Ecuaciones

Definiciones I

Una **ecuación** es una igualdad algebraica que se verifica únicamente para un conjunto determinado de valores de las variables o indeterminadas que forman la ecuación.

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

Esta igualdad es una identidad. Se verificar para cualquier valor de **a y b.**

$2x = 4$

Esta igualdad es una ecuación. Se verifica únicamente cuando x vale 2.

Una **solución** de una ecuación son aquellos valores que al sustituirlos en la ecuación hacen que la igualdad sea cierta.

Definiciones II

Resolver una **ecuación** es calcular los valores para los que se verifica la igualdad.

Las **incógnitas** de una ecuación son las letras que aparecen en ésta.

Comprobar una ecuación consiste en sustituir las incógnitas por los valores obtenidos en el proceso de resolución de la ecuación.

Una ecuación puede tener una solución, varias o ninguna solución.

Los miembros de una ecuación son cada una de las expresiones que separa el símbolo “=“.

Ecuaciones con una incógnita

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Ecuaciones de grado uno con una incógnita

Una ecuación de primer grado con una incógnita puede expresarse de la forma:

$$ax + b = 0$$

Donde ***a*** y ***b*** son coeficientes de la ecuación, siendo números conocidos.

x es la incógnita, representa el valor buscado.

El único número que verifica la ecuación es $-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$, es decir, su solución.

Ecuaciones equivalentes

- Dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones.
- Las siguientes reglas permiten obtener una ecuación equivalente:

1. Si a los dos miembros de una ecuación se le suma (o resta) la misma expresión numérica o algebraica, resulta una ecuación equivalente.
2. Si se multiplica (o divide) los dos miembros de una ecuación por un número (distinto de cero), la ecuación resultante es equivalente a la inicial.

Ejemplo

$$3x - 12 = 45$$

Sumando 12 a ambos miembros de la ecuación

$$3x - 12 + 12 = 45+12$$

$$3x = 57$$

Dividiendo entre 3 ambos miembros de la ecuación

$$\frac{3x}{3} = \frac{57}{3}$$

Simplificamos cada miembro

$$x = 19$$

Sugerencias para la resolución de una ecuación de primer grado

1. Quitar los paréntesis
2. Quitar denominadores
3. Suprimir los términos iguales de ambos miembros
4. Transponer los términos numéricos a un miembro y al otro los término no numéricos.
5. Reducir los términos semejantes
6. Despejar la incógnita

Ejemplo I

$$4(x-3)-7(x-4)=6-\mathrm{x}$$

Quitar los paréntesis (hemos aplicado la propiedad distributiva)

$$4x-12-7x+28=6-x$$

Agrupamos términos semejantes en cada miembro de la ecuación

$$-3x+16=6-x$$

Transponer los términos numéricos a un miembro y al otro los término numéricos.

$$-3x+x=6-16$$

Reducir los términos semejantes

$$-2x=-10$$

$$x=\frac{-10}{-2}=5$$

Despejar la incógnita

Ejemplo II

$$\frac{x}{2}+\frac{3x}{4}-\frac{5x}{6}=15$$

Quitar denominadores (hemos multiplicado ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores 12)

$$6x+9x-10x=180$$

Agrupamos términos semejantes en cada miembro de la ecuación

$$5x=180$$

$$x=\frac{180}{5}=36$$

Despejar la incógnita

Ejemplo III

$$\frac{x-1}{1}-\frac{x-2}{2}+\frac{x-3}{3}=0$$

Quitar denominadores (hemos multiplicado ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores 6)

$$6x-6-3x+6+2x-6=0$$

Agrupamos términos semejantes en cada miembro de la ecuación

$$5x-6=0$$

Transponer los términos numéricos a un miembro y al otro los término numéricos.

$$5x=6$$

Despejar la incógnita

$$x=\frac{6}{5}$$

Plantear ecuaciones

En un problema, normalmente intervienen:

1. Los valores conocidos del problema, conocidos como **datos**.
2. Valores desconocidos que hay que obtener. Normalmente, son candidatos a ser **incógnitas**.
3. **Relaciones** entre los datos y las incógnitas, que permitirán escribir las ecuaciones.

Ecuaciones con una incógnita

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Ecuaciones de segundo grado

- Una ecuación de segundo grado siempre puede reducirse a la forma:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

- Cuando la ecuación se encuentra expresada de la anterior forma se dice que está en forma canónica, general o estándar.

Fórmula para la resolución de una ecuación de segundo grado

- Para resolver una ecuación de segundo grado en forma general, podemos utilizar la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$$

$$\mathbf{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

- Se obtienen así a lo más dos valores sumando y restando la raíz cuadrada de $\mathbf{b^2-4ac}$

Ejemplo I

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Asociamos los valores a cada uno de los coeficientes de la ecuación general

a = 1 ; b = -5 ; c = 6

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Aplicamos la fórmula

$$\mathrm{x} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

Operamos y calculamos las soluciones

$$\mathrm{x} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x = \dfrac{5+1}{2} = 3 \\ x = \dfrac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Ejemplo II

$$x^2 - 4x + 7 = 0$$

Asociamos los valores a cada uno de los coeficientes de la ecuación general

a = 1 ; b = -4 ; c = 7

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Aplicamos la fórmula

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 28}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

Operamos y calculamos las soluciones.

En este caso no hay soluciones reales, pues no existe la raíz de un número negativo.

Ejemplo III

$$\boldsymbol{x^2 + 2x + 1 = 0}$$

Asociamos los valores a cada uno de los coeficientes de la ecuación general

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

a = 1 ; b = 2 ; c = 1

Aplicamos la fórmula

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Operamos y calculamos las soluciones. En este caso sólo hay una solución, pues la raíz es 0.

Número de soluciones

- La expresión radical $\sqrt{\mathbf{b^2 - 4ac}}$ determina el número de soluciones de la ecuación de segundo grado:

    - Dos soluciones si $\mathbf{b^2 - 4ac > 0}$
    - Una solución si $\mathbf{b^2 - 4ac = 0}$
    - Sin solución real si $\mathbf{b^2 - 4ac < 0}$

La expresión $\mathbf{b^2 - 4ac}$ es denominada **discriminante**, pues determina el número de soluciones de la ecuación.

Resolución de ecuaciones incompletas

Se pueden resolver las ecuaciones incompletas sin utilizar la fórmula general.

- Si b = 0, $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$ despejamos **x** y calculamos las soluciones.
- Si c = 0, $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$ factorizamos la expresión. Una de las soluciones siempre es $\mathbf{0}$

Ejemplo

$$x^2 - 9 = 0$$

En este caso b = 0. Por tanto, despejamos x

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9} = \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x = 0$$

En este caso c = 0. Por tanto, factorizamos

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2 = 0; x = -2 \end{cases}$$