



Proporciones y porcentajes

IES
LAS
CANTERAS
COLLADO VILLALBA

Razón

- La razón (geométrica) permite comparar dos cantidades calculando cuantas veces una se encuentra contenida en la otra.
- La razón se expresa mediante la fracción compuesta por ambas cantidades o separadas por el símbolo “:”.
- La razón debe ser enunciada estableciendo un orden.
- El numerador de la fracción se llama **antecedente** y el denominador **consecuente**.

Ejemplos

En clase hay 18 alumnas y 15 alumnos.

La razón se puede representar como $18:15$ o $\frac{18}{15}$, indicando que hay 18 alumnas por cada 15 alumnos (el antecedente es 18 y el consecuente 15).

También, se puede representar como $15:18$ o $\frac{15}{18}$, indicando que hay 15 alumnos por cada 18 alumnas (el antecedente es 15 y el consecuente 18).

En un mapa la escala es $1:50.000$

Esta razón indica que por cada centímetro medido sobre el mapa en la realidad hay 50.000 centímetros.

En este caso, se ha normalizado el uso de la razón, el antecedente siempre es la medida en centímetros realizada en el mapa y el consecuente la correspondencia en centímetros de la medida en la realidad.

Propiedades

- Si al antecedente se le multiplica por un número, la razón queda multiplicada por aquel.
- Si al consecuente se le multiplica por un número, la razón queda dividida por aquel.
- Si al antecedente y al consecuente se le multiplica por el mismo número la razón no varía.

Ejemplo

Si a la razón $\frac{18}{15} = 1,2$

Multiplicamos el antecedente por 2

$$\frac{18 \cdot 2}{15} = 2,4$$

Multiplicamos el consecuente por 2

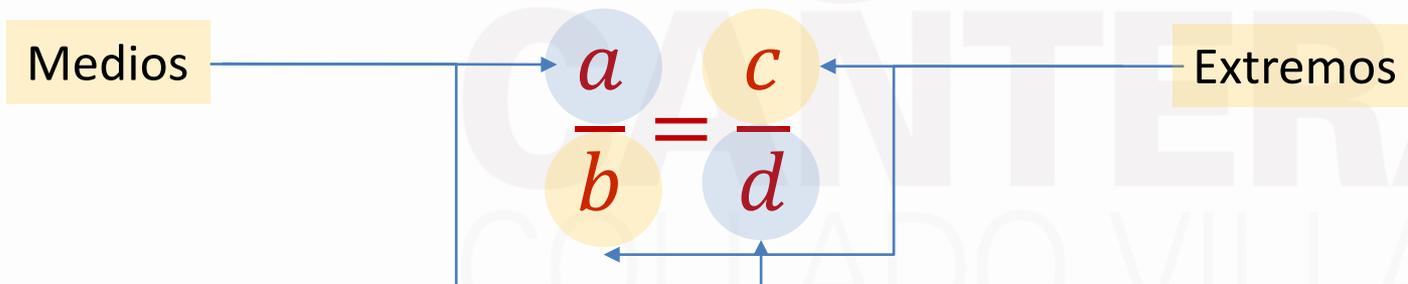
$$\frac{18}{15 \cdot 2} = 0,6$$

Multiplicamos el antecedente y el consecuente por 2

$$\frac{18 \cdot 2}{15 \cdot 2} = 1,2$$

Proporción

- Una proporción es una igualdad entre dos razones.
- Las razones que intervienen se suelen representar mediante fracciones.
- En una proporción se cumple siempre que el producto de medios es igual al producto de extremos.



Ejemplo

En Alcubilla hay dos niños por cada tres adultos. Si la población de Alcubilla tiene 270 adultos, ¿cuántos niños hay en Alcubilla?

En Alcubilla, la razón de niños por adulto es de $\frac{2}{3}$. Es decir, por cada grupo de 3 adultos hay dos niños.

$$\begin{array}{r} 270 \quad | \quad 3 \quad \underline{\hspace{1cm}} \\ 00 \quad 90 \end{array}$$

Hay 90 grupos de 3 adultos en Alcubilla

$$90 \times 2 = 180$$

Por tanto, hay el doble de niños que de grupos de 3 adultos.

$$\frac{2}{3} = \frac{n}{270}$$

Buscamos un número que permita que ambas fracciones sean equivalentes

Ejemplo

En Alcubilla hay dos niños por cada tres adultos. Si la población de Alcubilla tiene 270 adultos, ¿cuántos niños hay en Alcubilla?

$$\frac{2}{3} = \frac{n}{270}$$

Buscamos un número que haga que las fracciones sean equivalentes

Por tanto, este producto debe proporcionar valores iguales (producto de medios igual a producto de extremos)

$$2 \cdot 270 = 3 \cdot n$$

$$540 = 3 \cdot n$$

$$n = \frac{540}{3} = 180$$

El número que multiplicado por 3 da como resultado 540 se obtiene dividiendo.

Constante de proporcionalidad

La constante de proporcionalidad es el cociente entre las cantidades que forman la razón.

La constante de proporcionalidad indica el número de veces que una se da en la otra.

Sirve para calcular razones semejantes

Ejemplo

Cinco kilos de manzanas cuestan dos euros.

Razón $\frac{5}{2}$ ← manzanas
← euros

Constante de proporcionalidad 2,5

Por cada kilo de manzanas hay que pagar 2,5 €

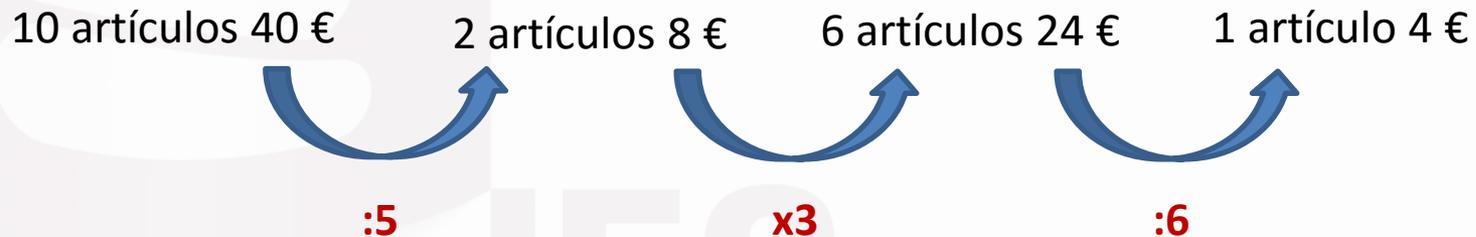
Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes se encuentran relacionadas por una proporción directa cuando al multiplicar (o dividir) una de ellas por un número, la otra magnitud queda multiplicada (o dividida) por el número anterior.

Cuando las magnitudes se relacionan mediante una proporción directa, el cociente de las magnitudes se mantiene constante.

Ejemplos

El número de artículos adquiridos en una compra y el precio pagado por ellos.



El número de comensales y los ingredientes de una receta





Métodos de resolución de problemas

PROBLEMAS RESUELTOS

IES
LAS
CANTERAS
COLLADO VILLALBA

Ejemplo 1

Sabiendo que 3 botes de tomate frito cuestan 3,60 €, calculad el coste de 4 botes.

Solución

El método a utilizar será la “**reducción a la unidad**”.

$$\begin{array}{r} 3,60 \quad | \quad 3 \\ \hline 00 \quad 1,20 \end{array}$$

Calculamos el precio de un bote (1,20 €)

Multiplicamos el precio unitario por el número de unidades (4)

$$1,20 \times 4 = 4,80 \text{ €}$$

Resultado: cuatro botes cuestan 4,80 €

Ejemplo 2

Un caracol avanza 12 metros en 4 días. ¿Cuánto avanzará en 10 días?

Solución

El método a utilizar será la utilización de fracciones equivalentes. Establecemos qué magnitud estará en el numerador y cual en el denominador, por ejemplo, $\frac{\text{metros}}{\text{días}}$

Las fracciones así construidas deben ser equivalentes: $\frac{12}{4} = \frac{m}{10}$

Como las fracciones deben ser equivalentes: $12 \cdot 10 = 4m$

Buscamos un número que multiplicado por 4 de 120 $\begin{array}{r} 120 \quad | \quad 4 \\ 00 \quad 30 \end{array}$

Resultado: el caracol avanza 30 metros en 10 días

Ejemplo 3

Para obtener el color naranja hay que mezclar 1 parte de rojo por cada 2 de amarillo. Si queremos fabricar 24 litros de pintura naranja. ¿Cuántos litros hay que utilizar de cada uno de los anteriores colores?

Solución

Para resolver este problema hay que tener en cuenta que por cada tres partes de pintura una es roja y dos amarillas. Por tanto:

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{24} ; 1 \cdot 24 = 3a ; a = 8 \qquad \frac{2}{3} = \frac{a}{24} ; 2 \cdot 24 = 3a ; a = 16$$

Por tanto, harán falta 8 litros de pintura roja y 16 de pintura amarilla

Ejemplo 4

Tres amigos han comprado un décimo de lotería aportando el primero 12 €, el segundo 5 € y el tercero 3 €. El décimo ha resultado premiado con 300 €, ¿cuánto recibirá cada uno si el reparto del premio es directamente proporcional al dinero aportado para comprar el décimo?

Solución

El precio total del décimo es de $12 + 5 + 3 = 20$ €. Por tanto, cada uno ha puesto la siguientes fracciones: $\frac{12}{20}$, $\frac{5}{20}$ y $\frac{3}{20}$.

Estas fracciones servirán para calcular lo que corresponde a cada uno:

$$\frac{12}{20} = \frac{a}{300} ; 12 \cdot 300 = 20a ; a = 180 \text{ €}$$

$$\frac{5}{20} = \frac{a}{300} ; 5 \cdot 300 = 20a ; a = 75 \text{ €}$$

$$\frac{3}{20} = \frac{a}{300} ; 3 \cdot 300 = 20a ; a = 45 \text{ €}$$

Cada cantidad asignada es proporcional a la cantidad aportada para comprar el décimo

Ejemplo 5

Tres amigos han comprado un décimo de lotería aportando el primero 12 €, el segundo 5 € y el tercero 3 €. El décimo ha resultado premiado con 300 €, ¿cuánto recibirá cada uno si el reparto del premio es directamente proporcional al dinero aportado para comprar el décimo?

Solución

Podemos resolver este problema reduciendo a la unidad. ¿De un euro, que parte corresponde a cada uno de ellos?

$$12 : 20 = 0,6$$

$$5 : 20 = 0,25$$

$$3 : 20 = 0,15$$

Multiplicando cada uno de estos valores por la cantidad a repartir obtendremos lo que corresponde a cada uno:

$$0,6 \cdot 300 = 180 \text{ €}$$

$$0,25 \cdot 300 = 75 \text{ €}$$

$$0,15 \cdot 300 = 45 \text{ €}$$

Ejemplo 6

Para cocinar 3 raciones de un plato se necesitan 25 cl de leche. ¿Cuántas raciones se podrán cocinar con un litro y medio de leche?

Solución

Antes de resolver hay que expresar el litro y medio de leche en centilitros:
 $1,5 \cdot 100 = 150 \text{ cl.}$

Expresando las raciones por cl de leche y estableciendo la proporción:

$$\frac{3}{25} = \frac{a}{150} ; 3 \cdot 150 = 25a ; 450 = 25a ; a = 18 \text{ raciones}$$



PORCENTAJES

IES
LAS
CANTERAS
COLLADO VILLALBA

Definición

- Un porcentaje es una razón con denominador 100.
- Un porcentaje representa una parte del total.
- Un tanto por ciento expresa la relación de proporcionalidad existente entre la parte que se toma de un total y éste.
- El símbolo para representar un porcentaje es %.

Ejemplo I

En un parque el 15% de los árboles son chopos. Si hay 500 árboles, ¿cuántos de éstos son chopos?

Solución

El 15% se encuentra representado por la fracción $\frac{15}{100}$, es decir, por cada grupo de 100 hay 15 chopos:

$$\frac{15}{100} = \frac{a}{500}, \text{ es decir, } 15 \cdot 500 = 100a ; a = 60 \text{ chopos}$$

Podemos calcular un porcentaje más fácilmente si transformamos la fracción de denominador 100 en su correspondiente número decimal, en este caso, 0'15 y multiplicamos por el total.

$$0'15 = \frac{a}{500}, \text{ es decir, } a = 0'15 \cdot 500 ; a = 60 \text{ chopos}$$

Ejemplo II

En un hotel el 15% de las habitaciones se encuentra libre, es decir, 60 habitaciones. ¿Cuántas habitaciones tiene el hotel?

Solución

En este caso sabemos que el 15% del total son 60 habitaciones, por tanto:

$$\frac{15}{100} = \frac{60}{a}, \text{ es decir, } 15 \cdot a = 60 \cdot 100 ; a = \frac{6000}{15} = 400 \text{ habitaciones}$$

Podemos calcular el total más fácilmente si transformamos la fracción de denominador 100 en su correspondiente número decimal, en este caso, 0'15 y dividimos la parte conocida por el número decimal calculado.

$$a = \frac{60}{0'15}, \text{ es decir, } a = 400 \text{ habitaciones}$$

Representación de un porcentaje

- Un porcentaje puede expresarse como una razón o como un número decimal.

Porcentaje	Razón	Decimal
25%	$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$	0'25
10%	$\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$	0'1
50%	$\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$	0'5
3%	$\frac{3}{100}$	0'03
150%	$\frac{150}{100} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$	1'5
100%	$\frac{100}{100} = 1$	1

Aumento porcentual I

Es posible calcular de forma directa un aumento porcentual multiplicando la cantidad a incrementar por el 100% más el porcentaje que representa el aumento.

Ejemplo

A Luis le van a subir el sueldo el 6%. Si actualmente su sueldo es de 1.320 €, ¿cuánto ganará tras el aumento?

Solución

El sueldo tras el aumento será el 100% más el 6%, es decir, el 106%, por tanto, $1'06 \cdot 1.320 = 1399,2$ €.

También podríamos haber calculado el 6% del sueldo (incremento):

$0'06 \cdot 1.320 = 79,2$ y sumarlo al sueldo: $1.320 + 79,2 = 1399,2$ €.

Aumento porcentual II

Podemos conocer la cantidad inicial implicada en un aumento porcentual si conocemos la cantidad final y el porcentaje que se ha aplicado.

Ejemplo

A Luis le han subido el sueldo el 6%. Si actualmente su sueldo es de 1.399,2€, ¿cuánto ganaba antes del aumento?

Solución

El sueldo tras el aumento representa el 106%, de la cantidad inicial, que es el 100%. Por tanto:

$$\frac{106}{100} = \frac{1.399,2}{a} ; 106 \cdot a = 100 \cdot 1.399,2 ; a = \frac{139920}{106} = 1.320 \text{ €}$$

Disminución porcentual I

Es posible calcular de forma directa una disminución porcentual multiplicando la cantidad a disminuir por el 100% menos el porcentaje que representa la disminución.

Ejemplo

A Luis le van a bajar el sueldo el 6%. Si actualmente su sueldo es de 1.320 €, ¿cuánto ganará tras el aumento?

Solución

El sueldo tras la disminución será el 100% menos el 6%, es decir, el 94%, por tanto, $0,94 \cdot 1.320 = 1240,8$ €.

También podríamos haber calculado el 6% del sueldo (decremento):

$0,06 \cdot 1.320 = 79,2$ y restarlo al sueldo: $1.320 - 79,2 = 1240,8$ €.

Disminución porcentual II

Es posible calcular la cantidad inicial conociendo la cantidad final y el porcentaje en que se ha disminuido la cantidad inicial.

Ejemplo

A Luis le han bajado el sueldo el 6% siendo su sueldo de 1240,8 €, ¿cuánto ganaba antes de la bajada de sueldo?

Solución

El sueldo tras la disminución es el 100% menos el 6%, es decir, el 94% del sueldo inicial.

$$\frac{94}{100} = \frac{1240,8}{a} ; 94 \cdot a = 100 \cdot 1.240,8 ; a = \frac{124080}{94} = 1.320 \text{ €}$$



PROPORCIONALIDAD INVERSA

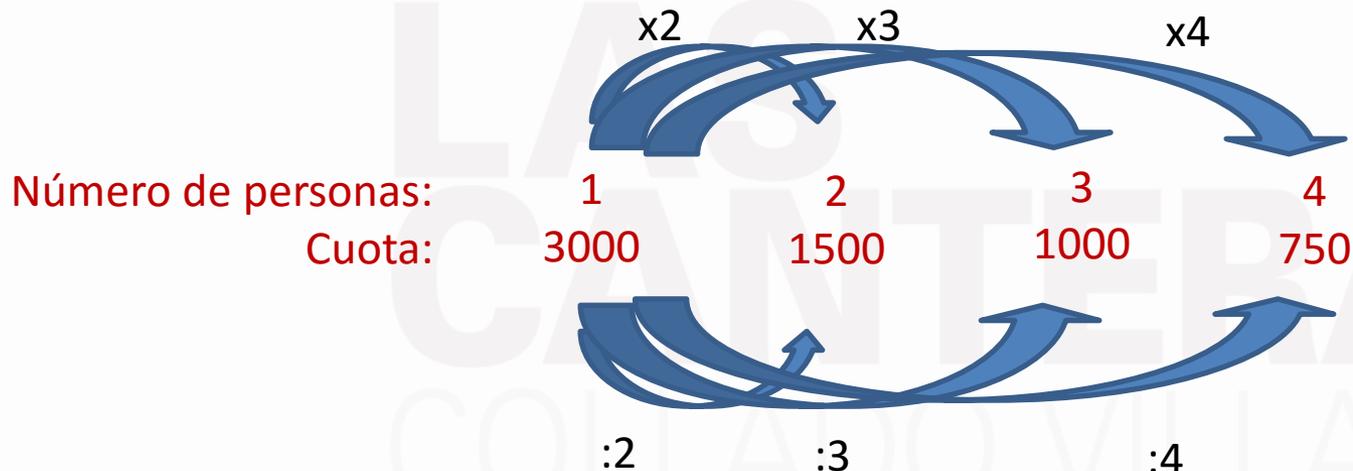
IES
LAS
CANTERAS
COLLADO VILLALBA

Definición

- Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al multiplicar o dividir una de ellas, la otra queda dividida o multiplicada por la misma cantidad.

Ejemplo

El alquiler de una casa cuesta 3.000 €, si el gasto es compartido por 2 personas cada una pagará 1500, si es compartido por 3 cada uno pagará 1000...



Importante

- Cuando dos magnitudes son inversamente proporcionales, si una magnitud aumenta la otra disminuye o si la primera magnitud disminuye la otra aumenta.
- El producto de las dos magnitudes inversamente proporcionales es siempre constante, siendo ese producto la constante de proporcionalidad.

Ejemplo

Si se realiza un recorrido en bicicleta en 2 horas a 12 km/h, al aumentar la velocidad a 24 km/h se reduce el tiempo a 1 hora para recorrer el mismo trayecto.

Si se disminuye la velocidad a 6 km/h, el tiempo aumenta a 4 horas, para recorrer el mismo trayecto.

La constante de proporcionalidad es:

$$2 \times 12 = 1 \times 24 = 4 \times 6 = 24$$

Es decir, la constante de proporcionalidad coincide con la longitud recorrida.

Constante de proporcionalidad

La resolución de problemas en los que aparecen magnitudes inversamente proporcionales se basan en utilizar la constante de proporcionalidad, que coincide en este caso con el producto de las magnitudes.

Ejemplo

Un velero va a salir de travesía con 12 tripulantes. Lleva bebida para 18 días. Si abandonan el velero tres tripulantes, ¿cuántos días podrán viajar con bebida suficiente para todos?.

Solución

El número de tripulantes y el número de días que durará el agua son magnitudes inversamente proporcionales: cuantos más tripulantes menos días, cuantos menos tripulantes mas días. Por tanto, debe mantenerse constante el producto de las magnitudes.

$$12 \cdot 18 = 9 \cdot x ; 216 = 9x ; 24 = x$$

Por tanto, tendrán agua para 24 días.



PROPORCIONALIDAD COMPUESTA

IES
LAS
CANTERAS
COLLADO VILLALBA

Definición

- Una proporcionalidad es compuesta cuando aparecen mas de dos magnitudes relacionadas
- En una proporcionalidad compuesta puede haber una combinación de magnitudes directamente proporcionales dos a dos con magnitudes inversamente proporcionales dos a dos.

Ejemplo I

Cuatro robots ensamblan 5 máquinas en 2 días. ¿cuántos robots se necesitarán para ensamblar 10 máquinas en 8 días?

Solución 1

De forma heurística:

Las magnitudes implicadas son:

Número de robots

Número de máquinas a ensamblar

Cantidad de días

A más número de robots más máquinas (proporción directa)

A más número de robots menos días (proporción inversa)

Por tanto:

En 8 días cuatro robots ensamblan 20 máquinas

En 8 días, dos robots ensamblan 10 máquinas

Por tanto, son necesarios 2 robots.

Ejemplo I (continuación)

Cuatro robots ensamblan 5 máquinas en 2 días. ¿cuántos robots se necesitarán para ensamblar 10 máquinas en 8 días?

Solución 2

Por reducción a la unidad:

Cuatro robots ensamblan 5 máquinas en 2 días

Un robot ensambla $\frac{5}{4}$ máquinas en 2 días

Un robot ensambla $\frac{5}{8}$ máquinas en 1 día

Un robot ensambla 5 máquinas en 8 días

Dos robots ensamblan 10 máquinas en 8 días

Por tanto, son necesarios 2 robots.

Ejemplo I (continuación)

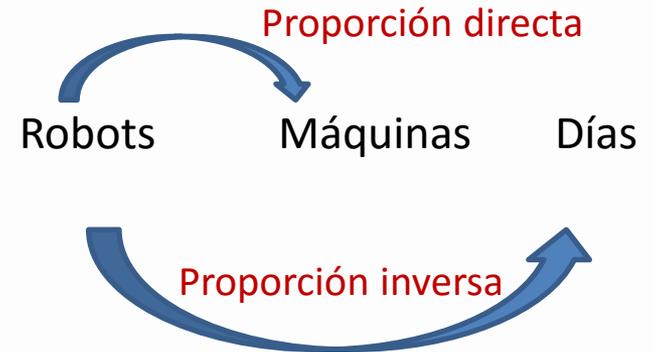
Cuatro robots ensamblan 5 máquinas en 2 días. ¿cuántos robots se necesitarán para ensamblar 10 máquinas en 8 días?

Solución 3

Utilizando las constantes de proporcionalidad:

$$\frac{4}{5} \cdot 2 = \frac{x}{10} \cdot 8$$

Proporción inversa (el producto de las magnitudes debe ser el mismo)



Proporción directa (el cociente de las magnitudes debe ser el mismo)

Resolviendo la ecuación se obtiene el valor de 2 para el número de robots.

Ejemplo II

Cinco grifos con un caudal de 12 litros por minuto llenan un depósito en 8 horas. ¿Cuántos grifos con un caudal de 20 litros por minuto llenarán el mismo depósito en 6 horas?

Solución 1

Reducción a la unidad:

Las magnitudes implicadas son:

Número de grifos

Caudal

Número de horas

A más número de grifos menos horas (proporción inversa)

A más caudal menos horas (proporción inversa)

Por tanto:

Con 5 grifos a 12 litros/minuto 8 horas

Con 1 grifo a 12 litros / minuto 40 horas

Con 1 grifo a 1 litro / minuto 480 horas

Con 1 grifo a 20 litros /minuto 24 horas

Con 4 grifos a 20 litros / minuto en 6 horas

Ejemplo II (continuación)

Cinco grifos con un caudal de 12 litros por minuto llenan un depósito en 8 horas. ¿Cuántos grifos con un caudal de 20 litros por minuto llenarán el mismo depósito en 6 horas?

Solución 2

Utilizando las constantes de proporcionalidad:

Puesto que todas las proporciones son inversas, el producto de las magnitudes debe mantenerse constante:

$$5 \cdot 8 \cdot 12 = x \cdot 20 \cdot 6$$

Donde x representa el número de grifos

Por tanto, despejando:

$$x = 4$$

