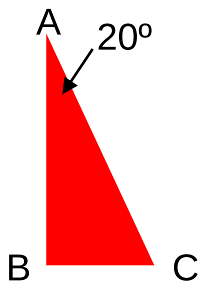
EJERCICIOS DE TRIGONOMETRÍA CON SOLUCIONES

Aplicaciones a la geometría

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

En un rectángulo se conocen la hipotenusa que mide 15 cm y un ángulo que mide 20º. Calcula el resto de los elementos del triángulo

Al tratarse de un triángulo rectángulo los ángulos que no se conocen valen 90º y 70º. Para calcular los dos catetos utilizaremos, por ejemplo, el seno de 20º y el teorema de Pitágoras.



$$sen\hat{A} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow sen 20^{o} = \frac{BC}{15} \Rightarrow 0'342 = \frac{BC}{15} \Rightarrow \boxed{BC = 5'13cm}$$

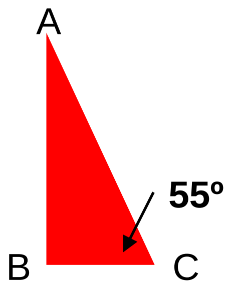
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow 15^2 = AB^2 + 5'13^2 \Rightarrow AB^2 = 15^2 - 5'13^2$$

$$AB = \sqrt{15^2 - 5'13^2} = \sqrt{225 - 26,3169} = \boxed{14,09\text{cm}}$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

En un triángulo rectángulo se conoce un cateto que mide 102,4 y el ángulo que forma junto con la hipotenusa (55º). Resuelve el triángulo

Al tratarse de un triángulo rectángulo los ángulos que no se conocen valen 90º y 35º. Para calcular los dos catetos utilizaremos, por ejemplo, la tangente y el coseno de 55º (se podría utilizar el teorema de Pitágoras para el último cálculo).



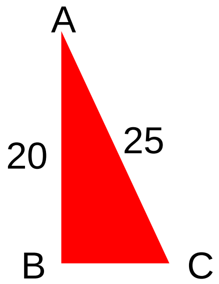
$$tg\hat{C} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow sen 55^{o} = \frac{AB}{102,4} \Rightarrow 0,82 = \frac{AB}{102,4} \Rightarrow \boxed{AB = 83,968}$$

$$\cos\hat{C} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \cos 55^{o} = \frac{102,4}{AC} \Rightarrow 0'57 = \frac{102,4}{AC} \Rightarrow \boxed{AC = 179,64}$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 25 m y un cateto 20m. Resuelve el triángulo.

Vamos a utilizar el teorema de Pitágoras para calcular el otro cateto, posteriormente calcularemos mediante el arcoseno un ángulo.



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow 25^2 = 20^2 + BC^2 \Rightarrow BC^2 = 625 - 400 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BC^2 = 225 \Rightarrow BC = 15m$$

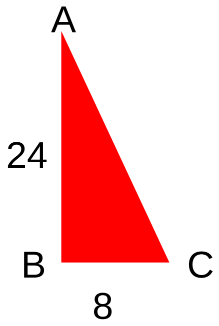
$$sen\hat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0'6 \Rightarrow \hat{A} = arcsen(0'6) = 36'87^{o}$$

Por tanto, el otro ángulo mide 53'13º (la suma debe medir 90º)

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Los catetos de un triángulo mide 8 cm y 24 cm. Halla los restantes elementos del triángulo

Vamos a utilizar el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa, posteriormente calcularemos mediante el arcoseno un ángulo.



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 24^2 + 8^2 \Rightarrow AC^2 = 576 + 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC^2 = 640 \Rightarrow AC = 25'3$$

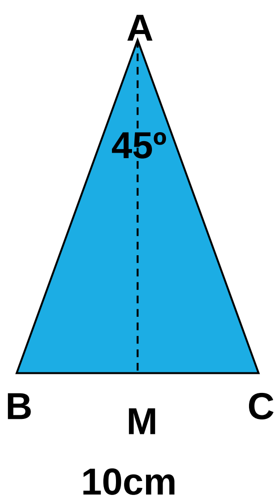
$$sen\hat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{25'3} = 0'316 \Rightarrow \hat{A} = arcsen(0'6) = 18'43^{o}$$

Por tanto, el otro ángulo mide $71'57^{o}$ (la suma debe medir 90^{o})

APLICACIONES A LA GEOMETRÍA

Calcula el radio y la apotema de un octógono de lado 10 cm

Un octógono está formado por 8 triángulos isósceles, por lo que dispone de 2 lados y 2 ángulos iguales. El ángulo desigual mide 360º/8=45º.



Tomando el triángulo rectángulo AMC, sabemos que el ángulo en A vale la mitad de 45º y MC vale 5, por tanto utilizando el seno y el teorema de Pitágoras podremos calcular los datos solicitados

$$sen\hat{A} = \frac{MC}{AC} \Rightarrow sen 22'5º = \frac{5}{AC} \Rightarrow AC = \frac{5}{0'38} \boxed{= 13'15}$$

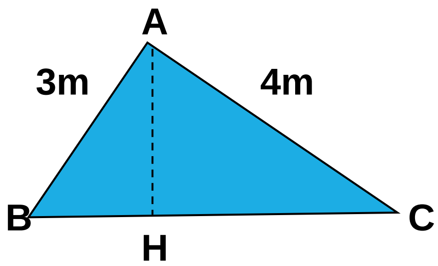
$$AC^2 = AM^2 + MC^2 \Rightarrow 13'15^2 = AM^2 + 5^2 \Rightarrow AM^2 = 172'9 - 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{AM = 12'16}$$

APLICACIONES A LA GEOMETRÍA

Los catetos de un triángulo rectángulo son 3 y 4 metros. Halla la altura correspondiente a la hipotenusa (1ª parte)

Primero calcularemos la hipotenusa del triángulo ABC, para posteriormente trabajar con los triángulos rectángulos ABH y AHC



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow BC = 5$$

Triángulo ABH $AB^2 = BH^2 + AH^2 \Rightarrow 9 = BH^2 + AH^2$

Triángulo AHC $AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow 16 = CH^2 + AH^2$

Teniendo en cuenta también que: $\mathrm{BH} + \mathrm{HC} = 5$ disponemos de un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas que podemos resolver para calcular nuestro objetivo que es AH

APLICACIONES A LA GEOMETRÍA

Los catetos de un triángulo rectángulo son 3 y 4 metros. Halla la altura correspondiente a la hipotenusa (2ª parte)

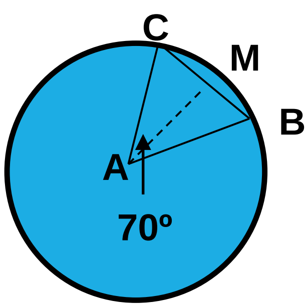
$$\begin{cases} 9 = BH^2 + AH^2 \\ 16 = CH^2 + AH^2 \\ \mathrm{BH} + \mathrm{HC} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BH = \sqrt{9 - AH^2} \\ CH = \sqrt{16 - AH^2} \\ \mathrm{BH} + \mathrm{HC} = 5 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{9 - AH^2} + \sqrt{16 - AH^2} = 5$$

$$\sqrt{9 - AH^2} = 5 - \sqrt{16 - AH^2} \Rightarrow 9 - AH^2 = 25 + 16 - AH^2 - 10\sqrt{16 - AH^2}$$

$$10\sqrt{16 - AH^2} = 32 \Rightarrow 100\left(16 - AH^2\right) = 1024 \Rightarrow 16 - AH^2 = 10'24 \Rightarrow AH = 2'4 metros$$

APLICACIONES A LA GEOMETRÍA

Halla el radio de una circunferencia sabiendo que una cuerda de 24,6 metros tiene como arco correspondiente uno de 70º



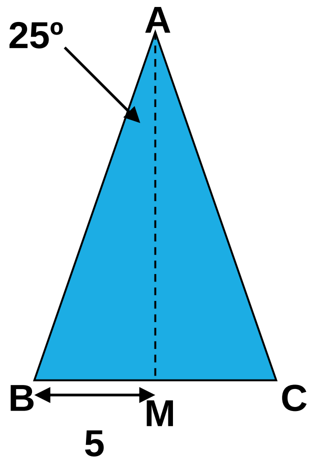
El triángulo ABC es isósceles. Tomaremos el punto medio del segmento CB, que coincide con el punto donde corta la altura del triángulo trazada desde A y es la bisectriz del ángulo A.

$MB = 12'3 \, metros$ teniendo en cuenta el triángulo AMB

$$sen 35º = \frac{MB}{AB} = \frac{12,3}{AB} \Rightarrow AB = \frac{12,3}{sen 35} = \frac{12,3}{0,57} = \boxed{21'57 \, metros}$$

APLICACIONES A LA GEOMETRÍA

La base de un triángulo isósceles mide 10 metros y el ángulo opuesto 50º. Calcula su área



Utilizaremos el triángulo rectángulo ABM y utilizaremos la razón trigonométrica tangente para calcular la altura que es el dato que falta para calcular el área.

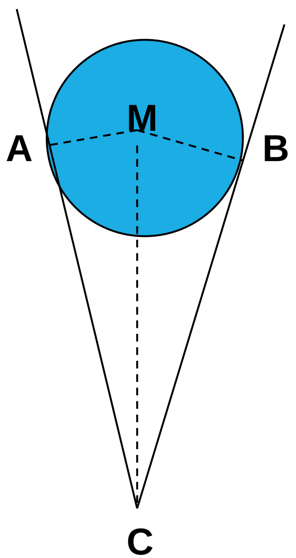
$$MB = 5 metros \text{ teniendo en cuenta el triángulo AMB}$$

$$tg\, 25º = \frac{MB}{AM} = \frac{5}{AM} \Rightarrow AM = \frac{5}{tg\, 25} = \frac{5}{0{,}46} = 10{,}86 metros$$

$$area = \frac{BC \cdot AM}{2} = \frac{10 \cdot 10{,}86}{2} = 54{,}3 m^2$$

APLICACIONES A LA GEOMETRÍA

Una moneda de 2 euros mide 2,5 cm de diámetro. Halla el ángulo que forman las tangentes a dicha moneda desde un punto situado a 6 cm del centro



Utilizaremos el triángulo rectángulo MCB (rectángulo en B) y utilizaremos la razón trigonométrica seno para calcular el ángulo.

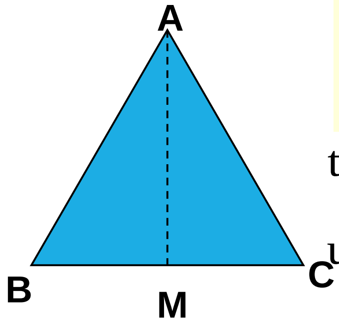
teniendo en cuenta el triángulo MCB

$$sen\hat{C} = \frac{1,25}{6} = 0'20 \Rightarrow acrsen(0,20) \approx 12^{o}$$

Por tanto el ángulo que forman 24º

APLICACIONES A LA GEOMETRÍA

¿Cuál es el área de un hexágono regular en función del lado a ?



Un hexágono regular está formado por seis triángulo equilátero (sus ángulos son de 60º). Tomaremos el triángulo AMC (rectángulo) para calcular el área.

teniendo en cuenta el triángulo rectángulo AMC, calcularemos su altura utilizando el teorema de Pitágoras.

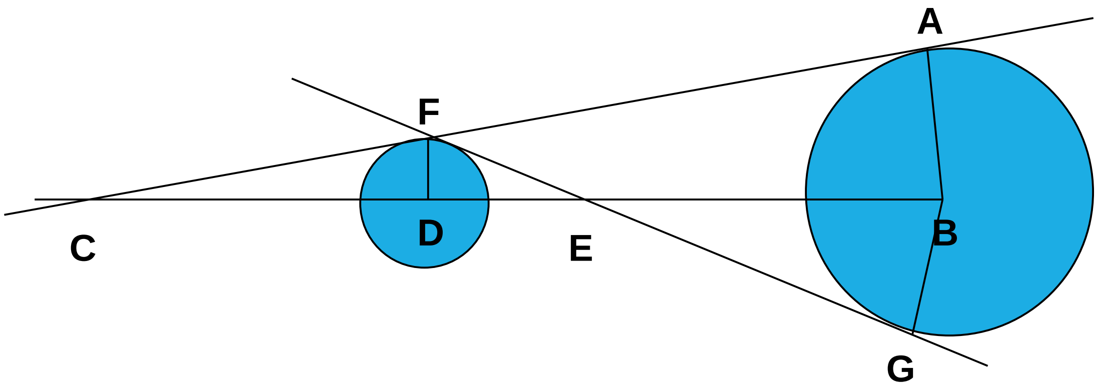
$$AC = a \text{ y } MC = \frac{a}{2}$$

$$\mathrm{AC}^2 = MC^2 + AM^2 \Rightarrow a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + AM^2 \Rightarrow AM^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow$$

$AM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ por tanto el área del hexágono tiene por área $6 \cdot \frac{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$

APLICACIONES A LA GEOMETRÍA

Dos circunferencias coplanarias de radios 4 y 6 centímetros, respectivamente, tienen sus centros equidistantes 12 centímetros. Calcular la inclinación sobre la recta de los centros de: la tangente común exterior y la tangente común interior

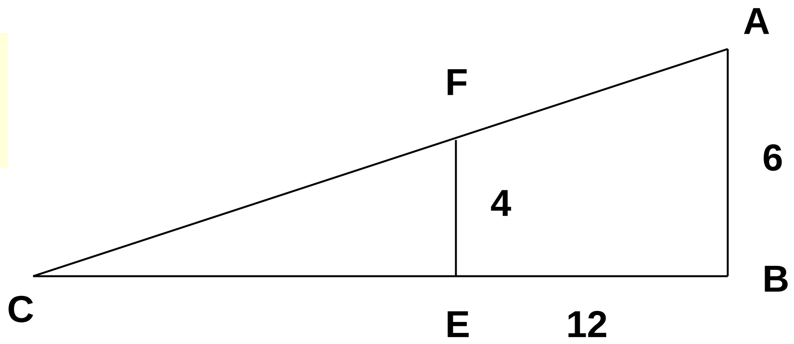


Para calcular el ángulo en C, utilizaremos el triángulo ABC y el triángulo CDF. Además, ambos triángulos son rectángulos y semejantes (tienen 3 ángulos iguales).

Continúa

APLICACIONES A LA GEOMETRÍA

Calcularemos CE utilizando el teorema de Thales



$$\frac{CE}{EF}=\frac{CB}{AB}\Rightarrow\frac{CE}{4}=\frac{CE+12}{6}\Rightarrow 6CE=4CE+48\Rightarrow 2CE=48\Rightarrow CE=24$$

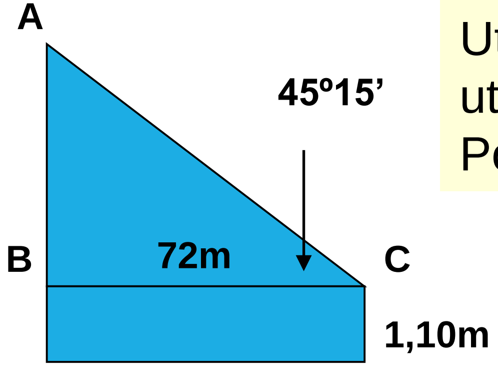
En el triángulo CEF conocemos ambos catetos, para calcular el ángulo utilizaremos la tangente.

$$tg\hat{C}=\frac{FE}{CE}=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}\Rightarrow\hat{C}=arctg\left(\frac{1}{6}\right)=9'46^{o}$$

El ángulo para la otra tangente es análogo, utilizando los triángulos DEF y EGB (son semejantes y rectángulos

APLICACIONES A LA TOPOGRAFÍA

El ángulo de elevación de la veleta de una torre es de 45º 15’, a una distancia de 72 metros de la torre. Si el observador se encuentra a 1,10 metros sobre el suelo, calcula de altura de la torre.



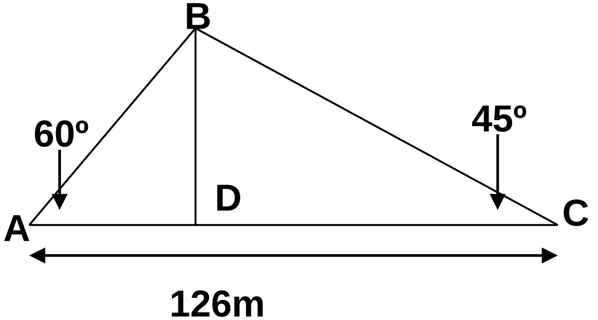
Utilizando el triángulo ABC, que es rectángulo en B, utilizaremos la tangente de C para calcular AB. Posteriormente, sumaremos al resultado parcial 1,10m.

$$tg\hat{C} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow tg\left(45º15'\right) = \frac{AB}{72} \Rightarrow 1'008 = \frac{AB}{72} \Rightarrow AB = 72'6m$$

$$\text{Por tanto, la altura de la torre es}: 72'6 + 1'10 = \boxed{73'7\,metros}$$

APLICACIONES A LA TOPOGRAFÍA

Pedro y Ana ven desde las puertas de sus casas una torre de televisión, bajo ángulos de 45º y 60º. La distancia entre sus casas es de 126 metros y la antena se encuentra entre sus casas. Halla la altura de la torre.

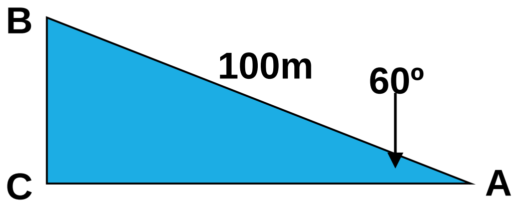


El objetivo es calcular BD, utilizaremos los triángulos rectángulos ABD y BDC, la tangente de 60º y 45º y que el segmento AC mide 126m

$$\left.\begin{array}{l}
\text{triángulo ABD}: tg\,60^{\circ} = \dfrac{BD}{AD} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{BD}{AD} \\[2ex]
\text{triángulo BDC}: \mathrm{tg}45^{\circ} = \dfrac{BD}{DC} \Rightarrow 1 = \dfrac{BD}{DC} \\[2ex]
AD + DC = 126
\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{BD}{\sqrt{3}} + BD = 126 \Rightarrow BD = 199{,}05\mathrm{m}$$

APLICACIONES A LA TOPOGRAFÍA

Una cometa está unida al suelo por un hilo de 100 metros, que forma con la horizontal del terreno un ángulo de 60 grados. Supuesto que el hilo está tirante, halla la altura de la cometa



El objetivo es calcular BC, el triángulo ABC es rectángulo en C, por tanto utilizaremos el seno de 60º

$$sen\hat{C} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow sen60^{o} = \frac{BC}{100} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{100} \Rightarrow BC = 100\frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}m$$

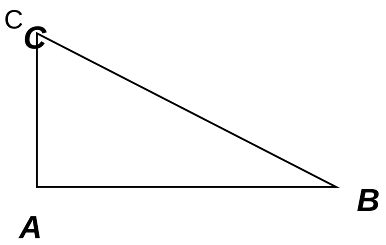
EJERCICIOS DE TRIGONOMETRÍA CON SOLUCIONES

Cálculo simbólico

LA TERNA (3,4,5) VERIFICA EL TEOREMA DE PITÁGORAS, POR ELLO SE DENOMINA TERNA PITAGÓRICA. ¿PODRÍAS DAR OTRA TERNA PITAGÓRICA?.

Podemos construir triángulos semejantes y volverán a ser rectángulos. Así, la terna (6,8,10) vuelve a verificar el teorema de Pitágoras. Cada vez que multipliquemos por un mismo número cada uno de la terna obtendremos otra terna pitagórica.

DADO EL TRIÁNGULO ABC DE LA FIGURA …



Expresa a en función de b y C

El lado a es la hipotenusa y b respecto al ángulo C es el cateto contiguo, por tanto, utilizaremos el coseno de C

$$\cos C = \frac{b}{a} \Rightarrow a = \frac{b}{\cos C}$$

Expresa b en función de a y B

El lado a es la hipotenusa y b respecto al ángulo B es el cateto opuesto, por tanto, utilizaremos el seno de B

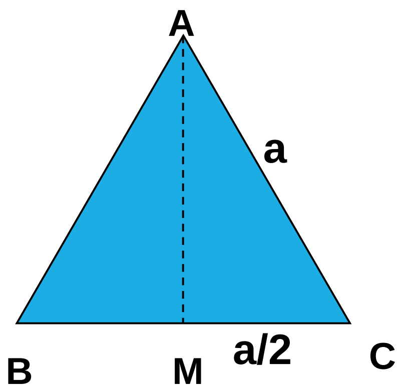
$$senB = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \cdot senB$$

Expresa c en función de b y B

El lado c es el cateto continuo a B y b es el cateto contiguo respecto a B, por tanto, utilizaremos la tangente de B

$$tgB = \frac{b}{c} \Rightarrow c = \frac{b}{tgB}$$

HALLA LA EXPRESIÓN QUE PERMITE OBTENER LA ALTURA DE UN TRIÁNGULO EQUILÁTERO EN FUNCIÓN DEL LADO *A*.



Tomaremos el triángulo rectángulo formado por AMC y aplicaremos el teorema de Pitágoras

$$AC^2 = AM^2 + M2C^2 \Rightarrow a^2 = AM^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow AM^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$AM^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow \boxed{AM = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}a}$$

HALLA LA FÓRMULA CON LA QUE SE OBTIENE EL ÁREA DE UN TRIÁNGULO EQUILÁTERO EN FUNCIÓN DEL LADO *A*

Este ejercicio lo resolveremos utilizando el resultado del anterior ejercicio, tomando el valor de la altura obtenido. Así:

$$\text{Área del triángulo} \ (\text{Base x Altura}) \ /2$$

$$\text{Area} = \frac{\text{a} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$$

SI LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO MIDEN *A* Y *2A*, ¿LA HIPOTENUSA ES DOBLE DEL CATETO?. RAZONA LA RESPUESTA

Para resolver este problema podemos calcular primero cuanto vale a. Puesto que 2a + a debe ser 90º resulta que a vale 30º y 2a vale 60º (pues la suma de los ángulos de un triángulo es 180º). Además sabemos que el seno de 30º vale ½ y que el seno es el cociente entre uno de los catetos y la hipotenusa, por tanto, es cierta la afirmación.

SI EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO CONOCES LA HIPOTENUSA Y UN CATETO, ¿QUÉ FÓRMULAS EMPLEARÍAS PARA RESOLVER EL TRIÁNGULO?.

En primer lugar podemos utilizar el teorema de Pitágoras pues el triángulo es rectángulo para calcular el otro cateto. Posteriormente podemos calcular a partir de cualquier razón trigonométrica uno de los ángulos (utilizando las funciones inversas). Una vez calculado éste, el otro ángulo se obtendrá restando a 90º el ángulo anterior.

IMAGÍNATE UN TRIÁNGULO DEL QUE CONOCES LOS DOS CATETOS, ¿QUÉ EXPRESIONES EMPLEARÍAS PARA RESOLVER EL TRIÁNGULO?

En primer lugar podemos utilizar el teorema de Pitágoras pues el triángulo es rectángulo (los únicos triángulos que tienen catetos son los rectángulos) para calcular la hipotenusa. Posteriormente podemos calcular a partir de cualquier razón trigonométrica uno de los ángulos (utilizando las funciones inversas). Una vez calculado éste, el otro ángulo se obtendrá restando a 90º el ángulo anterior.

DEMUESTRA QUE EN TODO TRIÁNGULO RECTÁNGULO SE VERIFICA

$$\frac{senB + \cos C}{\cos B + senC} = tgB$$

Sabemos que el triángulo es rectángulo, por tanto, B+C = 90º, es decir, los ángulos son complementarios. Por tanto, sabemos que el seno de uno es igual al coseno del otro y viceversa. Por tanto:

$$Si\ \mathrm{B} + \mathrm{C} = 90^{\mathrm{o}}\ \text{, entonces} \begin{cases} \mathrm{senB} = \mathrm{cosC} \\ \mathrm{cosB} = \mathrm{senC} \\ \mathrm{tgB} = \mathrm{cotgC} \end{cases}$$

$$\frac{senB + \cos C}{\cos B + senC} = \frac{senB + senB}{\cos B + \cos B} = \frac{2 \cdot senB}{2 \cdot \cos B} = \frac{senB}{\cos B} = tgB$$

Por tanto, la igualdad es cierta

SIMPLIFICA LAS SIGUIENTES EXPRESIONES I

$$sen\alpha \cdot \frac{1}{tg\alpha} = sen\alpha \cdot \frac{1}{\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{sen\alpha \cdot \cos\alpha}{sen\alpha} = \cos\alpha$$

$$\frac{\sec^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sec^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\frac{1}{\cos^2\alpha} + \cos^2\alpha}{\frac{1}{\cos^2\alpha} - \cos^2\alpha} = \frac{\frac{1+\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{1-\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{1+\cos^4\alpha}{1-\cos^4\alpha}$$

$$\frac{\cos ec\alpha}{1+\cot g^2\alpha} = \frac{\frac{1}{sen\alpha}}{1+\frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha}} = \frac{\frac{1}{sen\alpha}}{\frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha}} = \frac{\frac{1}{sen\alpha}}{\frac{sen^2\alpha+\cos^2\alpha}{sen^2\alpha}} = \frac{\frac{1}{sen\alpha}}{\frac{1}{sen^2\alpha}} = sen\alpha$$

SIMPLIFICA LAS SIGUIENTES EXPRESIONES II

$$\cos^3 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot sen\alpha + \cos\alpha \cdot sen^2\alpha + sen^3\alpha =$$

$$\cos^3 \alpha + \left(1 - sen^2\alpha\right) \cdot sen\alpha + \cos\alpha \cdot \left(1 - \cos^2 \alpha\right) + sen^3\alpha =$$

$$\cos^3 \alpha + sen\alpha - sen^3\alpha + \cos\alpha - \cos^3 \alpha \cdot + sen^3\alpha =$$

$$sen\alpha + \cos\alpha$$

COMPRUEBA SI SON VERDADERAS O FALSAS LAS SIGUIENTES IGUALDADES I

$$\frac{tg\alpha + tg\beta}{\cot g\alpha + \cot g\beta} = \frac{tg\alpha + tg\beta}{\dfrac{1}{tg\alpha} + \dfrac{1}{tg\beta}} = \frac{tg\alpha + tg\beta}{\dfrac{tg\beta}{tg\alpha \cdot tg\beta} + \dfrac{tg\alpha}{tg\alpha \cdot tg\beta}} = \frac{tg\alpha + tg\beta}{\dfrac{tg\beta + tg\alpha}{tg\alpha \cdot tg\beta}} = tg\beta + tg\alpha$$

$$\begin{cases} tg\alpha + \cot g\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{sen\alpha} = \dfrac{sen^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha \cdot sen\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha \cdot sen\alpha} \\ \sec\alpha \cdot \cos ec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} \cdot \dfrac{1}{sen\alpha} = \dfrac{1}{\cos\alpha \cdot sen\alpha} \end{cases}$$

COMPRUEBA SI SON VERDADERAS O FALSAS LAS SIGUIENTES IGUALDADES II

$$\frac{tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}}{1-\dfrac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha-sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{sen\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\left(\cos^2\alpha-sen^2\alpha\right)}=\frac{sen\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-sen^2\alpha}$$

$$\cot g^2\alpha-\cos^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha}-\cos^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\cdot sen^2\alpha}{sen^2\alpha}=\frac{\left(1-sen^2\alpha\right)\cdot\cos^2\alpha}{sen^2\alpha}$$

$$=\frac{\cos^4\alpha}{sen^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha=\cot g^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$$