Técnicas de recuento

Combinatoria

Definición

La combinatoria es la parte de las matemáticas dedicada a estudiar las agrupaciones, siguiendo unas determinadas reglas o condiciones, que pueden ser formadas cuando se toman todos, o algunos, de los elementos de un conjunto finito.

Ejemplo

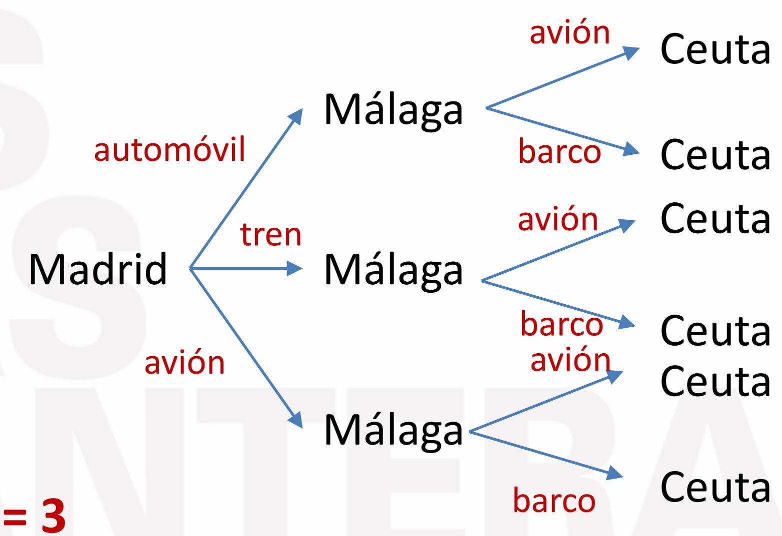
Con 12 alumnos de una clase se desea formar tres equipos de tres alumnos cada uno. ¿De cuántas maneras puede hacerse?

Principio de multiplicación

Si un procedimiento puede descomponerse en las etapas primera y segunda, y si existen **m** resultados posibles de la primera etapa y si, para cada uno de estos resultados, existen **n** resultados posibles para la segunda etapa, entonces el procedimiento entero puede realizarse, en el orden dado, de **m·n** formas.

Ejemplo

Una persona debe viajar de Madrid a Ceuta. Puede hacer el trayecto hasta Málaga en automóvil, avión o tren. De Málaga hasta Ceuta puede hacerlo en barco o en avión. ¿De cuántas formas diferentes puede hacer el viaje?



$n = 3$

$m = 2$

$n \cdot m = 3 \cdot 2 = 6$

Principio de la suma

Si una primera tarea puede realizarse de **m** formas distintas, mientras que una segunda tarea puede realizarse de **n** formas distintas, y no es posible realizar ambas tareas de manera simultánea, entonces, para llevar a cabo cualquiera de ellas pueden utilizarse cualquiera de **m+n** formas

Ejemplo

Un juego educativo se compone de cuadrados, triángulos y círculos de tamaños grandes y pequeños. Otro juego educativo también se compone de cuadrados, triángulos y círculos cada uno de ellos de 4 colores distintos. ¿Cuántas figuras tienen en total ambos juegos?

El primer juego se compone de 3x2= 6 figuras distintas.
El segundo juego se compone de 3x4 = 12 figuras distintas.
Entre los dos 6 + 12 = 18 figuras distintas

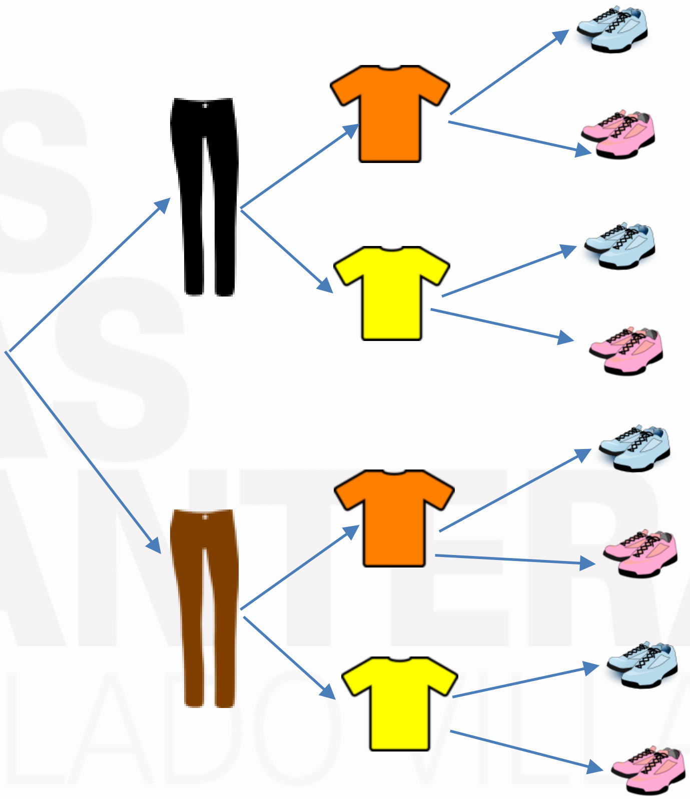
Diagrama de árbol

Un diagrama de árbol es una representación gráfica de un experimento que consta de etapas, donde cada una de ellas tiene un número finito de maneras de ser llevada a cabo.

Ejemplo

Tengo 2 pantalones, 2 camisetas y 2 pares de zapatillas. ¿De cuántas formas puedo ir vestido?

2 x 2 x 2 = 8



Factorial de un número

El factorial de un número entero positivo es el producto de todos los números enteros comprendidos desde 1 hasta dicho número.

Para representar el factorial de n se utiliza ***n!.*** Por definición 0! = 1

Ejemplos

(Cinco factorial) 5! = 1·2·3·4·5 = 120
(Ocho factorial) 8!= 1·2·3·4·5·6·7·8 = 40320

Definición mediante una función recursiva

$$n! = \begin{cases} 1 & si\ n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & si\ n > 0 \end{cases}$$

Permutaciones

Concepto

Si tengo *n* objetos { a_1 , a_2 , a_3 , ..., a_n } , los puedo colocar ordenadamente de muchas maneras:

$a_1 , a_2 , a_3 , ..., a_n$
$a_1 , a_3 , ..., a_n , a_2$
$a_2 , a_n , ..., a_3 , a_1$
etc.

Cada uno de estos grupos decimos que es una **permutación** de estos n elementos.

Número

El número de **permutaciones** de **n** elementos se denota por $\mathbf{P_n}$ y equivale a:

$$\mathbf{P_n = n.(n-1).(n-2). \dots .2.1}$$

El producto anterior se escribe abreviadamente **n!** y se lee "***factorial* de *n***".

A tener en cuenta

Para formar un grupo se toman todos los elementos.
Si se altera el orden, se tiene un grupo distinto.
No se repiten los elementos dentro de un mismo grupo

Ejemplo: permutaciones

Seis amigos salen en bici y van por la carretera en fila de a uno. ¿De cuántas formas pueden ir ordenados en la fila?

Solución

Cada configuración de la fila de ciclistas es una permutación pues:

Para formar un grupo se toman todos los elementos.

Si se altera el orden, se tiene un grupo distinto.

No se repiten los elementos dentro de un mismo grupo

El número de elementos es 6, por tanto, el número de permutaciones es:

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Permutaciones con repetición

Concepto

Si tengo *n* objetos { a_1 , a_2 , ..., a_n } , los puedo colocar ordenadamente de manera que se repitan r_1 veces el primero, r_2 veces el segundo, ..., y r_n veces el *n*-simo, formando grupos ordenados que reciben el nombre de *permutaciones con repetición*.

Número

El número de *permutaciones con repetición* de estos *n* elementos distintos, teniendo cada grupo *k* elementos a causa de las repeticiones (siendo $k = r_1 + r_2 + ... + r_n$), se denota por $P_K^{r_1\, r_2\, ...r_n}$ equivale a:

$$\boldsymbol{P_K^{r_1\, r_2\, ...r_n} = \frac{n!}{r_1!r_2!...r_n!}}$$

A tener en cuenta

Para formar un grupo se toman todos los elementos.
Si se altera el orden, se tiene un grupo distinto.
Hay repetición de los elementos dentro de un mismo grupo.

Ejemplo: permutaciones con repetición

¿Cuántas permutaciones se pueden formar con todas las letras de la palabra AYUNTAMIENTO?

Solución

Cada configuración de la permutación:

Para formarla se toman todos los elementos.

Si se altera el orden, se tiene una permutación distinta.

Se repiten las letras A, N y T dos veces dentro de un mismo grupo

Por tanto, se tratan de permutaciones con repetición:

k longitud de la palabra a formar

n número de elementos distintos que forman la permutación

r_1, r_2 y r_3 número de repeticiones de las letras que se pueden repetir

$$\boldsymbol{P_{12}^{2,2,2} = \frac{9!}{2!2!2!} = \frac{362880}{8} = 45360}$$

Variaciones

Concepto

Si tengo n objetos $\{ a_1 , a_2 , a_3 , ..., a_n \}$, puedo formar grupos ordenados de $m<n$ de ellos de muchas maneras:

Cada uno de estos grupos decimos que es una **variación** de estos n elementos tomados de m en m.

$a_1 , a_2 , a_3 , ..., a_m$

$a_1 , a_3 , ..., a_n , a_2$

$a_2 , a_{m+1} , ..., a_3 , a_1$

Número

El número de *variaciones* de n elementos tomados de m en m se denota por V_n^m , y equivale a:

$\mathbf{V_n^m = n.(n-1).(n-2). .... .(n-m+1),}$ que equivale a, $\boldsymbol{V_n^m} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n-m})!}$

A tener en cuenta

Para formar un grupo hay que seleccionar varios elementos

Si se altera el orden de un grupo, se tiene un grupo distinto.

No se repiten los elementos dentro de un mismo grupo

Ejemplo: variaciones

En un grupo de 20 alumnos se va a elegir un delegado y un subdelegado. ¿Cuántas elecciones distintas puede haber?

Solución

Cada configuración de la elección:

Para formarla se toman dos elementos.

Si se altera el orden, se tiene una elección distinta.

No se repiten los elementos dentro de un mismo grupo

Por tanto, se tratan de variaciones de 20 elementos tomados de dos en dos:

$$\mathbf{V_{20}^{2} = 20 \cdot 19 = 380}$$

$$\boldsymbol{V_{20}^{2} = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{18!} = 380}$$

Variaciones con repetición

Concepto

Si tengo *n* objetos { a_1 , a_2 , a_3 , ..., a_n }, puedo formar grupos ordenados de *m* de ellos, pudiéndose **repetir**, de muchas maneras:

Cada uno de estos grupos decimos que es una **variación con repetición** de estos n elementos tomados de m en m.

a_1 , a_1 , a_1 , ..., a_1
a_1 , a_1 , ..., a_1 , a_2
a_1 , a_1 , ..., a_1 , a_3
....

Número

El número de *variaciones con repetición* de *n* elementos tomados de *m* en *m* se denota por VR_n^m , y equivale a:

VR_n^m = n.n. (m veces).... .n = n^m que equivale a, $\boldsymbol{VR_n^m = n^m}$

A tener en cuenta

Hay que tener en cuenta el orden en que se colocan los elementos; si se altera el orden, se tiene un grupo distinto.

Se pueden repetir los elementos dentro de un mismo grupo

Se pueden formar variaciones con repetición de orden mayor que el número de objetos

Ejemplo: variaciones con repetición

¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar con el conjunto de dígitos $\{1,2,3,4,5\}$

Solución

Cada configuración de la elección:

Para formarla se toman 3 elementos.

Si se altera el orden, se tiene un número distinto

Serepiten los elementos dentro de un mismo grupo

Por tanto, se tratan de variaciones con repetición de 5 elementos tomados de tres en tres:

$$\boldsymbol{VR_5^3 = 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125}$$

Combinaciones

Concepto

Si tengo **n** objetos { a_1 , a_2 , a_3 , ..., a_n }, puedo formar subconjuntos (no ordenados) tomando m de ellos de muchas maneras:

Decimos que estos grupos o subconjuntos son **combinaciones** de estos n elementos de orden m, o también, tomados de m en m.

a_1 , a_2 , a_3 , ..., a_m
a_1 , a_2, a_4, ..., a_m , a_{m+1}
a_7, a_{13}, a_m , ..., a_{n-1} , a_n
etc.

Número

El número de *combinaciones* de *n* elementos tomados de *m* en *m* se denota por C_n^m , y equivale a:

$$C_n^m = \frac{V_n^m}{P_m} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \ \ldots. \ \cdot(n-m+1)}{m\cdot(m-1).\ \ldots.\ .2\cdot 1} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

A tener en cuenta

Para formar un grupo hay que seleccionar varios elementos

No influye el orden en que se colocan los elementos; si se altera el orden, se tiene el mismo grupo.

No se repiten los elementos dentro de un mismo grupo

Ejemplo: combinaciones

Al extraer (sin reemplazamiento) 4 cartas de una baraja española de 40 ¿cuántos resultados distintos se pueden obtener? (no tenemos en cuenta el orden en que se han extraído las cartas).

Solución

Cada configuración de la elección:

Para formarla se toman 4 cartas.

Si se altera el orden, no se tiene una configuración distinta

No se repiten los elementos dentro de un mismo grupo

Por tanto, se tratan de combinaciones de 40 elementos tomados de cuatro en cuatro:

$$\boldsymbol{C_{40}^{4}} = \frac{\boldsymbol{V_{40}^{4}}}{\boldsymbol{P_{4}}} = \frac{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{2193360}{24} = \mathbf{91.390}$$

Combinaciones con repetición

Concepto

Si tengo *n* objetos { a_1 , a_2 , a_3 , ..., a_n }, puedo formar grupos (no ordenados) tomando *m* de ellos, pudiéndose repetir, de muchas maneras. Decimos que estos grupos son *combinaciones con repetición* de estos *n* elementos de orden *m*, o también, tomados de *m* en *m*.

Número

El número de *combinaciones con repetición* de *n* elementos tomados de *m* en *m* se denota por CR_n^m , y equivale a:

$$\boldsymbol{CR_n^m = CR_{n+m-1}^m = \frac{V_{n+m-1}^m}{P_m}} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot \;....\; \cdot(n-m+1)}{m\cdot(m-1).\;....\;.2\cdot 1} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

A tener en cuenta

Para formar un grupo hay que seleccionar varios elementos (eventualmente todos).

No influye el orden en que se colocan los elementos; si se altera el orden, se tiene el mismo grupo.

Se pueden repetir los elementos dentro de un mismo grupo

Ejemplo: combinaciones con repetición

Una heladería prepara copas de helados con 3 bolas de helado elegidas de entre 18 sabores diferentes ¿Cuántos copas distintas pueden preparar si las 3 bolas pueden tener sabores repetidos?

Solución

Cada configuración de la elección:

Para formarla se toman 3 sabores.

Si se altera el orden, no se tiene una configuración distinta del helado

Se pueden repetir los elementos dentro de un mismo grupo

Por tanto, se tratan de combinaciones con repetición de 18 elementos tomados de tres en tres:

$$\boldsymbol{CR_{18}^{3} = C_{18+3-1}^{3} \frac{V_{20}^{3}}{P_{3}}} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{1.140}$$

Binomio de Newton

El binomio de Newton es una fórmula que proporciona el desarrollo de la potencia n-ésima de un binomio, siendo n un entero positivo.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Donde $\binom{n}{k}$, conocido como coeficiente binomial, se lee n sobre k, y se corresponde con las combinaciones de n elementos tomados de k en k.

Ejemplo

$$(3x+1)^4 = \sum_{k=0}^{4} C_4^k \cdot (3x)^{4-k} \cdot 1^k = 1 \cdot (3x)^{4-0} \cdot 1^0 + 4 \cdot (3x)^{4-1} \cdot 1^1$$

$$+6 \cdot (3x)^{4-2} \cdot 1^2 + 4 \cdot (3x)^{4-3} \cdot 1^3 + 1 \cdot (3x)^{4-4} \cdot 1^4$$

$$= 81x^4 + 108x^3 + 54x^2 + 12x + 1$$

Propiedades de los números combinatorios

Para calcular los coeficientes binomiales podemos utilizar las siguientes propiedades de los números combinatorios:

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{n-1} = n$$

$$Si\ n \geq k\ entonces\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$Si\ n > k\ entonces\ \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

El triángulo de Pascal

Para calcular los coeficientes binomiales podemos utilizar el triángulo de Pascal. Cada elemento de una fila se ha calculado sumando los números de la fila superior y que se encuentran inmediatamente encima del número.

Triángulo de Pascal para n = 10