Probabilidad

Definiciones

Experimento aleatorio

Experimento cuyo resultado no se puede predecir

Espacio muestral

Conjunto formado por todos los resultados posibles del experimento aleatorio.

Suceso de un experimento aleatorio

Subconjunto del espacio muestral

Espacio de sucesos

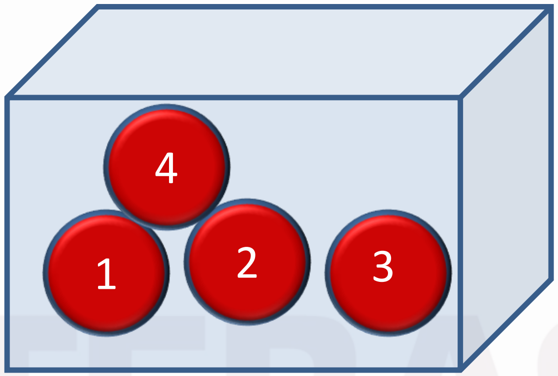
El conjunto de todos los sucesos de un experimento aleatorio.

Ejemplo

En una urna hay cuatro bolas numeradas del 1 al 4. Extraemos una al azar y anotamos su número.

Espacio muestral $\{1,2,3,4\}$

¿Qué elementos componen el suceso "Obtener un número par? $\{2,4\}$



El espacio de sucesos está compuesto por:

$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}\{1,3\}\{2,3\}\{1,2,3\}\}$

Sucesos

Suceso elemental

Aquel que tiene un único elemento

Suceso seguro

Aquel que siempre se realiza

Suceso imposible

Aquel que no se puede realizar

Suceso contrario

Aquel que se realiza cuando un suceso A no se realiza. Se representará por $\bar{A}$.

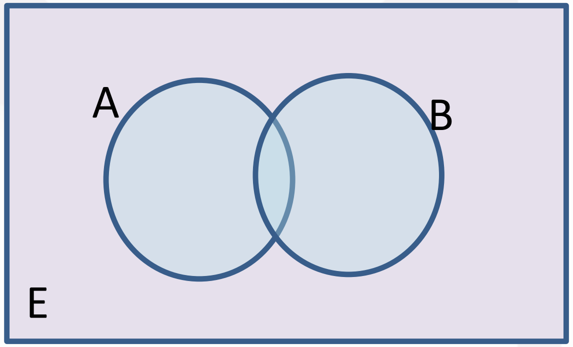
Ejemplo

Sea el experimento aleatorio: lanzar un dado y observar la cara superior.

Suceso elemental	Obtener un 6
Suceso seguro	Obtener un número entre 1 y 6
Suceso imposible	Obtener un 7
Suceso contrario	Obtener un número par es el suceso contrario a obtener un número impar

Operaciones con sucesos: unión

Dados dos sucesos *A*y *B* de un mismo experimento aleatorio, se denomina **suceso unión** de *A* y *B* el que se produce cuando se realiza *A* o *B*, es decir, alguno de los dos. Se designará por $A \cup B$.



Experimento aleatorio: extraer una carta de una baraja española (40 cartas, 4 palos de 10 cartas, del 1 al 7 en cada palo y 3 figuras por palo)

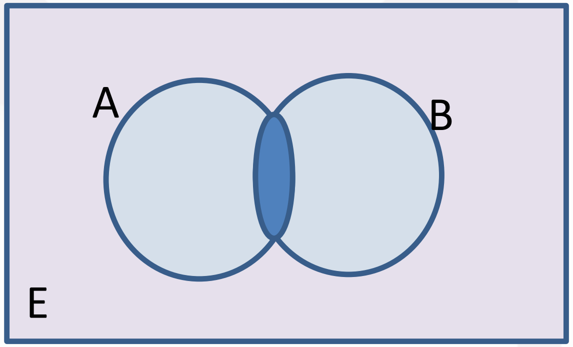
A = obtener una carta del palo de oros (10 elementos)

B = obtener una figura (12 elementos)

A U B = obtener una carta del palo de oros o una figura (19 elementos)

Operaciones con sucesos: Intersección

Dados dos sucesos, A y B, de un mismo experimento aleatorio, se denomina **suceso intersección** de A y B al que se produce cuando se realizan simultáneamente los sucesos A y B. Se designa por $A \cap B$.



Experimento aleatorio: extraer una carta de una baraja española (40 cartas, 4 palos de 10 cartas, del 1 al 7 en cada palo y 3 figuras por palo)

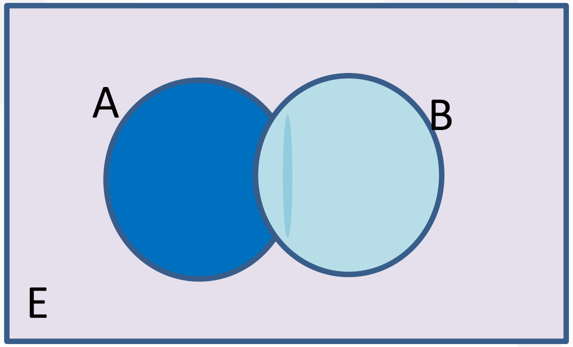
A = obtener una carta del palo de oros (10 elementos)

B = obtener una figura (12 elementos)

A ∩ B = obtener una figura del palo de oros (3 elementos)

Operaciones con sucesos: diferencia

Dados dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, se llama **suceso diferencia** de A y B al que se produce cuando se realiza el suceso A, pero no se realiza B. Se designará por $A - B = A \cap \bar{B}$.



Experimento aleatorio: extraer una carta de una baraja española (40 cartas, 4 palos de 10 cartas, del 1 al 7 en cada palo y 3 figuras por palo)

A = obtener una carta del palo de oros (10 elementos)

B = obtener una figura (12 elementos)

A - B = obtener una carta del palo de oros que no sea figura (7 elementos)

Sucesos incompatibles

Si A y B son sucesos del mismo experimento aleatorio, se tiene que:

Si $A \cap B = \emptyset$ entonces se dice que A y B son **incompatibles**

Si $A \cap B \neq \emptyset$ entonces se dice que A y B son **compatibles**

Ejemplo

A = obtener una carta del palo de oros

B = obtener una carta del palo de copas

C= obtener una figura

A y B son incompatibles pues no hay ninguna carta que sea a la vez de oros y copas, es decir, $A \cap B = \emptyset$

A y C son compatibles pues hay figuras que son del palo de oros, es decir, $A \cap B \neq \emptyset$

Espacio muestral equiprobable

Un **espacio muestral es equiprobable** si consta de un número de sucesos simples y todos ellos tienen la misma probabilidad de suceder.

Ejemplo

Sea el experimento aleatorio "lanzar dos dados y sumar el resultado obtenido en ambos"

	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

El espacio muestral a utilizar será el producto cartesiano de las puntuaciones de ambos dados, pues cada uno de los elementos es equiprobables.

Regla de Laplace

Si un espacio muestral es **equiprobable**, entonces la probabilidad de un suceso A es el cociente entre el número de casos favorables al suceso A y el número de casos posibles.

Ejemplo

Calculemos la probabilidad de que al lanzar 2 monedas salgan 2 caras. El espacio muestral tiene los siguientes elementos (C representa obtener “cara” y X representa obtener “cruz”).

$$E = \{(C,C),(C,X),(X,C),(X,X)\}$$

Los elementos del espacio muestral son equiprobables

$$A = \{(C,C)\}$$

El suceso únicamente tiene un elemento

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{1}{4}}$$

El número de elementos del espacio muestral es 4 mientras que el número de elementos del suceso A es 1.

Ejemplo

Una experiencia aleatoria consiste en lanzar tres monedas al aire. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

El espacio muestral está formado por:

$$E = \{(CCC), (CCX)(CXC)(XCC)(CXX)(XCX)(XXC)(XXX)\}$$

A = Obtener tres caras

$$A = \{(CCC)\}\ por\ tanto\ P(A) = \frac{1}{8}$$

B = Obtener dos caras y una cruz

$$B = \{(CCX)(CXC)(XCC)\}\ por\ tanto\ P(B) = \frac{3}{8}$$

C = Obtener una cara y dos cruces

$$B = \{(CXX)(XCX)(XXC)\}\ por\ tanto\ P(C) = \frac{3}{8}$$

Definición axiomática de probabilidad

Se denomina **probabilidad** a una **función** que asocia a cada suceso ***A***, de un espacio de sucesos, un número real que llamamos probabilidad de *A* y representamos por ***P(A)*** que cumple los siguientes axiomas:

1. La probabilidad de un suceso cualquiera es positiva o nula: $P(A) \geq 0$
2. La probabilidad del suceso seguro es igual a la unidad $P(E) = 1$
3. La probabilidad de la unión de dos sucesos incompatibles es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Consecuencias de los axiomas

1. Probabilidad del suceso contrario

$$\boldsymbol{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}$$

2. Probabilidad del suceso imposible

$$\boldsymbol{P(\emptyset) = 0}$$

3. Si A y B son dos sucesos compatibles de un mismo experimento aleatorio, se verifica que la probabilidad de la unión A y B es igual a la suma de las probabilidades de cada uno de ellos menos la probabilidad del suceso intersección de A y B:

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Ejemplo I

Se lanza dos veces un dado cúbico, con sus caras numeradas del 1 a 6.
Calcularemos la probabilidad de los siguiente sucesos:
El espacio muestral está formado por:

	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

A = Obtener algún 6.

$$P(A) = \frac{11}{36}$$

B = No obtener ningún 6.

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$$

Ejemplo II

En una urna hay 10 bolas numeradas del 1 al 10. Se extrae una bola al azar y se anota su número. Se consideran los siguientes sucesos:
A= “Salir una bola con numeración impar”
B=”Salir una bola con un número primo”

Calcula $\mathrm{P}(A \cup B)$

$$A = \{1,3,5,7,9\} \qquad B = \{2,3,5,7\} \qquad A \cap B = \{3,5,7\}$$

$$\mathrm{P}(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{10} + \frac{4}{10} - \frac{3}{10} = \frac{6}{10}$$

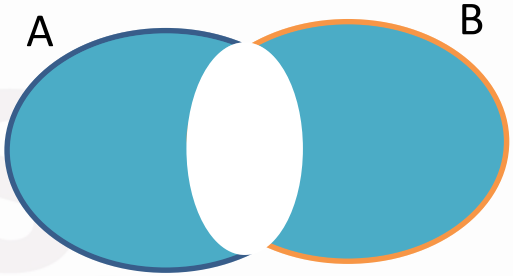
Ejemplo III

En un sorteo la probabilidad de ganar un perrito piloto es de 0,6 y de ganar una muñeca 0,3 . La probabilidad de ganar los dos premios es de 0,01 . Calcular la probabilidad de ganar solo uno de los 2 regalos.

Solución

A = Ganar el perrito piloto

B = Ganar la muñeca



La probabilidad pedida (en el diagrama coloreada de verde) se puede expresar como

$$P\big((A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)\big) = P(A\cap\bar{B}) + P(\bar{A}\cap B) = P(A) - P(A\cap B) + P(B) - P(A\cap B)$$

Los sucesos son incompatibles   Se trata de la diferencia de sucesos

$$= 0{,}6 - 0{,}01 + 0{,}3 - 0{,}01 = 0{,}9 - 0{,}02 = 0{,}88$$

PROBABILIDAD CONDICIONADA

Definición

Se define probabilidad condicionada del suceso A respecto del suceso B, y se denotará por P(A/B), al siguiente cociente:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) \neq 0$$

Importante

La probabilidad condicionada de B respecto del suceso A es

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

De las anteriores fórmulas se deduce que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B / A)$$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A / B)$$

Ejemplo

La siguiente tabla muestra el número de alumnos que han aprobado o suspendido en dos clases distintas

	Aprobados	Suspensos	
Clase C	12	18	30
Clase B	13	7	20
	25	25	50

Sea C= Pertenecer a la clase C

$$P(C) = \frac{30}{50}$$

Sea A= Haber aprobado

$$P(A) = \frac{25}{50}$$

Sea $A \cap C$= haber aprobado y ser de la clase C

$$P(A \cap C) = \frac{12}{50}$$

A/C = Haber aprobado condicionado a pertenecer a la clase C

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{12}{50} : \frac{30}{50} = \frac{12}{30}$$

Ejemplo

Se dispone de una urna que contiene 10 bolas rojas y 15 azules. Se realizan dos extracciones sucesivas, sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean azules?

Sea A_1= la primera bola extraída ha sido azul.
Sea A_2= la segunda bola extraída ha sido azul.

$$\boldsymbol{P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) = \frac{15}{25} \cdot \frac{14}{24}}$$

Primera extracción	Segunda extracción
15 bolas azules 10 bolas rojas	14 bolas azules 10 bolas rojas
Se extrae una azul	Se extrae una azul

Sucesos independientes

Dos sucesos A y B son independientes si y sólo si

$$P(B) = P(B/A)$$

Se puede expresar la independencia de sucesos mediante la condición:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ejemplo sucesos independientes

Ejemplo

Se extraen dos cartas de una baraja española. Calculad la probabilidad de que sean dos figuras cuando hay devolución de la primera carta extraída y cuando no se devuelve.

Solución

Sea A_1 la primera carta extraída es una figura
Sea A_2 la segunda carta extraída es una figura
En ambos casos se pide $P(A_1 \cap A_2)$.

a) Hay devolución, los sucesos son independientes:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{12}{40} \cdot \frac{12}{40}$$

b) No hay devolución, los sucesos no son independientes:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) = \frac{12}{40} \cdot \frac{11}{40}$$

Ejemplo

Ejemplo

En una granja hay 16 conejos blancos y 14 conejos negros. Se eligen al azar tres de aquellos. ¿Cuál es la probabilidad de haber seleccionado 3 conejos blancos?

Solución

Sea A_1, A_2 y A_3 seleccionar en la primera, segunda y tercera extracción un conejo blanco.
Se pide calcular $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$, pero estos sucesos no son independientes, por tanto:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{16}{30} \cdot \frac{15}{29} \cdot \frac{14}{28} = \frac{3360}{24.360} = 0{,}137$$

Tablas de contingencia

Las tablas de contingencia se construyen atendiendo a dos sucesos y sus complementarios. La estructura se presenta en la siguiente tabla relativa a los sucesos A y B.

En cada celda se pueden disponer probabilidades (el total de totales será 1) o bien las frecuencias a partir de las cuales se pueden calcular las probabilidades.

	A	$\overline{A}$	TOTAL
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
TOTAL	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

Ejemplo

De 120 enfermos, 48 tienen ictericia, 36 tienen fiebre, y 12 tienen ambos síntomas. Escogemos un enfermo al azar

a) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga uno de los dos síntomas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga fiebre, sabiendo que tiene ictericia?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que solo tenga fiebre?

$A \equiv Tener\ ictericia$

$B \equiv Tener\ fiebre$

	A	$\overline{A}$	TOTAL
B	12	24	36
$\overline{B}$	36	48	84
TOTAL	48	72	120

$$a)\ \ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{48}{120} + \frac{36}{120} - \frac{12}{120} = \frac{72}{120}$$

$$b)\ \ P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

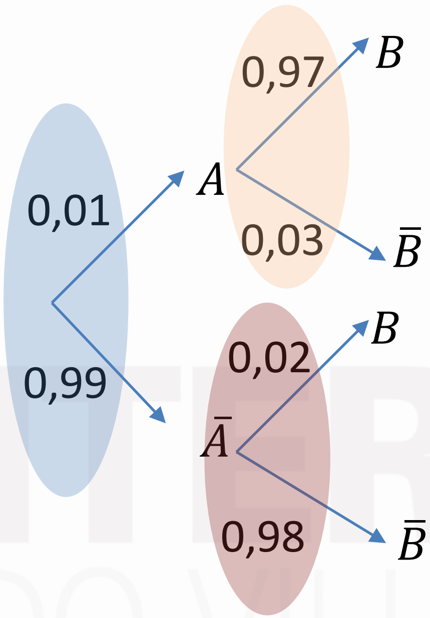
Diagrama de árbol

Un diagrama de árbol es una herramienta que se utiliza para determinar todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Para la construcción de un diagrama de árbol se partirá poniendo una rama para cada una de las posibilidades, acompañada de su probabilidad. De cada nodo partirá, cuando se corresponda, otro nivel del árbol.

Cada rama, estará acompañada de la probabilidad del suceso.

La suma de las probabilidades de los nodos de igual nivel deben sumar siempre 1.



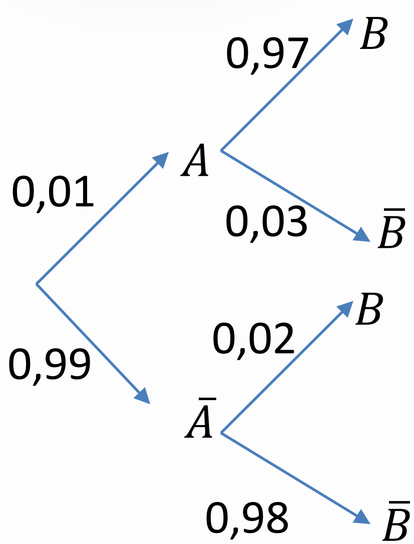
Ejemplo

El 1% de la población de un determinado lugar padece una enfermedad. Para detectar esta enfermedad se realiza una prueba de diagnóstico. Esta prueba da positiva en el 97% de los pacientes que padecen la enfermedad; en el 98% de los individuos que no la padecen da negativa. Si elegimos al azar un individuo de esa población:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el individuo dé positivo y padezca la enfermedad?

b) Si sabemos que ha dado positiva, ¿cuál es la probabilidad de que padezca la enfermedad?

$A \equiv Tener\ la\ enfermedad$ $\qquad B \equiv Dar\ positivo\ en\ el\ test$



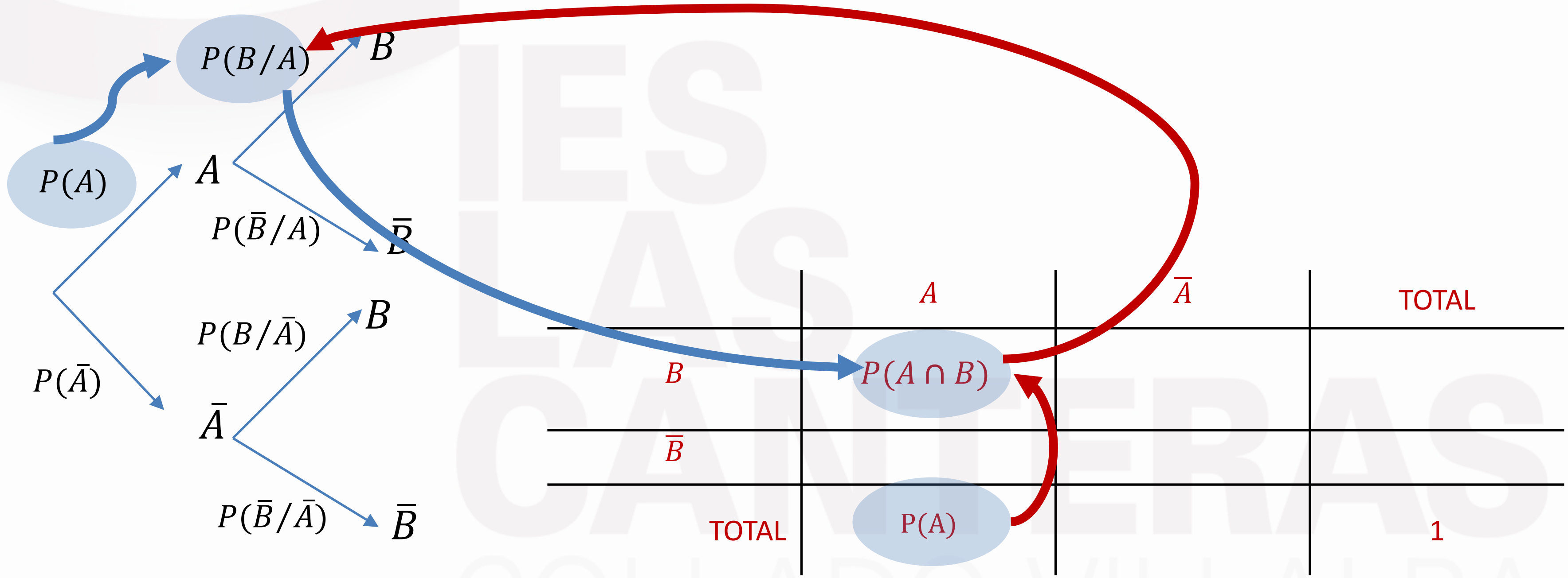
$$P(A \cap B) = 0{,}01 \cdot 0{,}97 = 0{,}0097$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}0097}{0{,}0097 + 0{,}0198} = 0{,}33$$

Árbol vs tabla

Es posible construir una tabla de contingencia a partir de un diagrama de árbol y viceversa. Únicamente hay que tener en cuenta la definición de probabilidad condicionada:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



Teorema de la probabilidad total

Sean $A_1, A_2,\ldots., A_n$ un sistema completo de sucesos cuya probabilidad de cada uno de ellos es distinto de cero y sea un suceso B tal que se conocen todas las probabilidades del tipo $B\ /\ A_i$. Se puede calcular la probabilidad del suceso B como:

$$P(B) = P(A_1)\cdot(B/A_1) + P(A_2)\cdot(B/A_2) + \cdots + P(A_n)\cdot(B/A_n)$$

Ejemplo: teorema de probabilidad total

Ejemplo

En un instituto hay 3 clases de bachillerato con 24, 36 y 20 alumnos. Han aprobado en la primera clase el 25%, en la segunda el 45% y en la tercera el 50%. Calcular la probabilidad de que un alumno elegido al azar haya aprobado.

Solución

Sea A_1, A_2 y A_3 los sucesos que representan el grupo al que pertenece un alumno.
Sea B el suceso aprobar

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + P(A_3) \cdot P(B/A_3) =$$
$$= \frac{24}{80} \cdot \frac{25}{100} + \frac{36}{80} \cdot \frac{45}{100} + \frac{20}{80} \cdot \frac{50}{100} = \frac{600 + 1620 + 700}{8000} = 0{,}365$$

Teorema de Bayes

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos cuya probabilidad de cada uno de ellos es distinto de cero y sea un suceso B tal que se conocen todas las probabilidades del tipo $B\ /\ A_i$. El teorema de Bayes establece que las probabilidades $P(A_i/B)$ vienen dadas por la siguiente expresión:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)\cdot P(B/A_i)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1) + P(A_2)\cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_n)\cdot P(B/A_n)}$$

$P(A_i)$ se denominan probabilidades a priori

$P(B/A_i)$ se denominan verosimilitudes

$P(A_i/B)$ se denominan probabilidades a posteriori

Ejemplo: teorema de Bayes

Ejemplo

En dos bolsas tenemos bolas blancas y negras. En la primera hay 15 blancas y 10 negras. En la segunda 20 blancas y 25 negras. Se elige una bolsa al azar y se extrae una bola. Si la bola es negra, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido elegida la segunda bolsa?

Solución

Sean los sucesos:

$A_1 \equiv La\ bola\ extraida\ es\ de\ la\ primera\ bolsa$

$A_2 \equiv La\ bola\ extraida\ es\ de\ la\ segunda\ bolsa$

B ≡ la bola extraída es blanca

N ≡ la bola extraída es negra

$$P(A_2/N) = \frac{P(A_2)\cdot P(N/A_2)}{P(A_1)\cdot P(N/A_1) + P(A_2)\cdot P(N/A_2)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{45}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{25}+\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{45}} = \frac{0{,}28}{0{,}2+0{,}28} = 0{,}58$$

La distribución Binomial y Normal

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Variable aleatoria

Se llama variable aleatoria a una función definida en el espacio muestral de un experimento aleatorio que asocia a cada elemento del espacio un número real.

Las variables aleatorias pueden ser:

Discreta: cuando sólo puede tomar valores aislados.

Continua: puede tomar todos los posibles valores de un intervalo de números reales.

En general, las medidas suelen dar variables aleatorias continuas, mientras que los conteos suelen dar variables aleatorias continuas.

Ejemplos

Variable aleatoria discreta:
Al realizar el experimento aleatorio "lanzar una moneda tres veces", a cada resultado posible se le asigna el número de cruces. En este caso el recorrido de la función será {0,1,2,3]

{C,C,C} -> 3	{C,X,X} -> 1
{C,C,X} -> 2	{X,C,X} -> 1
{C,X,C} -> 2	{X,X,C} -> 1
{X,C,C} -> 2	{X,X,X} -> 0

Variable aleatoria continua:
Al realizar el experimento "medir la presión sistólica de 100 individuos". De forma implícita se ha definido la variable aleatoria, pues a cada individuo se le asigna el número correspondiente a su presión sistólica.

Función de probabilidad

Se define función de probabilidad de una variable aleatoria discreta *X* a la aplicación que asocia a cada valor de la variable aleatoria discreta su probabilidad p.

Ejemplo

Variable aleatoria discreta:
Al realizar el experimento aleatorio "lanzar una moneda tres veces", a cada resultado posible se le asigna el número de cruces. En este caso el recorrido de la función será {0,1,2,3]

{C,C,C} -> 3
{C,C,X} -> 2
{C,X,C} -> 2
{X,C,C} -> 2
{C,X,X} -> 1
{X,C,X} -> 1
{X,X,C} -> 1
{X,X,X} -> 0

Función de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 1/8 & x = 0 \\ 3/8 & x = 1 \\ 3/8 & x = 2 \\ 1/8 & x = 3 \end{cases}$$

Propiedades de las funciones de probabilidad

1. Cada una de las probabilidades asignadas a cada valor de la variable aleatoria tienen un valor entre 0 y 1

$$0 \leq p_i \leq 1, para\ i = 1,2,..,n$$

2. La suma de las probabilidades asignadas es 1:

$$\sum_{I=1}^{n} p_i = 1$$

3. $\mathrm{P}(\mathrm{a} \leq \mathrm{X} \leq \mathrm{b}) = \mathrm{P}(\mathrm{a}) + \mathrm{P}(\mathrm{a}+1) + \cdots + \mathrm{P}(\mathrm{b}-1) + \mathrm{P}(\mathrm{b})$
4. $P(X \leq b) = 1 - P(X > b)$

Media y varianza de una variable aleatoria discreta

Si X es una variable aleatoria que toma los valores $x_1, x_2, \dots.., x_n$ con probabilidades $p_1, p_2, \dots.., p_n$ respectivamente. Se tiene:

Esperanza o Media:

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

Varianza:

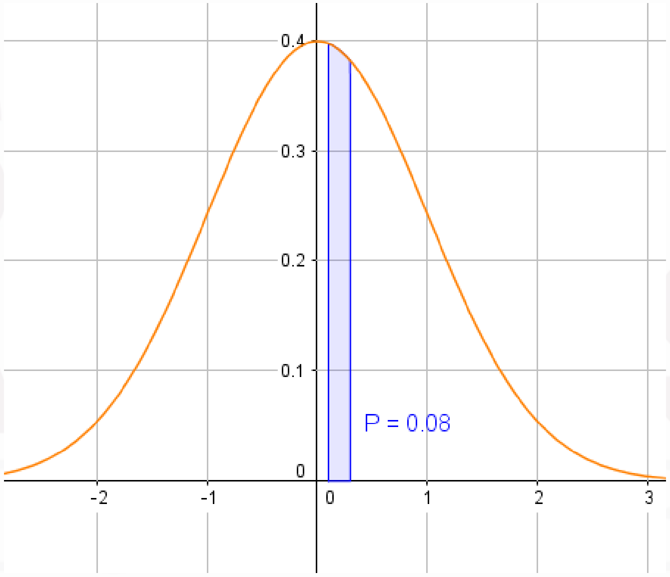
$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \cdot p_i - \mu^2$$

Función de densidad de una variable aleatoria continua

Una función ***f(x)*** es admisible como función de densidad de una variable aleatoria continua si:

1. $\mathrm{f(x)} \geq 0$ en todo el dominio de definición de la función
2. El área limita por la gráfica de la función y el eje OX es igual a 1.

La probabilidad $P(a \leq X \leq b)$ será el área limitada por la curva y el intervalo $[a, b]$.



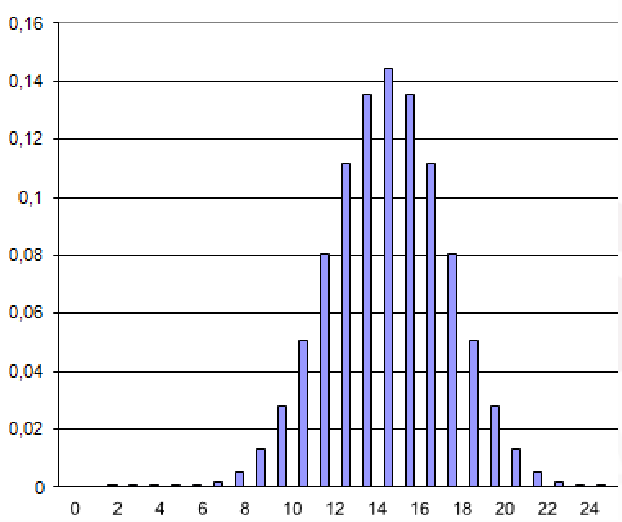
Distribución de Bernoulli

La distribución de Bernoulli, es una distribución discreta que toma el valor 1 para la probabilidad de éxito (***p***) y el valor 0 para la probabilidad de fracaso (***q=1-p***)

La media y la varianza de una de estas variables son respectivamente:

$$\mu = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$$

$$\sigma^2 = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p - \mu^2 = p - p^2 = p(1-p)$$



Distribución Binomial

La distribución binomial es una distribución de probabilidad discreta que cuenta el número de éxitos en una secuencia de ***n*** ensayos de Bernoulli que son independientes entre sí, con una probabilidad ***p*** de éxito.

La distribución binomial está caracterizada por el número de ensayos (***n***) y la probabilidad de éxito (***p***), representándose como B(n;p).

La función de probabilidad de la distribución binomial es:

$$P(obtener\ i\ éxitos) = P(X = i) = \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot q^{n-i}$$

La media y la varianza de una de estas variables son respectivamente:

$$\mu = np$$

$$\sigma^2 = npq$$

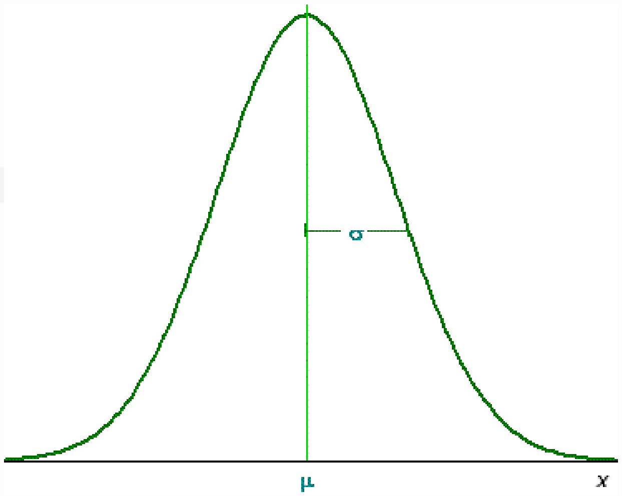
La distribución Normal

Una variable aleatoria continua ***X*** sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ, si se cumplen las siguientes condiciones:

1. La variable puede tomar cualquier valor real $(-\infty, +\infty)$.
2. La función de densidad de la distribución normal es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

La distribución normal se notará por $N(\mu; \sigma)$



Propiedades de la función de densidad

Su dominio es toda la recta real

Es simétrica respecto de la recta x = μ

El único punto de corte con los ejes es $\left(0, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2}\right)$

Dispone de una asíntota horizontal que coincide con el eje de abscisas

La función tiene un máximo absoluto en x = μ

Los puntos de inflexión se encuentran en x = μ - σ y x = μ + σ

El área encerrada entre la curva y el eje de abscisas es 1, pues se trata de una función de densidad.

Distribuciones normales

Una distribución normal se encuentra definida totalmente si se conoce su media y su desviación típica. La primera determina el eje de simetría y el valor donde se encuentra el máximo de la función, mientras que la varianza determina la dispersión de los valores

Como se muestra en la imagen, todas las distribuciones normales tienen la misma forma, siendo más estilizadas cuanto menor es la desviación típica.
El desplazamiento a lo largo del eje de abscisas se debe al valor de la media.

Tipificación de la variable y uso de tablas

La distribución N(0;1), cuya variable se representa por ***Z***, se encuentra tabulada permitiendo un cálculo rápido de las probabilidades.

La tabla de la distribución N(0;1) puede utilizarse para el cálculo de cualquier probabilidad asociada a cualquier otra normal, únicamente hay que centrar y dilatar o contraer la gráfica dependiendo de la distribución.

Si ***X*** representa la distribución normal N(μ; σ) a tipificar, entonces:

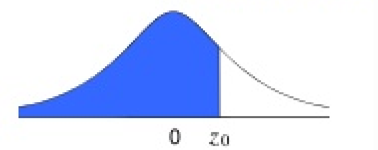
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

La tabla de la N(0;1)

z_0	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	z_0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	[illegible]	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	[illegible]	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	[illegible]	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	[illegible]	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	[illegible]	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	[illegible]	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	[illegible]	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	[illegible]	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	[illegible]	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	[illegible]	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	[illegible]	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	[illegible]	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952	2,5
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964	2,6
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	2,7
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981	2,8
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986	2,9
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900	3,0
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929	3,1
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950	3,2
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965	3,3
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976	3,4
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983	3,5
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989	3,6
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992	3,7
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995	3,8
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997	3,9

Los valores de la tabla es al probabilidad acumulada inferior de la distribución N(0;1)

$P(Z \leq Z_\alpha)$



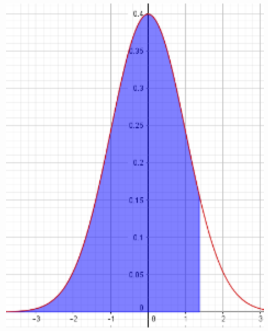
Para calcular $P(Z \leq 1{,}33)$ deberemos desplazarnos hasta la fila correspondiente al valor 1,3 y dentro de esta fila hasta la columna cuya etiqueta se corresponde con el valor 0,3.

Por tanto:

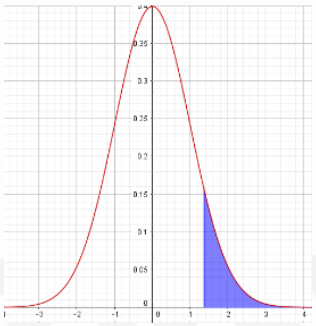
$$P(Z \leq 1{,}33) = 0{,}9082$$

Cálculos utilizando la tabla I

$\boldsymbol{P(Z \leq a)}$. La probabilidad se obtiene directamente de la tabla, mirando en la fila correspondiente a las unidades y décimas, y en la columna las centésimas.



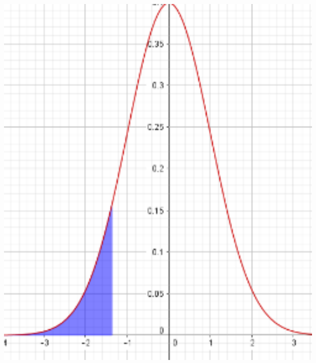
$\boldsymbol{P(Z > a)}$ siendo $a > 0$. La probabilidad se obtiene utilizando el complementario. $\boldsymbol{P(Z > a) = 1 - P(Z \leq a)}$



Cálculos utilizando la tabla II

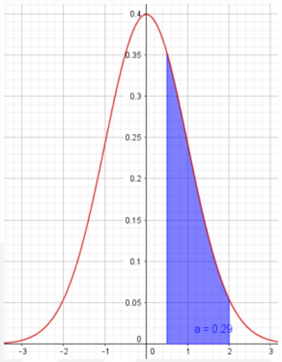
$P(Z<-a)$ siendo a >0. La probabilidad se obtiene aprovechando la simetría de la función:

$$P(Z<-a)=1-P(Z\leq a)$$



$P(a\leq Z\leq b)$. La probabilidad se obtiene calculando:

$$P(a\leq Z\leq b)=P(Z\leq b)-P(Z\leq a)$$



Aproximar la distribución binomial por una distribución normal

La distribución binomial del número de éxitos en n pruebas independientes de Bernoulli con probabilidad de éxito p en cada intento es, aproximadamente, una distribución normal de media $\boldsymbol{np}$ y desviación típica $\sqrt{\boldsymbol{npq}}$ (siendo ***q=1-p***), esta aproximación es admisible cuando se verifican simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\boldsymbol{np \geq 5 \ y \ nq \geq 5}$$