Vectores en el plano

Ecuaciones de la recta en el plano

El conjunto $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

- El conjunto formado por todos los pares ordenados de números reales se notará como $\mathbb{R}^2$
- Un elemento de este conjunto lo designaremos por (x,y), donde ***x*** es la primera componente e ***y*** es la segunda componente.
- Dos pares son iguales si las componentes, en el orden correspondiente, son iguales.

Ejemplos

$(2,3), \left(\frac{1}{2}, -3\right), (\sqrt{3}, -34), (1, \pi)$ son pares ordenados de números reales

Suma en $\mathbb{R}^2$

Definición:

Si $(a, b)\ y\ (a', b')\ \in \mathbb{R}^2\ (a, b) + \ (a', b') = (a + a', b + b')$

La suma es una operación interna: la suma de dos pares es otro par.

Propiedades

Asociativa

$$(a, b) + \big((a', b') + \ (a'', b'')\big) = \big((a, b) + \ (a', b')\big) + \ (a'', b'')$$

Elemento neutro

$$Existe\ el\ \ par\ (0{,}0)\ tal\ \ que\ (a, b) + (0{,}0) = (0{,}0) + (a, b)$$

Elemento opuesto

$$Para\ todo\ (a, b), existe\ (-a, -b), tal\ que, (a, b) + (-a, -b) = (0{,}0)$$

Conmutativa

$$Para\ cualuqiera\ dos\ pares\ (a, b) + \ (a', b') = (a', b') + \ (a, b\ )$$

Producto de un número real por un elemento de $\mathbb{R}^2$

Definición:

Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ y $k \in \mathbb{R}$ $k \cdot (a,b) = (k \cdot a, k \cdot b)$

El producto no es una operación interna.

Propiedades

$$k \cdot \big((a,b) + (a',b')\big) = k \cdot (a,b) + k \cdot (a',b')$$

$$(k+l) \cdot (a,b) = k \cdot (a,b) + l \cdot (a,b)$$

$$(k \cdot l) \cdot (a,b) = k \cdot \big(l \cdot (a,b)\big)$$

$$1 \cdot (a,b) = (a,b)$$

El conjunto $\mathbb{R}^2$ con las dos operaciones definidas (suma y producto de un escalar) tiene estructura de Espacio Vectorial. A los elementos se les denomina vectores

Ejemplo

Operaciones en $\mathbb{R}^2$

$$3\cdot(2,4)-3\cdot(-1,\ 4)=(6,12)\ -(-3,12)=(9,0)$$

$$\frac{2}{3}\cdot(1,0)-\left(2\cdot(3,5)+\ (-2)(-1,2)\right)=\left(\frac{2}{3},0\right)\ -\left((6,10)+\ (2,-4)\right)=$$

$$=\left(\frac{2}{3},0\right)\ -(8,6)=\left(\frac{2}{3}-8,-6\right)=\left(-\frac{22}{3},-6\right)$$

Combinación lineal

Definición:

Una **combinación lineal** es una expresión válida en la que se combina la suma de vectores y el producto por un escalar.

El resultado de una combinación lineal es otro vector.

Se dice que un vector es combinación lineal de otros, si es posible obtenerlo mediante una combinación lineal de éstos.

Ejemplo

El vector (9, 0) es combinación lineal de los vectores (1, -4) y (2, 4)

$$\mathbf{3\cdot(2,4)+3\cdot(1,\ -4)=(6,12)+(3,-12)=(9,0)}$$

Vectores linealmente independientes

Definición:

Un conjunto de vectores es linealmente independiente cuando ninguno de ellos se puede obtener como combinación lineal del resto.

Cuando un conjunto de vectores no es linealmente independientes, se dice que son dependientes.

Ejemplo

Los vectores $\{(2,4),(1,-4),(9,0)\}$ son linealmente dependientes, pues:

$$\mathbf{3}\cdot(2,4)+3\cdot(1,\ -4)=(6,12)+(3,-12)=(9,0)$$

Ejemplo

¿Son linealmente independientes los vectores $\{(\mathbf{1},\mathbf{1}),(\mathbf{2},\mathbf{3}),(\mathbf{5},\mathbf{7})\}$?

Vamos a intentar ver si el vector (1,1) es combinación lineal del resto, para lo cual vamos a buscar números *k* y *l* tales que:

$\mathbf{(1,1)=}\boldsymbol{k}\mathbf{(2,3)+}\boldsymbol{l}\mathbf{(5,7)}$ **operando** $\mathbf{(1,1)=(2}\boldsymbol{k}\mathbf{,3}\boldsymbol{k}\mathbf{)+(5}\boldsymbol{l}\mathbf{,7}\boldsymbol{l}\mathbf{)}$;
$\mathbf{(1,1)=(2}\boldsymbol{k}\mathbf{+5}\boldsymbol{l}\mathbf{,3}\boldsymbol{k}\mathbf{+7}\boldsymbol{l}\mathbf{)}$

Podemos plantear un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$\begin{cases}\mathbf{2}\boldsymbol{k}+\mathbf{5}\boldsymbol{l}=\mathbf{1}\\ \mathbf{3}\boldsymbol{k}+\mathbf{7}\boldsymbol{l}=\mathbf{1}\end{cases}$; **la solución es l = 1 y k = -2. Por tanto, al existir una combinación lineal dos vectores que proporcionan el otro vector, se trata de un conjunto de vectores linealmente dependientes.**

Base de $\mathbb{R}^2$

Definición:

Una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ está formada por dos vectores linealmente independientes.

Cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ se puede expresar como combinación lineal de dos vectores linealmente independientes.

La base mas sencilla del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ es la formada por los vectores $\{(\mathbf{1},\mathbf{0}),(\mathbf{0},\mathbf{1})\}$. A esta base se la denomina base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo

¿Forman una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$los vectores $\{(\mathbf{1},\mathbf{1}),(\mathbf{1},\mathbf{2})\}$?

Vamos a comprobar que los vectores son linealmente independientes:

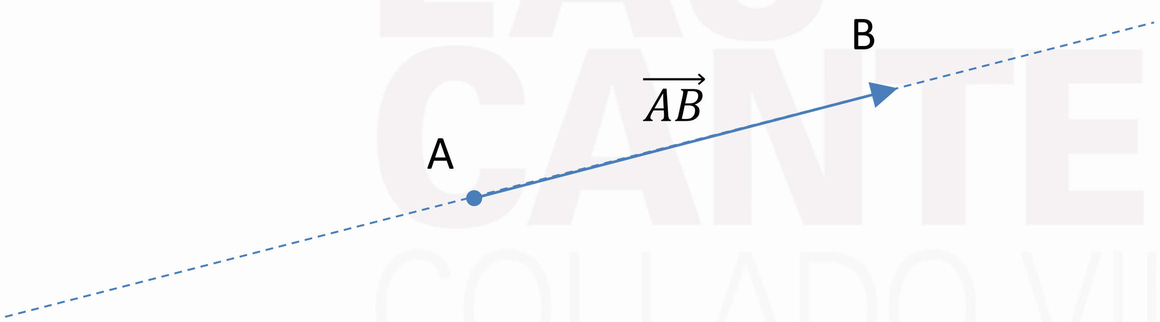
$(1,1) = \mathrm{k}(1,2)$, por tanto, $\begin{cases} 1 = \mathrm{k} \\ 1 = 2\mathrm{k} \end{cases}$, como podemos comprobar no existe un valor k tal que un vector pueda se obtenido como combinación lineal del otro, por lo que se trata de una base de $\mathbb{R}^2$.

Definición (vector)

Un vector $\overrightarrow{AB}$ es un segmento orientado que tiene su origen en el punto A y su extremo en el punto B.

Un vector queda determinado por:

- Módulo: La longitud del segmento (siempre mayor o igual a 0), se representa por $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.
- Dirección: Es la dirección determinada por la recta que pasa por los puntos A y B.
- Sentido: Es el recorrido de la recta cuando nos trasladamos de A a B.

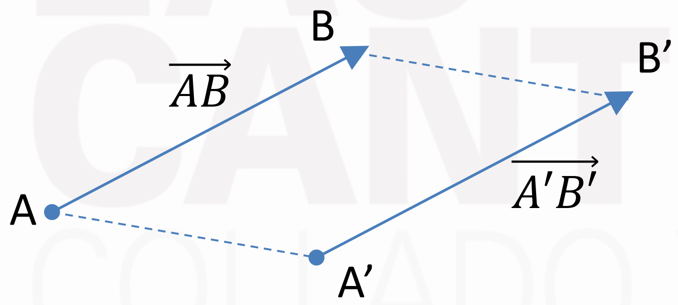


Vectores equipolentes

Dos vectores son **equipolentes** si tienen el mismo módulo, dirección y sentido.

Todos los vectores equipolentes a uno dado representan el mismo vector, a dicho vector le denominaremos **vector libre**. Representaremos a los vectores libres del plano mediante letras minúsculas.

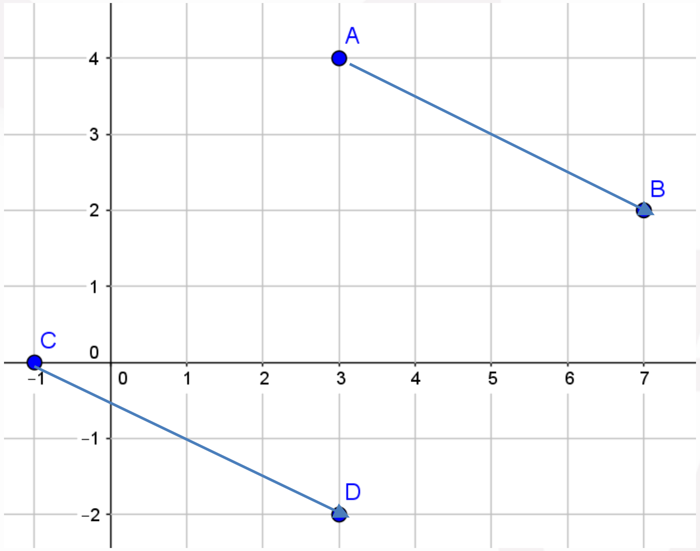
Gráficamente podemos comprobar que dos vectores son equipolentes si al unir sus extremos se forma un paralelogramo



Ejemplo

¿Son equipolentes los vectores $\overrightarrow{AB}$ y$\overrightarrow{CD}$ siendo A (3,4), B (7,2), C (-1,0) y D (3,-2)?

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (7{,}2) - (3{,}4) = (4, -2)$$

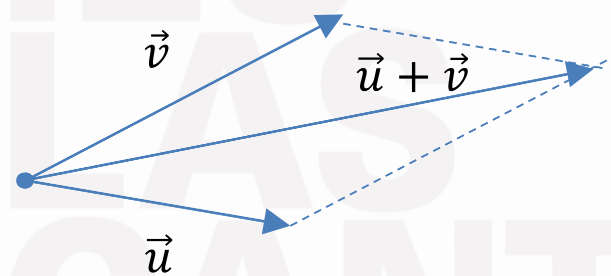


$$\overrightarrow{CD} = (3, -2) - (-1{,}0) = (4, -2)$$

Por tanto, los vectores son equipolentes

Suma de vectores

La suma de dos vectores es otro vector que se construye representando los dos vectores con origen el mismo punto. El vector suma se obtiene como la diagonal del paralelogramo que tiene por lados los dos vectores.



Producto de un número por un vector

Al multiplicar un escalar (k) por un vector ($\vec{v}$), se obtiene otro vector k·$\vec{v}$ con las siguientes propiedades:

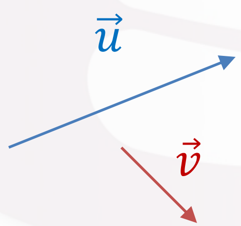
Su módulo es igual al del vector $\vec{v}$ por el valor absoluto del número k.

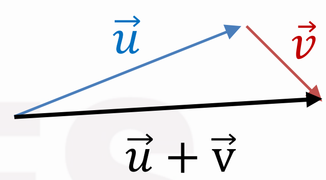
Su dirección es la misma que la del vector $\vec{v}$

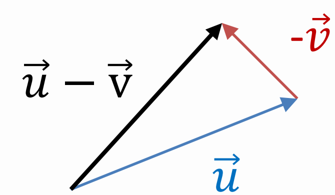
Su sentido es el mismo que el del vector $\vec{v}$ si k es positivo, el contrario, si k es negativo.

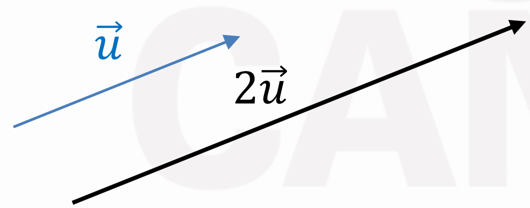
Ejemplo (cálculo con vectores libres)

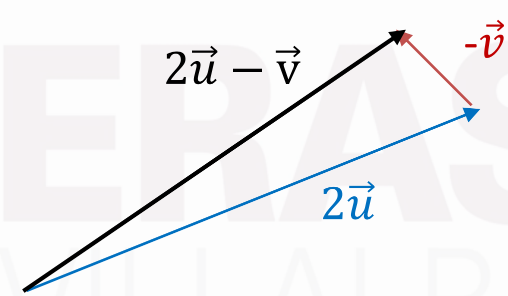
Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, calculad: $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}$, $2\vec{u}$ y $2\vec{u}-\vec{v}$







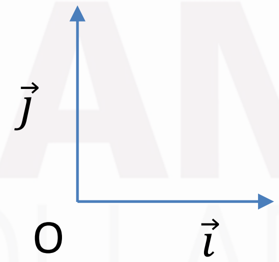




El espacio vectorial V^2

Al conjunto de los vectores libres del plano, junto con las operaciones suma y producto por un escalar forma un espacio vectorial, se denomina **Espacio Vectorial de los vectores libres del plano**.

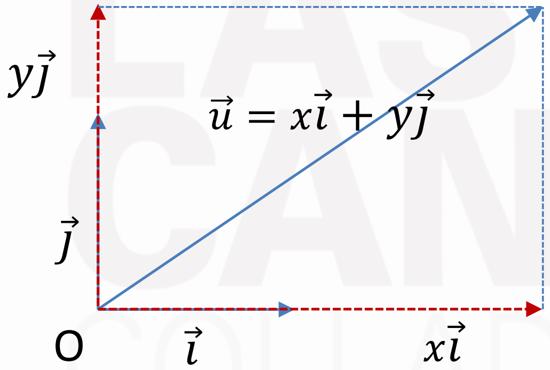
Una **base de V^2** está formada por dos vectores cualesquiera no nulos y no proporcionales. La base más sencilla es la formada por dos vectores perpendiculares y unitarios representados por $\vec{\imath}$ y $\vec{\jmath}$ cuyas coordenadas respecto de la base son $\vec{\imath}$ =(1,0) y $\vec{\jmath}$ =(0,1)



Coordenadas cartesianas

Sea $B = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ una base del plano y $\vec{u}$ un vector cualquiera de V², se llama coordenadas cartesianas del vector $\vec{u}$ al par de números reales (x,y) tales que permiten expresar el vector $\vec{u}$ como combinación lineal de los vectores de la base de la siguiente forma:

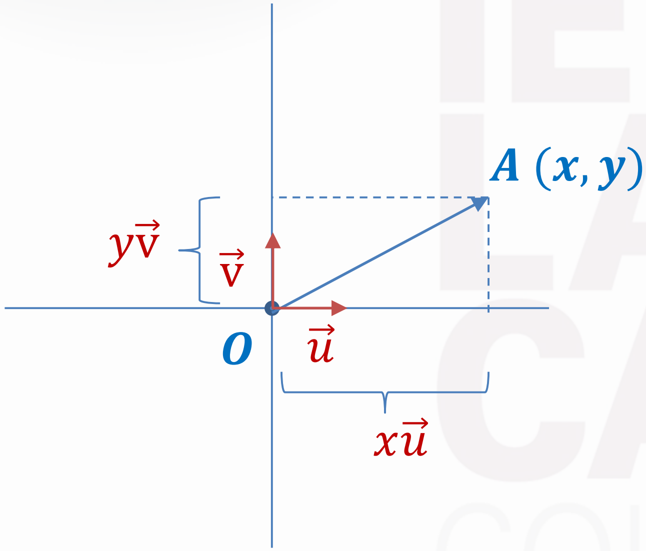
$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$



Sistema de referencia

Para situar un punto en el plano de forma única es necesario un sistema de referencia.

Un **sistema de referencia del plano $\{O; \vec{u}, \vec{v}\}$** se compone de un punto ***O***, denominado origen de coordenadas, y dos vectores no nulos linealmente independientes, que forman una base.



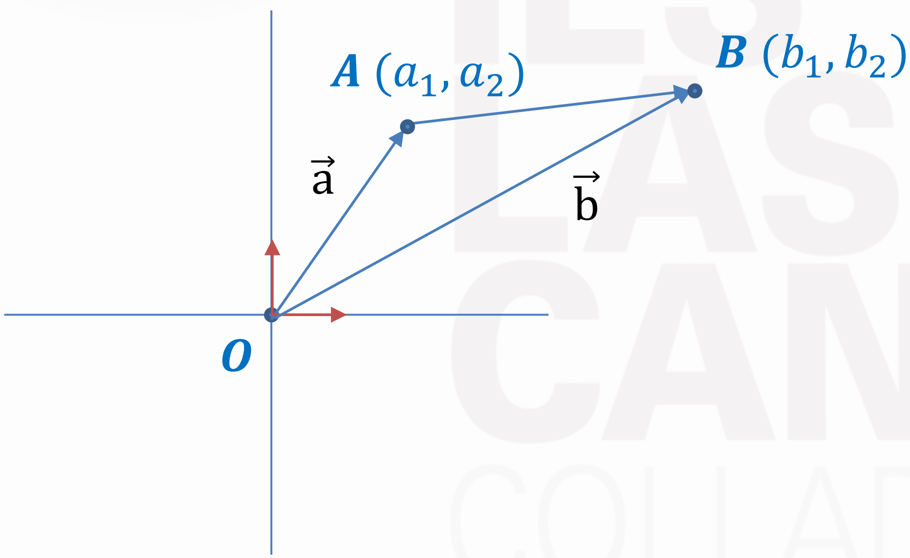
Vector de posición del punto A

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

Coordenadas de un vector libre determinado por dos puntos

Dado un sistema de referencia del plano $\{\boldsymbol{O};\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{v}}\}$ sean dos puntos del plano A y B, cuyas coordenadas respecto del sistema de referencia son (a_1,a_2) y (b_1,b_2), respectivamente, el vector libre $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, tendrá por coordenadas :

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1,b_2)-(a_1,a_2)=(b_1-a_1,b_2-a_2)$$



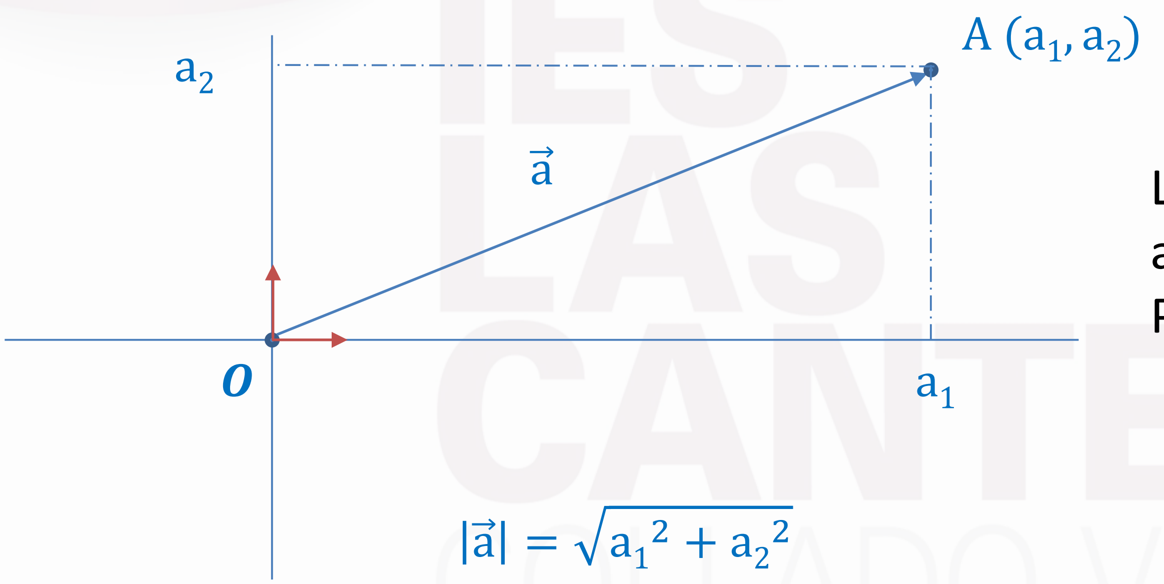
$$\vec{a}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$$

Módulo de un vector

En nuestro sistema de referencia el módulo de un vector coincide con al longitud del segmento que tiene los vértices en sus extremos:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}$$



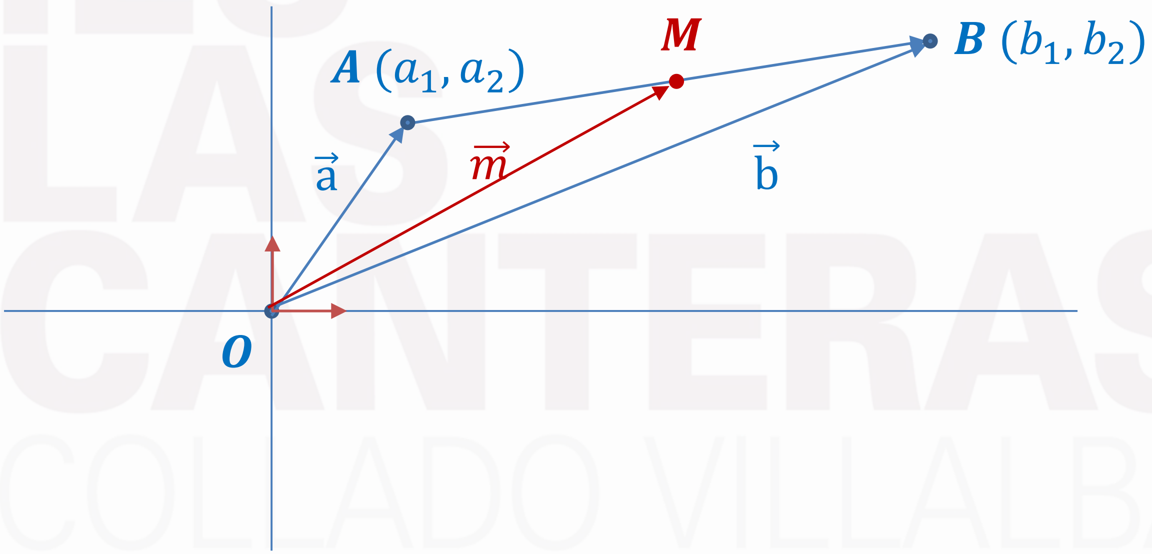
La fórmula procede de aplicar el teorema de Pitágoras

Coordenadas del punto medio de un segmento

Sea el segmento de extremos A y B, sea M su punto medio, entonces se verifica que:

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$\vec{m} = \vec{a} + \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$$



Ejemplo (coordenadas de un vector)

El vector $\overrightarrow{AB}$ tiene por coordenadas (3,-4), sabiendo que las coordenadas del origen A son (3,-1), ¿cuáles son las coordenadas de B?

Solución

Las coordenadas de $\overrightarrow{AB}$ se han formado utilizando las coordenadas del vector de posición de los puntos A y B de la siguiente forma:

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

Por tanto,

$$(3, -4) = (b_1 - 3, b_2 + 1) \Rightarrow \begin{cases} 3 = b_1 - 3 \Rightarrow b_1 = 6 \\ -4 = b_2 + 1 \Rightarrow b_2 = -5 \end{cases}$$

Ejemplo (punto medio)

Calcular el punto medio del segmento cuyos extremos son A (2,3) y B (-7,2).

Solución

El punto medio verifica que:

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}(-7-2,2-3) = (-\frac{9}{2},-\frac{1}{2})$$

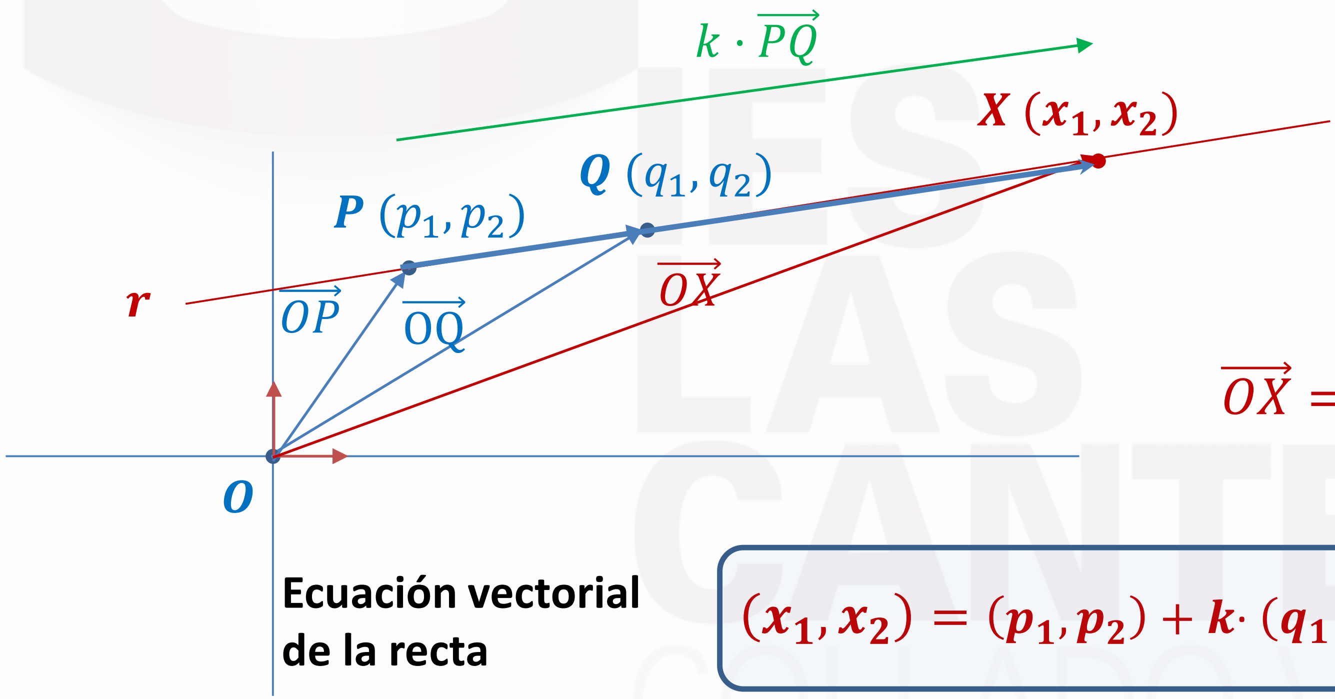
Por tanto:

$$\mathrm{M} = \left(-\frac{9}{2}+2,-\frac{1}{2}+3\right) = (-\frac{5}{2},\frac{5}{2})$$

ECUACIONES DE LA RECTA EN EL PLANO

Ecuación vectorial de la recta

Una recta queda determinada por dos puntos. Si formamos el vector que tiene de extremo los dos puntos de la recta, obtendremos un vector director y podremos calcular cualquier punto de la recta haciendo variar el módulo y sentido de dicho vector.



$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + k \cdot \overrightarrow{PQ}\ , \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$$

Ecuación vectorial de la recta

$$\boxed{(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) = (\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}) + \boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{q_1} - \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_2} - \boldsymbol{p_2})\ , \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}}$$

Ejemplo

Calculemos la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos A (1,2) y B(-2,3)

Solución

Calculamos en primer lugar el vector director de la recta:

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-2-1, 3-2) = (-3,1)$$

A continuación, expresamos cualquier punto de la recta como suma del vector de posición de los puntos A o B (es indiferente) y la variación en módulo o sentido del vector director, quedando:

$$\boldsymbol{(x_1, x_2) = (1, 2) + k\cdot\,(-3, 1)\,,\forall k \in \mathbb{R}}$$

Vector director de la recta

Vector de posición del punto A

Ejemplo

Calculemos la ecuación de la recta que pasa por el punto A (-1,6) y tiene como vector director $\vec{\boldsymbol{v}} =$ (3, -1). ¿Pertenece el punto (1,1) a la recta?

Solución

Utilizando la fórmula de la ecuación vectorial de la recta, queda:

$$\boldsymbol{(x_1, x_2) = (-1, 6) + k \cdot (3, -1)}, \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$$

Para saber si (1,1) pertenece a la recta sustituiremos en la ecuación:

$$\boldsymbol{(1, 1) = (-1, 6) + k \cdot (3, -1)} = (-1 + 3\mathrm{k}, 6 - \mathrm{k})$$

Se obtienen dos ecuaciones: $\begin{cases} 1 = -1 + 3k \Rightarrow k = \dfrac{2}{3} \\ 1 = 6 - k \Rightarrow k = 5 \end{cases}$

Al obtener dos soluciones distintas para k el punto no pertenece a la recta

Ecuación paramétrica de la recta

Si tomamos la ecuación vectorial de la recta e igualamos cada una de las dos componentes de los vectores, obtendremos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2})$ vector de posición del punto P

$\vec{\mathrm{v}} = (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2})$ vector director de la recta

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ punto genérico de la recta

$\boldsymbol{k}$ parámetro real

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}) + \boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}), \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$$

Ecuación paramétrica de la recta

$$\boxed{\forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R} \begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p_1} + k\boldsymbol{v_1} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{p_2} + k\boldsymbol{v_2} \end{cases}}$$

Ejemplo

Calculemos la ecuación paramétrica de la recta que pasa por los punto A (2,-1) y B (-4,3)

Solución

Formamos el vector director de la recta a partir de los dos puntos por los que pasa:

$$\overrightarrow{AB} = (\mathbf{-4-2}, \mathbf{3} - (\mathbf{-1})\ ) = (\mathbf{-6}, \mathbf{4})$$

Recordando la expresión de la ecuación paramétrica de la recta:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\mathbf{2}, \mathbf{-1}) + \boldsymbol{k}\cdot (\mathbf{-6}, \mathbf{4}\ )\ , \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$$

$$\forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R} \begin{cases} \boldsymbol{x} = \mathbf{2} - 6k \\ \boldsymbol{y} = \mathbf{-1} + 4k \end{cases}$$

Ecuación continua de la recta

Si despejamos el parámetro en ambas ecuaciones de la forma paramétrica de la recta, obtendremos la ecuación en forma continua de la recta.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2})$ vector de posición del punto P

$\vec{\mathrm{v}} = (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2})$ vector director de la recta

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ punto genérico de la recta

$\boldsymbol{k}$ parámetro real

Ecuación continua de la recta

$$\forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R} \begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p_1} + k\boldsymbol{v_1} \Rightarrow k = \dfrac{x - \boldsymbol{p_1}}{\boldsymbol{v_1}} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{p_2} + k\boldsymbol{v_2} \Rightarrow k = \dfrac{y - \boldsymbol{p_2}}{\boldsymbol{v_2}} \end{cases} Igualando \boxed{\dfrac{x - \boldsymbol{p_1}}{\boldsymbol{v_1}} = \dfrac{y - \boldsymbol{p_2}}{\boldsymbol{v_2}}}$$

Ejemplo

Calculemos la ecuación continua de la recta que pasa por los punto A (2,-1) y B (-4,3)

Solución

Formamos el vector director de la recta a partir de los dos puntos por los que pasa:

$$\overrightarrow{AB} = (\mathbf{-4-2,3-(-1)}) = (\mathbf{-6,4})$$

Recordando la expresión de la ecuación continua de la recta:

$$\frac{x-\mathbf{2}}{\mathbf{-6}} = \frac{y+1}{\mathbf{4}}$$

Ecuación general de la recta

Si operamos y transponemos todos los términos de la ecuación continua de la recta, obtendremos la ecuación general de la recta, que tiene la forma $\boldsymbol{ax+by+c=0}$.

$$\frac{x-\boldsymbol{p_1}}{\boldsymbol{v_1}}=\frac{y-\boldsymbol{p_2}}{\boldsymbol{v_2}}\Rightarrow \boldsymbol{v_2}(x-\boldsymbol{p_1})=\boldsymbol{v_1}(y-\boldsymbol{p_2})$$

$$\boldsymbol{v_2x-v_2p_1=v_1y-v_1p_2\Rightarrow v_2x-v_1y-v_2p_1+v_1p_2=0}$$

$\boldsymbol{a=v_2}$

b$=\boldsymbol{-v_1}$

c$=\boldsymbol{-v_2p_1+v_1p_2}$

Tomando los siguientes valores, obtenemos la ecuación general $\boldsymbol{ax+by+c=0}$

Ejemplo

Calculemos todas formas de ecuación la recta que pasa por el punto A (3,1) y tiene por vector director $\vec{u}$ (4,-2)

Solución

Ecuación vectorial $$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\mathbf{3},\mathbf{1}) + \boldsymbol{k}\cdot(\mathbf{4},-\mathbf{2}),\ \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$$

Ecuación paramétrica $$\forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{R} \begin{cases} \boldsymbol{x} = \mathbf{3} + 4k \\ \boldsymbol{y} = \mathbf{1} - 2k \end{cases}$$

Ecuación continua $$\frac{x-\mathbf{3}}{\mathbf{4}} = \frac{y-\mathbf{1}}{-\mathbf{2}}$$

Ecuación general $$\text{-}\mathbf{2}x - \mathbf{4}y + \mathbf{10} = \mathbf{0}$$

Ecuación de la recta punto pendiente

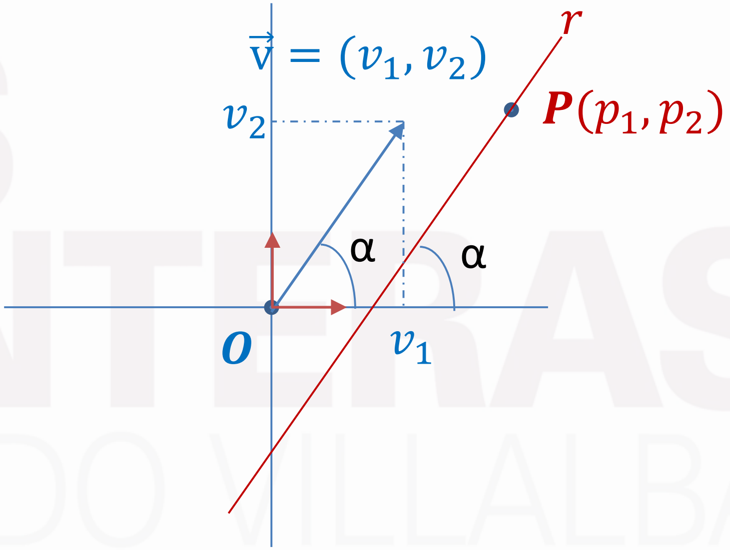
La ecuación continua de la recta que pasa por el punto $(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2})$ y tiene por vector director $\vec{v} = (\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2})$ tiene la forma:

$$\frac{x - \boldsymbol{p_1}}{\boldsymbol{v_1}} = \frac{y - \boldsymbol{p_2}}{\boldsymbol{v_2}}$$

Si despejamos transponemos el valor de $\boldsymbol{v_2}$ y supuesto que $\boldsymbol{v_1} \neq \mathbf{0}$. Podemos expresar la ecuación de la forma:

$$y - \boldsymbol{p_2} = \frac{\boldsymbol{v_2}}{\boldsymbol{v_1}}(x - \boldsymbol{p_1})$$

A la expresión $\frac{\boldsymbol{v_2}}{\boldsymbol{v_1}}$ se le denomina pendiente de la recta y coincide con la tangente del ángulo que forma la parte positiva del eje de abscisas con la recta.



Ejemplo

Calculemos la ecuación de la recta que pasa por el punto A (2,3) y forma un ángulo de 30^0 con el eje de abscisas.

Solución

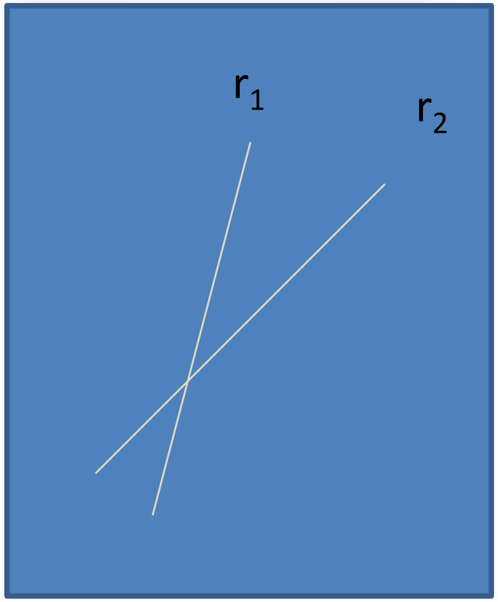
Recordando que $tg30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y utilizando la ecuación de la recta punto pendiente, la ecuación quedaría:

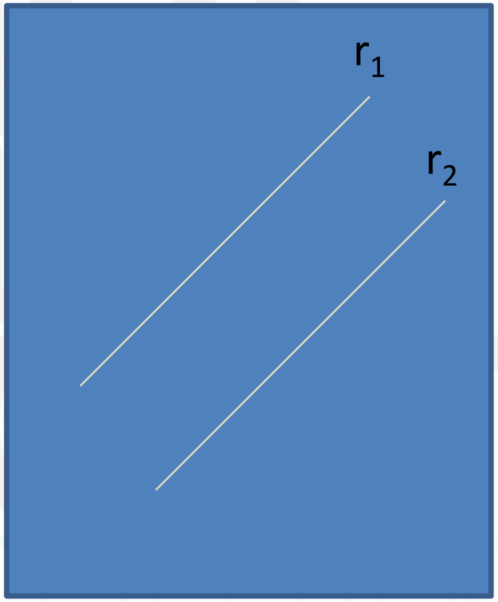
$$y - \mathbf{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - \mathbf{2})$$

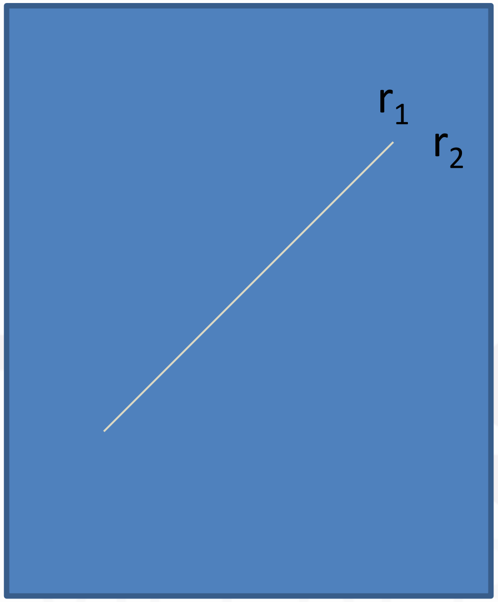
Posiciones relativas de dos rectas en el plano

Dos rectas en el plano pueden ser:

- Secantes: tienen un punto en común
- Paralelas: no tienen ningún punto en común
- Coincidentes: tienen todos los puntos en común







Posición relativa y ecuaciones

Podemos saber la posición relativa de dos rectas en el plano resolviendo el sistema lineal formado por sus ecuaciones, de tal forma que:

Si el sistema tiene una única solución la rectas son secantes, la solución del sistema son las coordenadas del punto donde se cortan

Si el sistema no tiene solución, las rectas son paralelas

Si el sistema tiene infinitas soluciones, las rectas serán coincidentes.

Ejemplo

Calculamos la posición relativa de las rectas $\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ 4x + 6y + 2 = 0 \end{cases}$

Resolviendo el sistema (multiplicando por -2 la primera ecuación y sumando a la segunda ecuación:

$$\begin{array}{r} -4x - 6y - 2 = 0 \\ 4x + 6y + 2 = 0 \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

Esta identidad siempre se verifica, por tanto, las rectas son coincidentes

Posición relativa: pendiente y ordenadas en el origen

Es posible conocer la posición relativa de dos rectas sin resolver el sistema lineal de ecuaciones que forman sus ecuaciones.

Supongamos que las dos rectas tienen por ecuaciones generales las siguientes:

$$\boldsymbol{r \equiv ax + by + c = 0}$$

$$\boldsymbol{r' \equiv a'x + b'y + c' = 0}$$

Las pendientes de ambas rectas tendrán la forma:

$$\boldsymbol{m = -\frac{a}{b}}$$

$$\boldsymbol{m' = -\frac{a'}{b'}}$$

Las ordenadas en el origen de las rectas tendrán la forma:

$$\boldsymbol{n = -\frac{c}{b}}$$

$$\boldsymbol{n' = -\frac{c'}{b'}}$$

Por tanto, si las pendientes son distintas las rectas serán secantes

Si las pendientes son iguales:

Si las ordenadas en el origen son iguales, las rectas son coincidentes

Si las ordenadas en el origen son distintas, las rectas serán paralelas

Haz de rectas secantes

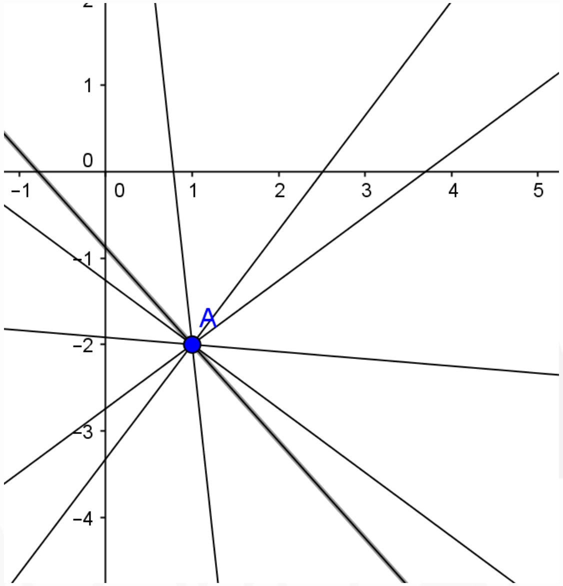
Dado un punto $\mathrm{P}(\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{p_2})$ definimos el haz de rectas como el conjunto de todas las rectas que pasan por P. Su ecuación es (el parámetro $\boldsymbol{m}$ representa cualquier pendiente):

$$\boldsymbol{y}-\boldsymbol{p_2}=\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p_1}) \text{ para cualquier } \boldsymbol{m}\in\mathbb{R}$$

Ejemplo

Calculamos el haz de rectas que pasa por el punto (1,-2)

$$\boldsymbol{y}+\boldsymbol{2}=\boldsymbol{m}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{1}) \text{ para cualquier } \boldsymbol{m}\in\mathbb{R}$$



Haz de rectas paralelas

Dada la recta $\boldsymbol{r \equiv ax + by + c = 0}$ definimos el haz de rectas paralelas a $\boldsymbol{r}$ como el conjunto de las rectas del plano que son paralelas a aquella. Su ecuación es:

$$\boldsymbol{ax + by + k = 0} \text{ para cualquier } \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

Calculamos el haz de rectas paralela a la recta $\boldsymbol{2x + 3y + 1 = 0}$

$$\boldsymbol{2x + 3y + k = 0} \text{ para cualquier } \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$$