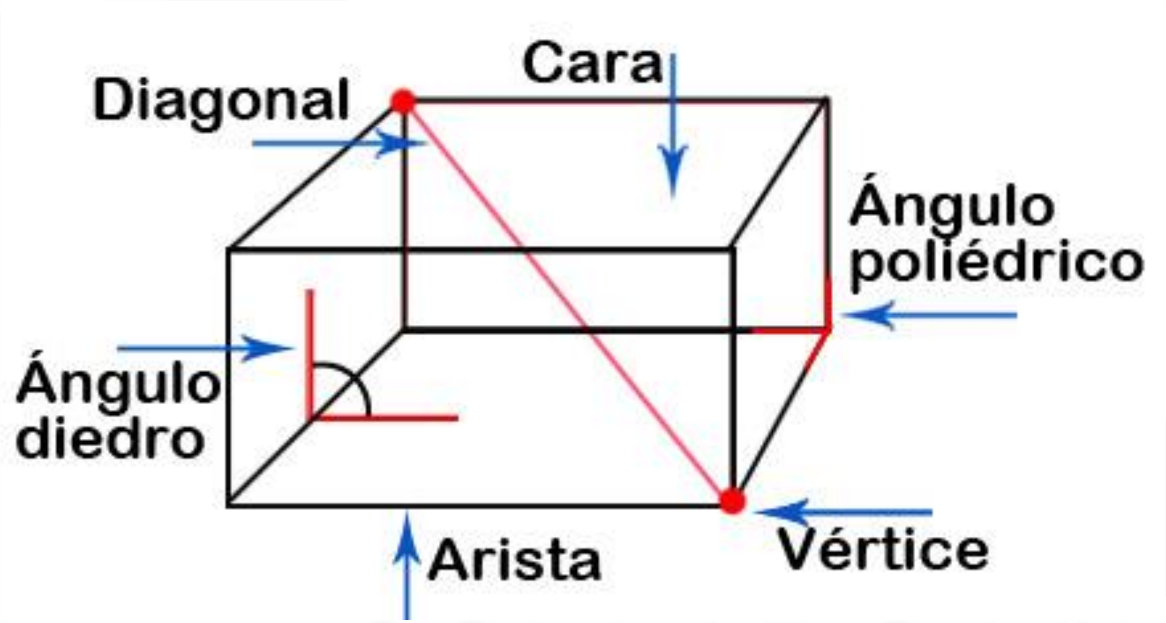
Cuerpos geométricos

Poliedros

- Un poliedro es un cuerpo geométrico limitado por polígonos.

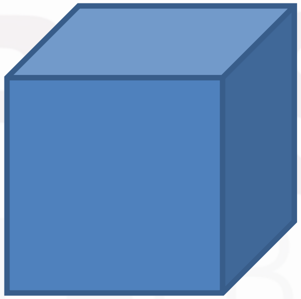


Fórmula de Euler

- La fórmula de Euler relaciona el número de caras, aristas y vértices mediante la siguiente igualdad:

Número_caras + Número_vértices = Número_aristas +2

Ejemplo: El cubo dispone de 8 vértices y 6 caras, siendo su número de aristas de 12.



Poliedros regulares

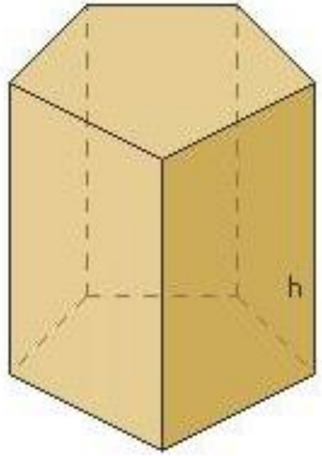
Un poliedro es regular si sus caras son todas polígonos regulares y en todos sus vértices concurren el mismo número de caras.

Existen cinco poliedros regulares convexos.

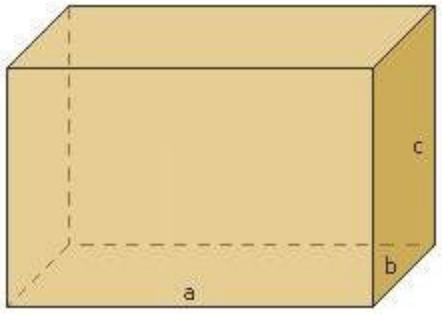
Prismas

- Un prisma es un poliedro con dos caras iguales y paralelas unidas por paralelogramos (caras laterales)
- Un prisma es regular si sus dos caras iguales y paralelas son polígonos regulares.
- Dependiendo de las dos caras iguales y paralelas se nombra al prisma: prisma cuadrangular, prisma pentagonal…

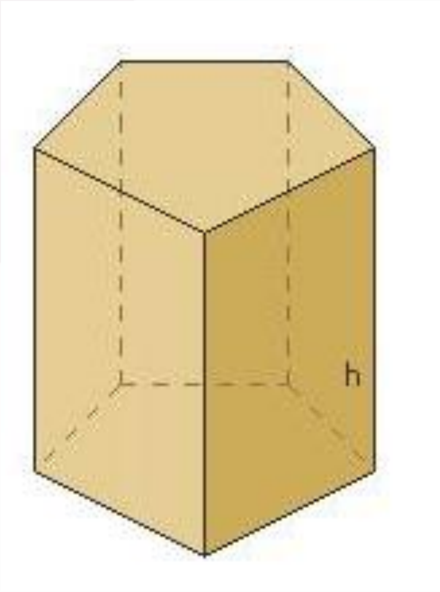
Prisma recto pentagonal



Prisma recto cuadrangular
u ortoedro



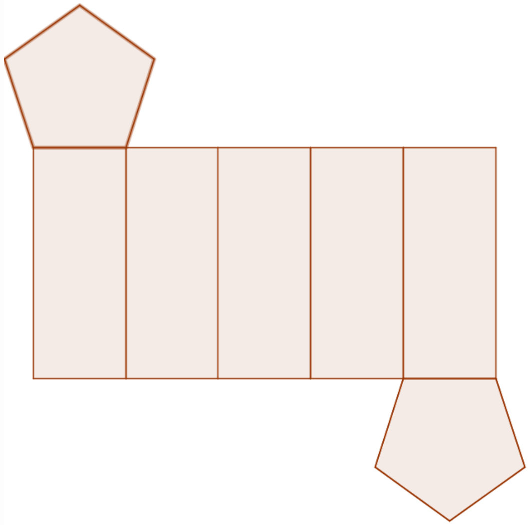
Área y volumen un prisma regular



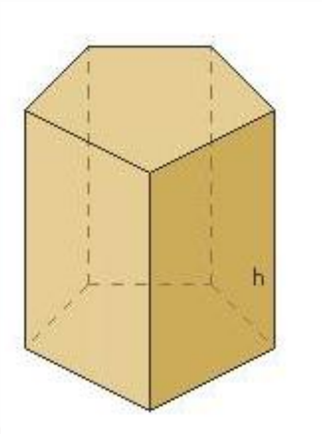
$Área = 2\ x\ área\_base$+ Perímetro_base x altura

$Volumen = área\_base$ x altura

Ejemplo



Cálculo del área y del volumen de un prisma pentagonal regular cuya base tiene 3 cm de lado y 2 de apotema, siendo la altura del prisma de 6 cm.



$$\acute{A}rea\ de\ la\ base = \frac{5\cdot 3\cdot 2}{2} = 15cm^2$$

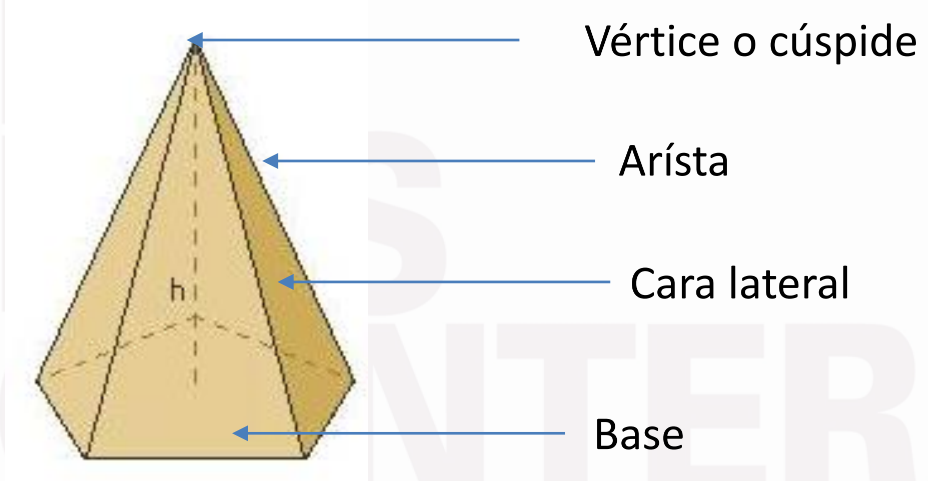
$$\acute{A}rea\ caras\ laterales = 5\cdot 3\cdot 6 = 90cm^2$$

$$Superficie\ total = 15 + 90cm^2$$

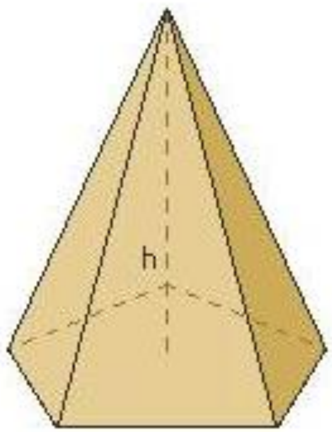
$$Volumen = 15\cdot 6 = 90cm^3$$

Pirámides

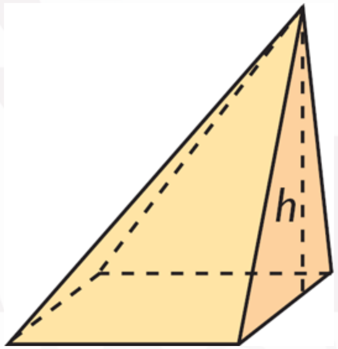
- Una **pirámide** es un poliedro formado por un polígono, denominado base, del que salen tantos triángulos como lados tiene su base. El vértice no común con la base de cada triángulo se une en un punto denominado vértice de la pirámide o cúspide.



Tipos de pirámides

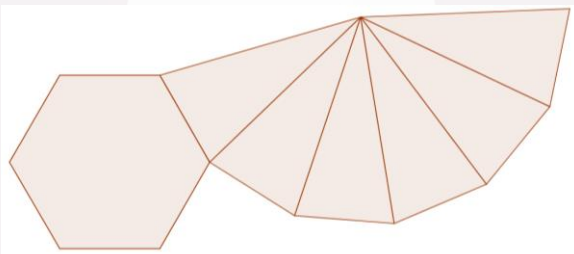


Pirámide recta todas sus caras laterales son triángulos isósceles iguales



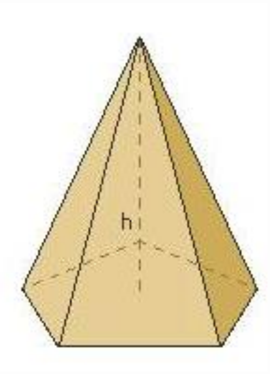
Pirámide oblicua

Área y volumen una pirámide

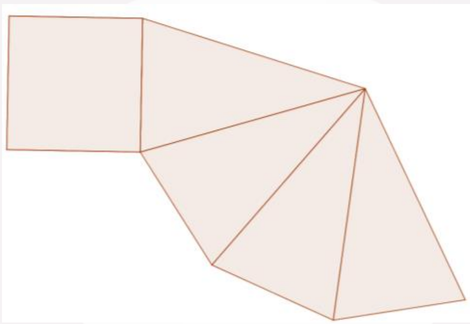


$$Área = área_{lateral} + área_{base}$$

$$Volumen = \frac{1}{3} área_{base} \text{ x altura}$$

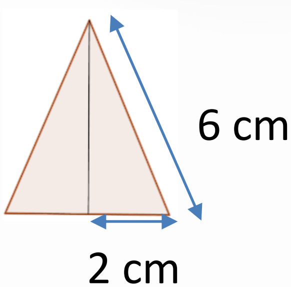


Ejemplo (I)



Cálculo del área de una pirámide cuadrangular cuya base tiene 4 cm y de arista lateral, 6 cm.

$$área_{base} = 4 \cdot 4 = 16cm^2$$



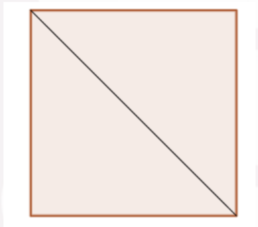
$$altura_{triángulo} = \sqrt{36-4} = 5{,}66cm$$

$$área_{lateral} = 4 \cdot \frac{4 \cdot 5{,}66}{2} = 45{,}28cm^2$$

$$área_{total} = 16 + 45{,}28 = 61{,}28cm^2$$

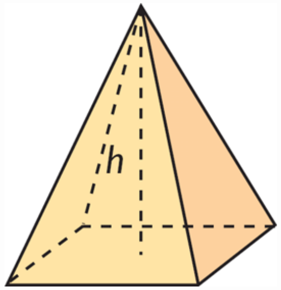
Ejemplo (II)

Calcula el volumen de una pirámide cuadrangular cuya base tiene 4 cm y de arista lateral, 6 cm.



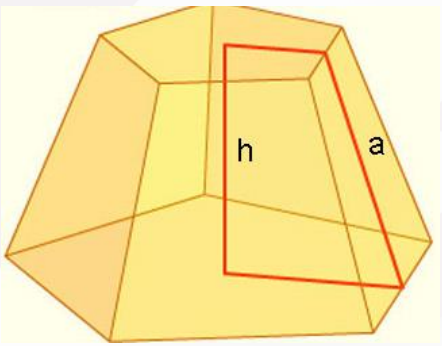
$$diagonal_{base} = \sqrt{16+16} = 5{,}66cm$$

$$\text{altura}_{pirámide} = \sqrt{36 - \left(\frac{5{,}66}{2}\right)^2} = 5{,}29cm$$



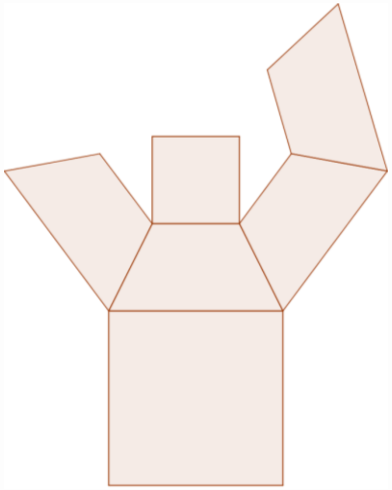
$$Volumen = \frac{1}{3} 16 \cdot 5{,}29 = 28{,}21cm^3$$

Tronco de pirámide de bases paralelas



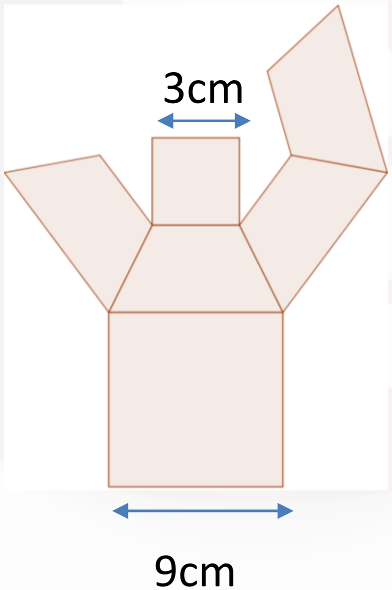
Es un poliedro comprendido entre la base de la pirámide y un plano paralelo a la base que corta a todas las aristas laterales.

$$Vol = volumen_{pirámide\_mayor} + volumen_{pirámide\_menor}$$

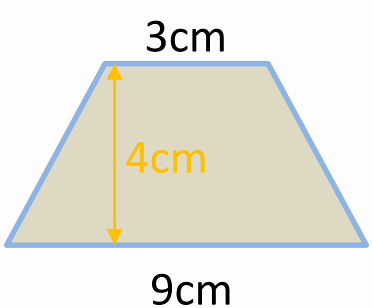


$$Área = área_{lateral} + área_{base\_mayor} + área_{base\_menor}$$

Ejemplo I



Sección del tronco



Cálculo del área de un tronco de pirámide cuadrangular con bases paralelas cuya base mayor tiene 9 cm de lado y la base menor 3 cm, siendo su altura de 4 cm.

$$área_{base\ menor} = 3 \cdot 3 = 9cm^2$$

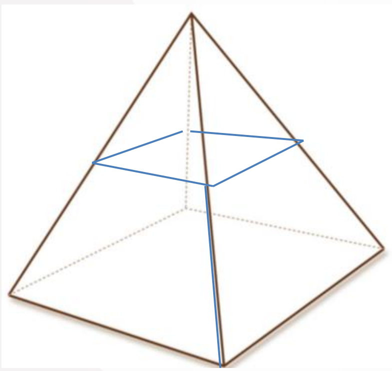
$$área_{base\ mayor} = 9 \cdot 9 = 81cm^2$$

$$altura_{trapecio\ lateral} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5cm^2$$

$$área_{lateral} = \frac{(3+9)\cdot 5}{2} = 30cm^2$$

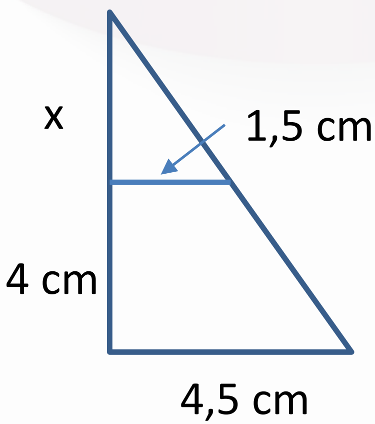
$$área_{total} = 9 + 81 + 4 \cdot 30 = 210cm^2$$

Ejemplo II



Cálculo del volumen de un tronco de pirámide cuadrangular con bases paralelas cuya base mayor tiene 9 cm de lado y la base menor 3 cm, siendo su altura de 4 cm.

Utilizaremos el teorema de Tales para calcular la altura de la pirámide de la que procede el tronco y calcularemos la diferencia de volúmenes.



$$\frac{x}{1{,}5} = \frac{x+4}{4{,}5} \; resolviendo \; la \; ecuación \; x = 2$$

$$V_{pequeña} = \frac{1}{3} 3^2 \cdot 2 = 6 \; cm^3 \qquad V_{grande} = \frac{1}{3} 9^2 \cdot 6 = 162 \; cm^3$$

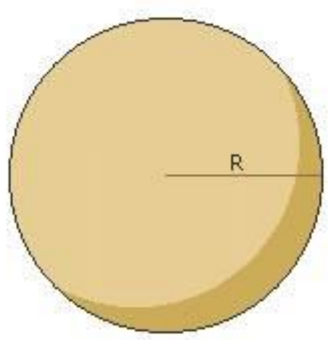
$$V_{tronco} = V_{grande} - V_{pequeña} = 162 - 6 = 156 \; cm^3$$

CUERPOS REDONDOS

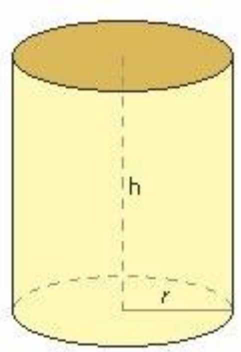
Definición

- Un cuerpo redondo es aquel que está limitado por al menos una superficie curva.
- Los cuerpos redondos pueden ser generados haciendo girar sobre un eje una figura plana.

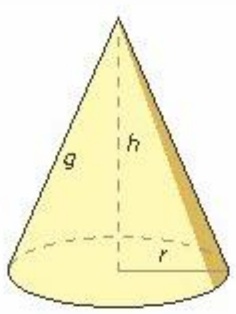
Esfera



Cilindro

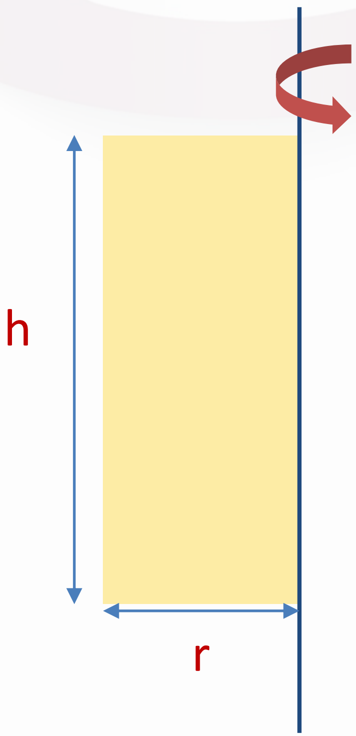


Cono

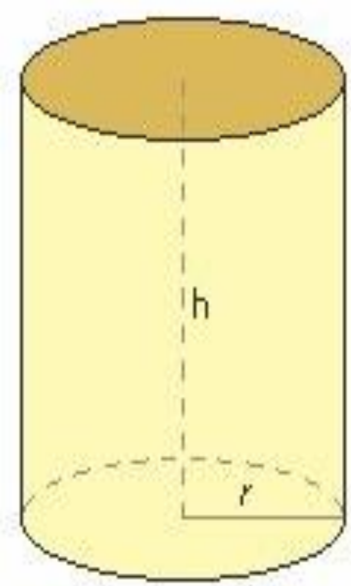


El cilindro

- Un cilindro se puede generar haciendo girar un rectángulo sobre uno de sus lados.



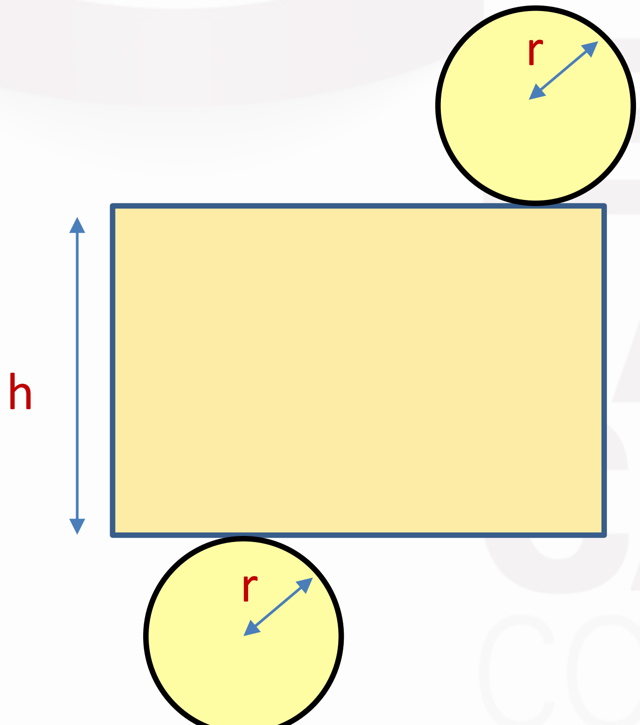
La altura del cilindro coincide con el lado del rectángulo que hace de eje de giro.
El radio de las bases coincide con la longitud del otro lado del rectángulo



Superficie del cilindro

El desarrollo del cilindro consta de dos círculos y un rectángulo.
Uno de los lados del rectángulo es la longitud de una circunferencia de radio r y el otro, la altura del cilindro.

$$Supercifie = 2 \cdot área_{círculos} + área_{rectángulo}$$

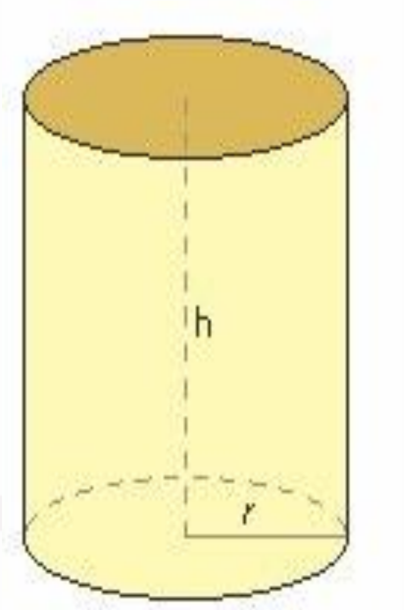


$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

Volumen del cilindro

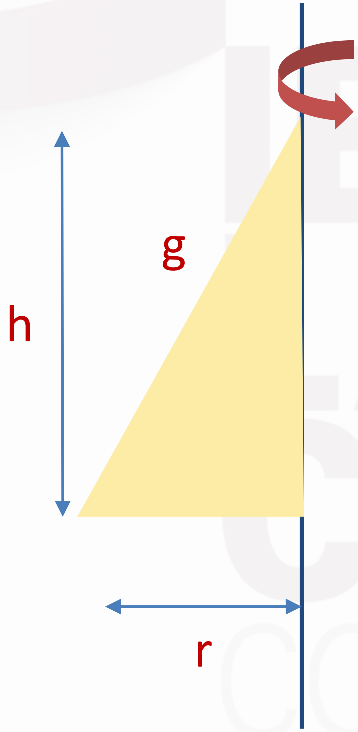
De forma análoga al volumen de un prisma, el volumen de un cilindro se calcula multiplicando el área de la base, que es un círculo por altura del mismo.

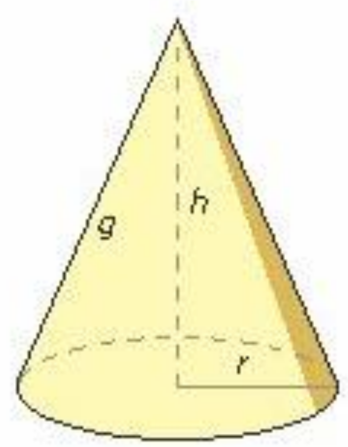
$$V = \pi r^2 h$$



El cono

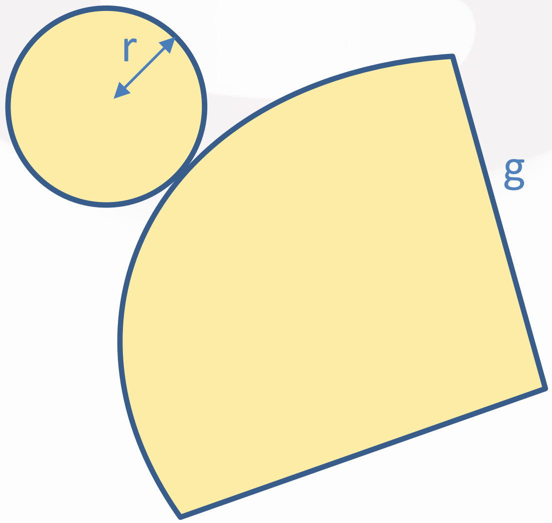
- Un cono se puede generar haciendo girar sobre un cateto un triángulo rectángulo.





Superficie de un cono

El desarrollo del cono consta de un círculo y un sector circular.



La superficie del sector circular se pude obtener utilizando la proporción que relaciona la longitud de la circunferencia de radio r y el sector circular de longitud dicha circunferencia y radio g (generatriz del cono).

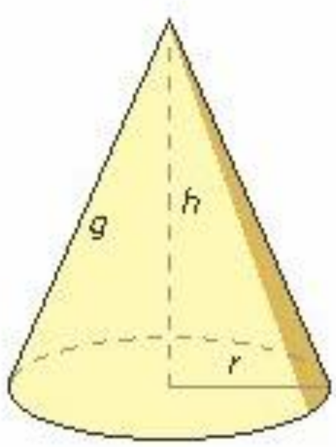
$$\frac{\pi g^2}{2\pi g} = \frac{superficie\ sector}{2\pi r} \Longrightarrow superficie\ sector = 2\pi r g$$

$$S_{cono} = \pi r^2 + 2\pi r g$$

Volumen de un cono

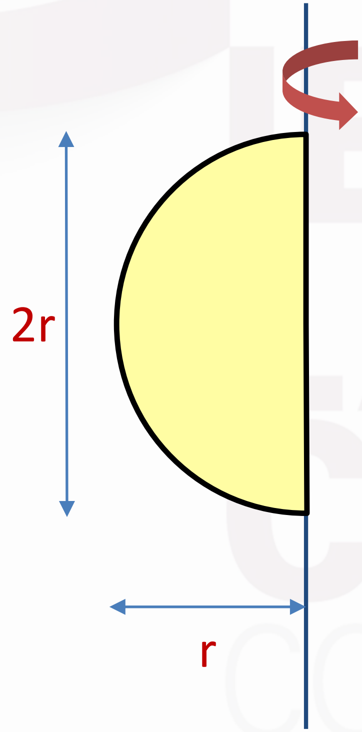
El volumen de un cono se corresponde con una tercera parte del volumen de un cilindro de igual base y altura (análoga relación entre el volumen de una pirámide y su correspondiente prisma)

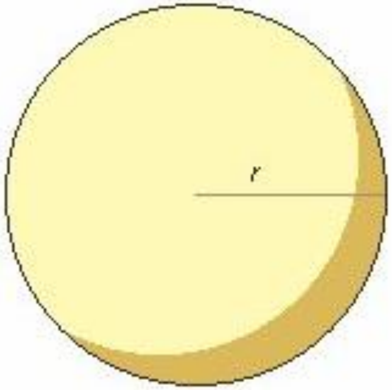
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



La esfera

- Una esfera se puede generar haciendo girar un semicírculo sobre su diámetro.



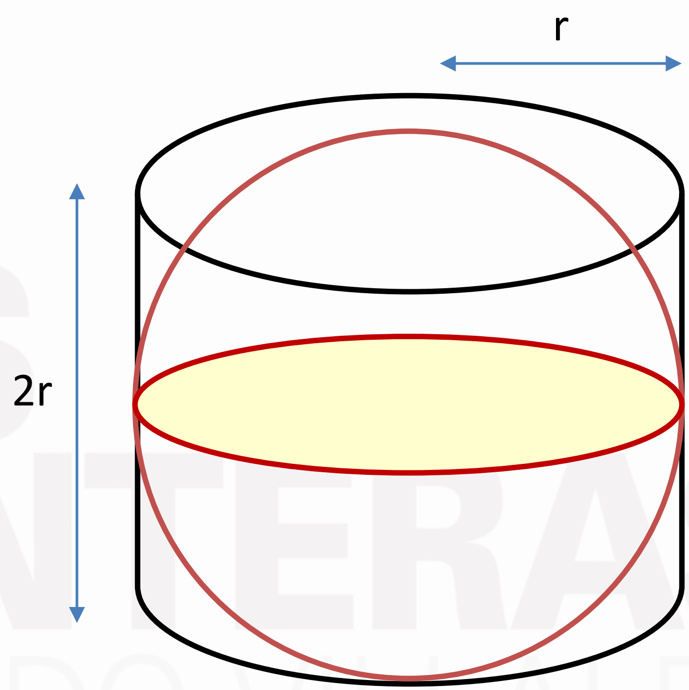


Superficie y volumen de la esfera

El desarrollo de una esfera únicamente se puede realizar por aproximación, siendo su superficie:

$$S = 4\pi r^2$$

Ésta coincide con la del cilindro de base un círculo de radio r y altura 2r.



$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$