Sucesiones

Límite de una sucesión

Definición

Una sucesión de números reales es una aplicación del conjunto de los números naturales en el conjunto de los números reales, así, podemos hablar del término de posición 1, el término de posición 2 y así sucesivamente.
A cada elemento de la sucesión se le conoce como término (se añade la posición que ocupe para determinarlo sin ambiguedad). El término general de la sucesión es una expresión algebraica que permite calcular el término conocido el lugar que ocupa.

Ejemplo

La sucesión $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5} \ldots$. Tiene por término general $a_n = \sqrt{n}$, el término de posición 4 es $a_4 = 2$, el término de posición 5 es $a_5 = \sqrt{5}$
Si el término general de la sucesión es $b_n = \frac{n^2-1}{n}$, entonces el término de posición 3 es $b_3 = \frac{3^2-1}{3} = \frac{8}{3}$
Si el término general de la sucesión es $c_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$, entonces el término de posición 4 es $c_4 = (-1)^4 \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$

Monotonía: crecimiento y decrecimiento

Una sucesión$\{a_n\}$es **creciente**, si cada término de la sucesión es menor o igual que el siguiente; es **estrictamente creciente** si cada término es menor que el siguiente:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_k \leq a_{k+1}$$

Una sucesión $\{a_n\}$es **decreciente**, si cada término de la sucesión es mayor o igual que el siguiente; es **estrictamente decreciente** si cada término es mayor que el siguiente:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_k \leq a_{k+1}$$

Ejemplos

La sucesión $a_n = \frac{1}{n}$, es estrictamente decreciente pues $a_k = \frac{1}{k} > \frac{1}{k+1} = a_{k+1}\ \forall k \in \mathbb{N}$

La sucesión $b_n = n^2 + 1$, es estrictamente creciente pues $b_k = k^2 + 1 < (k+1)^2 + 1 = k^2 + 2k + 1 = a_{k+1}\ \forall k \in \mathbb{N}$

Acotación

Una sucesión $\{a_n\}$ está acotada superiormente si todos los términos de la sucesión son menores que un determinado valor ***K*** que denominaremos cota superior. Podemos expresarlo de la siguiente forma:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq K\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Una sucesión$\{a_n\}$ está acotada inferiormente si todos los términos de la sucesión son mayores que un determinado valor ***K*** que denominaremos cota inferior. Podemos expresarlo de la siguiente forma:

$$K \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \forall k \in \mathbb{N}$$

Una sucesión a_n está acotada si está acotada superior e inferiormente.

Ejemplo

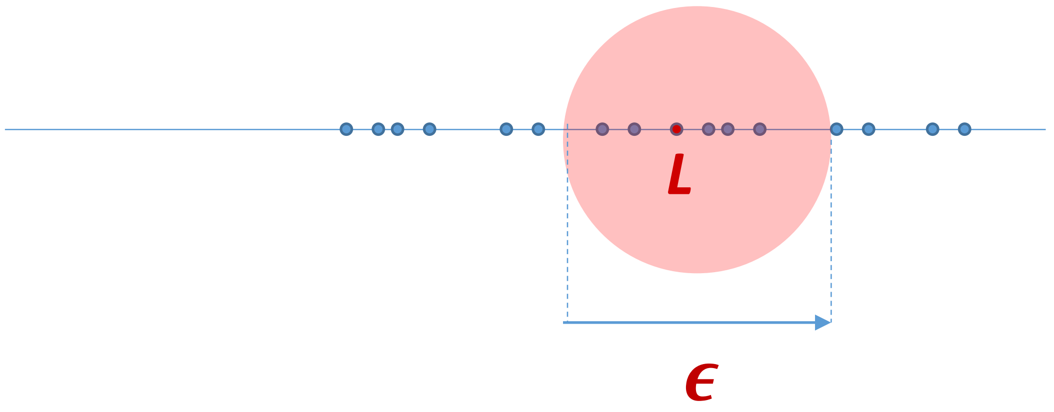
La sucesión de término general $a_n = \frac{1}{n},\ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, … está acotada pues todos sus términos son mayores que cero (cota inferior) y son menores o iguales que 1 $0 \leq a_k \leq 1, \forall k \in \mathbb{N}$

Límite de una sucesión

Una sucesión $\{a_n\}$ tiene por límite el número ***L***, cuando a medida que ***n*** toma valores cada vez más grandes, los términos de la sucesión se aproximan cada vez más al número ***L***.
Para expresar que ***L*** es el límite de la sucesión$\{a_n\}$ se utiliza la siguiente expresión:
$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$ y se lee como “el límite de la sucesión $\{a_n\}$ cuando n tiende a infinito es L”

Definición formal
Una sucesión$\{a_n\}$ tiene por límite el número real ***L*** si $\forall \epsilon > 0\ \exists k \in N\ tal\ que\ |a_n - L| \leq \epsilon\ \forall n \geq k$

Fuera del intervalo $\{L - \varepsilon, L + \varepsilon\}$ quedan siempre un número finito de elementos de la sucesión



Ejemplos

La sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ es una sucesión monótona estrictamente decreciente que tiene por límite 0.

Podemos observar que los primeros términos son $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ $\qquad \mathbf{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0}$

La sucesión $a_n = (-1)^n$ es una sucesión acotada inferiormente por -1 y superiormente por 1. Sin embargo, no tiene límite pues si tomamos intervalos centrados en los dos candidatos a serlo -1 y 1 tan pequeños como deseemos dejan fuera infinitos términos de la sucesión.

La sucesión $a_n = n^2$ es una sucesión monótona estrictamente creciente, no acotada (podemos obtener valores tan grandes como deseemos tomando valores de n suficientemente grandes), por lo que no tiene límite.

Sucesiones divergentes

Una sucesión $\{a_n\}$ tiene por límite $+\infty$ (de forma análoga a $-\infty$), cuando a medida que $\boldsymbol{n}$ toma valores cada vez más grandes, los términos de la sucesión son cada vez mayores (menores) y no se pueden acotar.

Para indicar este hecho se notará por: $\lim\limits_{\boldsymbol{n}\to\infty} \boldsymbol{a_n} = \pm\infty$

Ejemplo

La sucesión de término general $a_n = n^2 + n$, tiene por límite $+\infty$ pues si proponemos un valor tan grande como queramos podemos proponer un valor de n, de tal forma que supere el valor propuesto.

$$\lim_{n\to\infty} n^2 + n = +\infty$$

La sucesión de término general $a_n = 1 - n^2$, tiene por límite $-\infty$ pues si proponemos un valor tan pequeño como queramos podemos proponer un valor de n, de tal forma que sea menor que el valor propuesto.

$$\lim_{n\to\infty} 1 - n^2 = -\infty$$

Algunos cálculos de límites

Límite de una potencias, exponenciales

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^k\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } \mathrm{k} < 0 \\ 1 \text{ si } \mathrm{k} = 0 \\ +\infty \text{ si } \mathrm{k} > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(k^n\right) = \begin{cases} \text{No existe si } \mathrm{k} < -1 \\ 0 \quad \text{si } -1 < \mathrm{k} < 1 \\ +\infty \qquad \text{si } \mathrm{k} > 1 \end{cases}$$

Límite de un polinomio

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot x^i\right) = \lim_{n\to\infty} a_k \cdot x^k$$

Límite de un cociente de polinomios

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot x^i}{\sum_{i=0}^{l} b_j \cdot x^j}\right) = \begin{cases} +\infty \text{ si } \mathrm{k} > \mathrm{l} \\ \dfrac{a_k}{a_l} \text{ si } \mathrm{k} = \mathrm{l} \\ 0 \text{ si } \mathrm{k} < \mathrm{l} \end{cases}$$

Ejemplos I

$\lim\limits_{n\to\infty}(n^3) = +\infty$ a medida que el valor de n crece su cubo crece, por tanto, la sucesión no está acotada y la sucesión es divergente

$\lim\limits_{n\to\infty}(4n^{-3}) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^3} = 0$ a medida que el valor de n crece su cubo crece, y por tanto, como el numerador es constante, él límite de la sucesión es 0.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3+5n^2+3}{-2n^2+3n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3}{-2n^2}\right) = -\infty$, en un cociente de polinomios tenemos en cuenta únicamente los términos de mayor grado de ambos polinomios. Como el grado del polinomio del numerador es mayor que el del denominador tiende a ∞, como los signos son distintos podemos decir que es una sucesión divergente que tiende a $-\infty$.

Operaciones con sucesiones convergentes

Si las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son convergentes (tienen límite finito), entonces se verifican las siguientes propiedades:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left({a_n}^k\right) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^k$$

$$\lim_{n\to\infty}(k \cdot a_n) = k \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left({a_n}^{b_n}\right) = \lim_{n\to\infty} {a_n}^{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\log_b a_n\right) = \log_b\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)$$

Ejemplos I

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n}{3n^2}+\frac{2n+1}{3n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{3n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+1}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n}{3n}\cdot\frac{4n^3+1}{3n^3+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{3n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+1}{3n^3+1}=+\infty\cdot\frac{4}{3}=+\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n}{3n^2n}-\sqrt{\frac{4n^3+n^2}{n^3+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{3n^2n}-\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{4n^3+n^2}{n^3+1}}=0-\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+n^2}{n^3+1}}=0-2=-2$$

Ejemplos II

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln\frac{2n^2+5}{4n^2-n}\right)=\ln\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5}{4n^2-n}\right)=\ln\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+5}{4n^2}\right)^{n^2}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5}{4n^2}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} n^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} n^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(4^{\frac{2n^2+5}{4n^2}}\right)=4^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+5}{4n^2}}=4^{\frac{1}{2}}=2$$

Indeterminaciones

Se obtiene una indeterminación cuando calculamos límites cuando no se puede obtener el límite utilizando directamente las operaciones aritméticas con los límites de cada uno de los operandos. Las indeterminaciones que podemos encontrarnos a la hora de calcular límites son:

$$\begin{cases} racionales \begin{cases} \dfrac{0}{0} \\ \dfrac{\infty}{\infty} \\ 0 \cdot \infty \\ \infty - \infty \end{cases} \\ exponenciales \begin{cases} 1^{\infty} \\ \infty^{0} \\ 0^{0} \end{cases} \end{cases}$$

Resolución de la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Nos encontraremos con este tipo de indeterminación en un cociente de polinomios o de radicales. La estrategia consiste en primer lugar identificar la indeterminación y, a continuación, dividir el numerador y el denominador por la potencia máxima de n.

Ejemplo

$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+\sqrt{4n^2-7n+3}}{5n-2}$ podemos observar que tanto el numerador como el denominador tienden a ∞.
La mayor potencia de n que se encuentra en la expresión tiene grado 1 (el cuadrado de n se encuentra dentro de una raíz cuadrada. Por tanto, dividimos el numerador y el denominador por n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n-\sqrt{4n^2-7n+3}}{n}}{\frac{5n-2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n}{n}-\sqrt{\frac{4n^2}{n^2}-\frac{7n}{n^2}+\frac{3}{n^2}}}{\frac{5n}{n}-\frac{2}{n}} = \frac{3-2}{5} = \frac{1}{5}$$

Resolución de la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Ejemplos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+3}{\sqrt[3]{4n^2+3n}} \quad \textit{se trata de una indeterminación } \frac{\infty}{\infty}$$

Dividimos el numerador y el denominador por la potencia de n de mayor grado, en este caso n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n+3}{n}}{\frac{\sqrt[3]{4n^2+3n}}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5n}{n}+\frac{3}{n}}{\sqrt[3]{\frac{4n^2+3n}{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{3}{n}}{\sqrt[3]{\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}} = \frac{5}{0} = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n-1}{\sqrt{9n^3+3}} \textit{se trata de una indeterminación } \frac{\infty}{\infty}$$

Dividimos el numerador y el denominador por la potencia de n de mayor grado, en este caso $n^{3/2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n-1}{n^{3/2}}}{\frac{\sqrt{9n^3+3}}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4n}{n^{3/2}}-\frac{1}{n^{3/2}}}{\sqrt{\frac{9n^3+3}{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n^{1/2}}-\frac{1}{n^{3/2}}}{\sqrt{9+\frac{3}{n^3}}} = \frac{0}{3} = 0$$

Resolución de la indeterminación $\infty - \infty$

Nos encontraremos con este tipo de indeterminación en la diferencia de radicales o en cociente de polinomios.

Ejemplos

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{\mathrm{n}}-\frac{n^2}{n+1}\right)$ Debemos, en primer lugar, que el límite presenta una indeterminación del tipo $\infty - \infty$

$$\text{Operando } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n^2+1)(n+1)-n^3}{\mathrm{n}\cdot(\mathrm{n}+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+n^2+n+1-n^3}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+n}=1$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n+1}\right)$ Debemos, en primer lugar, que el límite presenta una indeterminación del tipo $\infty - \infty$

Multiplicando y dividiendo por el conjugado y simplificando:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n+1}\right)\left(\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n+1}\right)}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3n+2}^2-\sqrt{3n+1}^2}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+2}+\sqrt{3n+1}}=0$$

Resolución de la indeterminación 1^{∞}

Para resolver este tipo de indeterminaciones utilizaremos el hecho de que el número transcendente ***e***, es el límite de la sucesión $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$, es decir, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e.$

Ejemplos

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n-2}$ Debemos, en primer lugar, que el límite presenta una indeterminación del tipo 1^{∞}

Ahora, debemos modificar la expresión del límite para que el exponente y el denominador tengan la misma expresión:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n-2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n/2}\right)^{n-2}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n/2}\right)^{n/2}\right)^{\frac{2}{n}(n-2)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}(n-2)}=e^{2}$$

Resolución de la indeterminación 1^{∞}: Ejemplos

Recordemos que antes de realizar cualquier operación con límites habrá que evaluar el tipo de indeterminación

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{3} = e^{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{4n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-2n}\right)^{n}\right)^{4} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-2n}\right)^{-2n}\right)^{-\frac{1}{2}\cdot 4} = e^{-2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-1}{n^2+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+1}{n-1}}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+1}{n-1}}\right)^{\frac{n^2+1}{n-1}}\right)^{n\cdot\frac{n-1}{n^2+1}\cdot} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\frac{n-1}{n^2+1}} = e$$