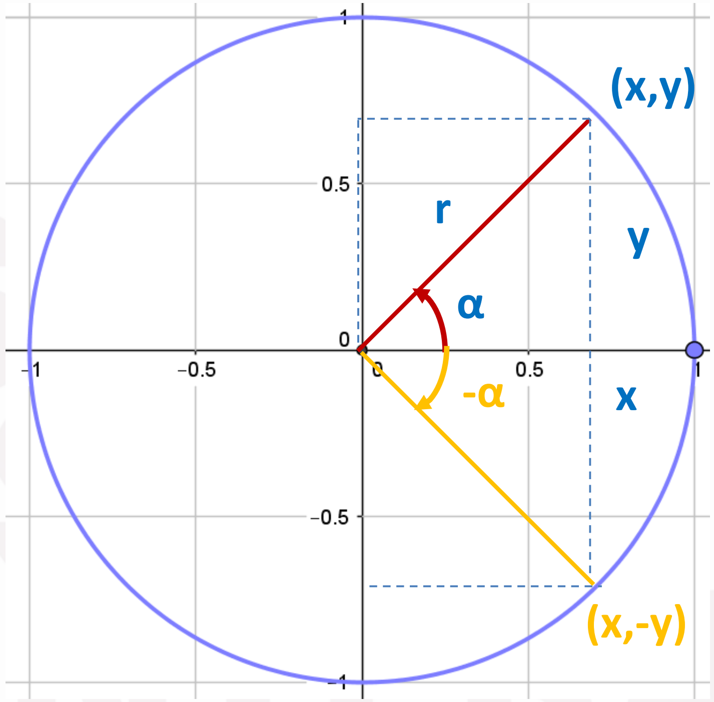
Relación entre las razones de ángulos opuestos

Ángulos $\boldsymbol{\alpha}$ $\boldsymbol{y}$ $-\boldsymbol{\alpha}$

$$sen(-\alpha) = -\text{sen}\ \alpha$$

$$cos(-\alpha) = cos\ \alpha$$

$$tg(-\alpha) = -tg\ \alpha$$



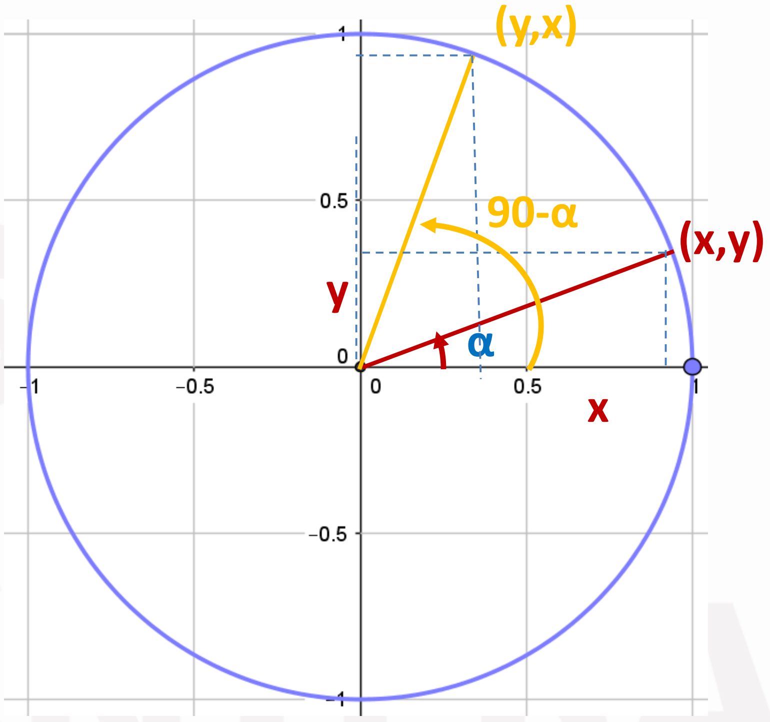
Relación entre las razones de ángulos complementarios

Ángulos $\boldsymbol{\alpha}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{90^0 - \alpha}$

$$sen(90 - \alpha) = cos\ \alpha$$

$$cos(90 - \alpha) = sen\ \alpha$$

$$tg(90 - \alpha) = cotg\ \alpha$$



EJEMPLOS

Ejemplo: cálculo de las razones trigonométricas

Calcula las restantes razones trigonométricas sabiendo que:

$$cos\ \alpha = \frac{4}{5}\ ; 270^0 \leq \alpha \leq 360^0$$

Solución:

Cómo el ángulo se encuentra en el cuarto cuadrante el seno y la tangente serán negativos.

Utilizando la relación fundamental podemos calcular el seno:

$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1; sen^2\alpha + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1,$ por tanto:

$$sen\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

La tangente la calculamos utilizando su definición:

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

Ejemplo: simplifica una expresión trigonométrica

Simplifica la siguiente expresión: $sen\ \alpha \frac{1}{tg\ \alpha}$

Solución:

Cómo $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$, sustituyendo en la expresión:

$$sen\ \alpha \frac{1}{tg\ \alpha} = sen\alpha \frac{1}{\frac{sen\alpha}{cos\alpha}} = \frac{sen\alpha \cdot cos\alpha}{sen\alpha} = cos\alpha$$

Ejemplo: resolución de un triángulo rectángulo

Resolver un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 3 cm y uno de sus catetos 1 cm.

Solución:

Utilizando el teorema de Pitágoras, podemos calcular el otro cateto:

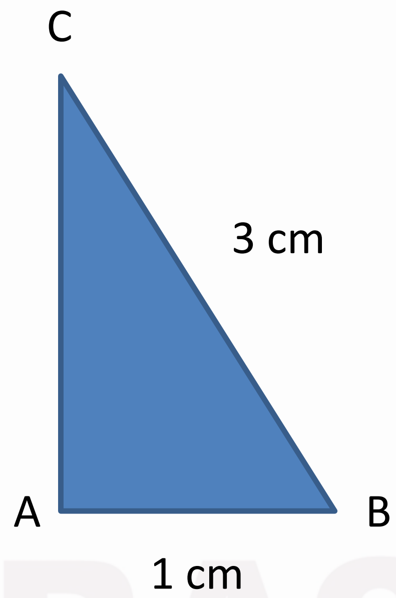
$AC^2 = CB^2 - AB^2; \quad AC^2 = 3^2 - 1^2 = 8; \quad \mathrm{AC} = \sqrt{8}$

Podemos ahora calcular los ángulos utilizando la calculadora y las funciones inversas de las razones trigonométricas:

$$cosB = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}, por\ tanto\ buscamos\ un\ ángulo\ cuyo\ coseno\ sea\ \frac{1}{3}$$

B = 70,52^0

Por tanto, como la suma de los ángulos debe ser 180^0 el ángulo C mide 19,08^0



Ejemplo

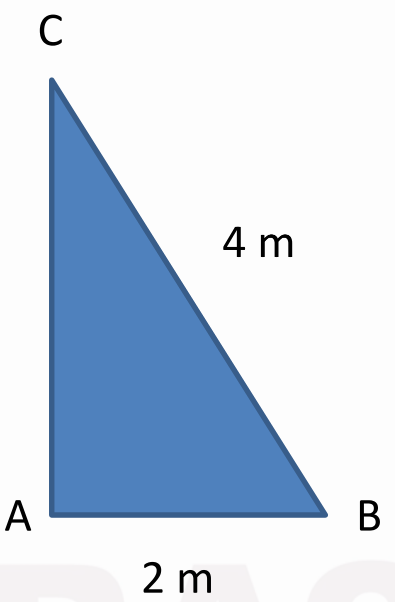
Una escalera de 4 metros está apoyada contra la pared. ¿Cuál será su ángulo de inclinación si su base dista 2 metros de la pared?

Solución:

Podemos calcular el ángulo utilizando el coseno del ángulo B:

$$cosB = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, el ángulo cuyo coseno es un medio es el ángulo de 60^0.



Ejemplo

Calcular la altura de una torre sabiendo que su sombra mide 13 m cuando los rayos del sol forman 50º con el suelo.

Solución:

Podemos calcular la altura utilizando la tangente del ángulo B:

$$tg50^0 = \frac{AC}{AB} = \frac{13}{AB}$$

Sabiendo que $tg50^0$ es aproximadamente 1,19:

$$AB = \frac{13}{tg50^0} = \frac{13}{1{,}19} = 10{,}92\ m$$