Semejanza

Teorema de Tales

Definición

Dos polígonos son semejantes si los ángulos correspondientes son iguales y los lados correspondientes (homólogos) son proporcionales.

Para indicar que los polígonos son semejantes se utiliza el símbolo "≈".

ABCDE ≈ A'B'C'D'E'

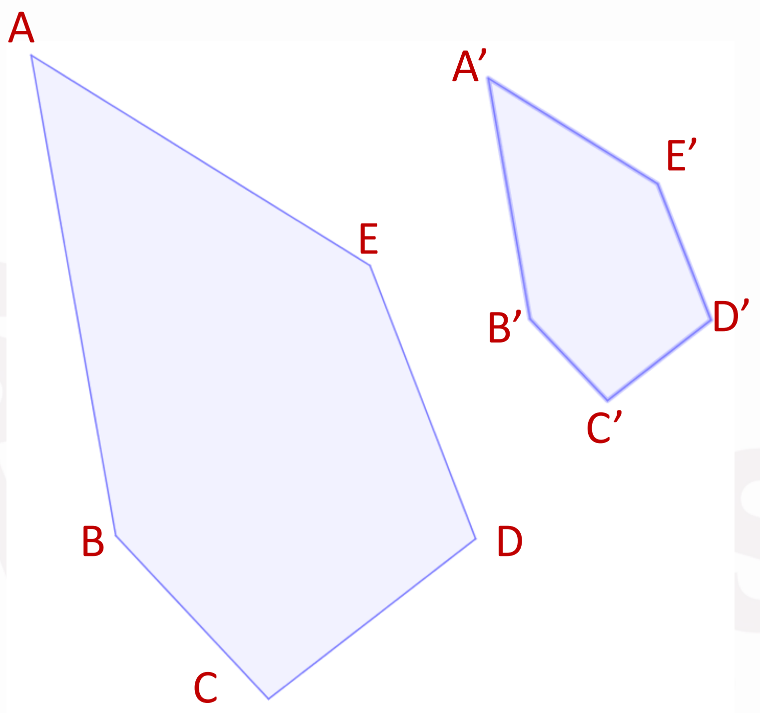
Debe ocurrir que:

Los ángulos sean iguales:

$\hat{A} = \widehat{A'};\ \hat{B} = \widehat{B'};\ \hat{C} = \widehat{C'};\ \hat{D} = \widehat{D'};\ \hat{E} = \widehat{E'}$

Los lados correspondientes (homólogos) son proporcionales:

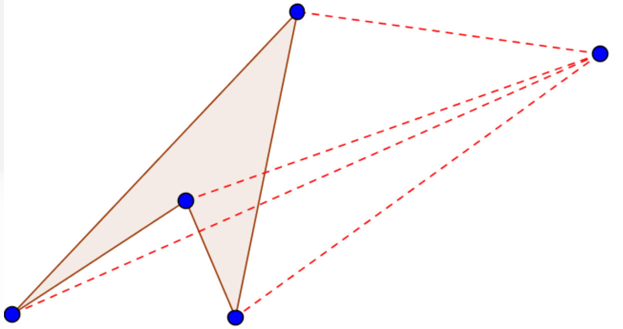
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} = k$$



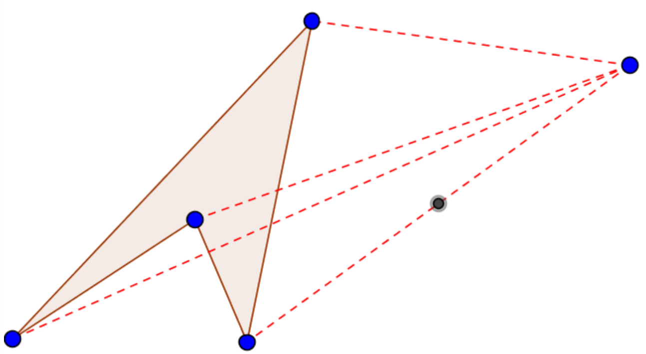
Construcción (Ejemplo)

Dado un polígono construiremos un polígono semejante de razón ½.

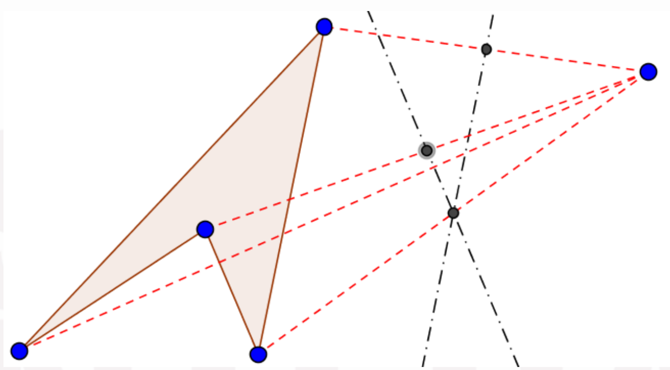
1 Desde un punto exterior al polígono unimos todos los vértices del polígono



2 De uno de los anteriores segmentos, calculamos el punto medio



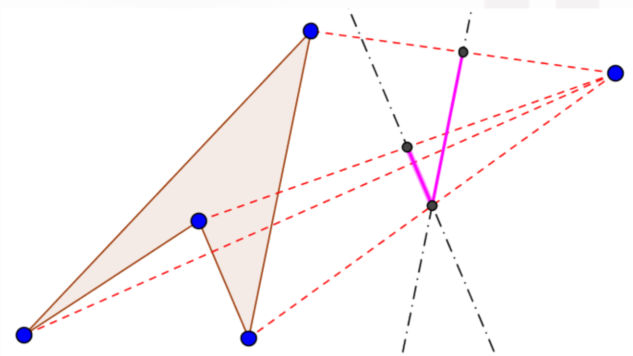
3 Trazamos por el punto medio las rectas paralelas a los lados del polígono que comparten el vértice por el que calculamos el punto medio.

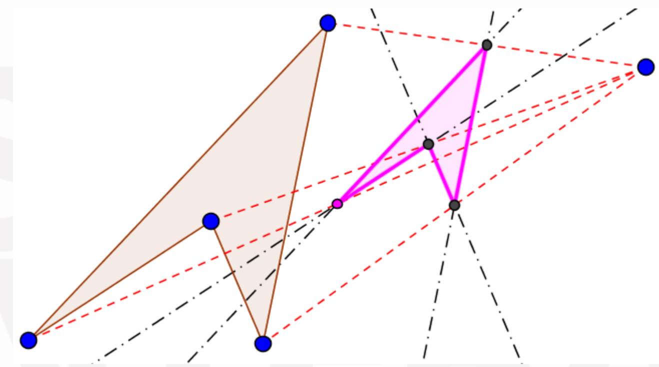


Construcción (continuación)

4 **Los puntos de intersección de las rectas paralelas, con lo segmentos inicialmente construidos serán los vértices del polígono semejante.**

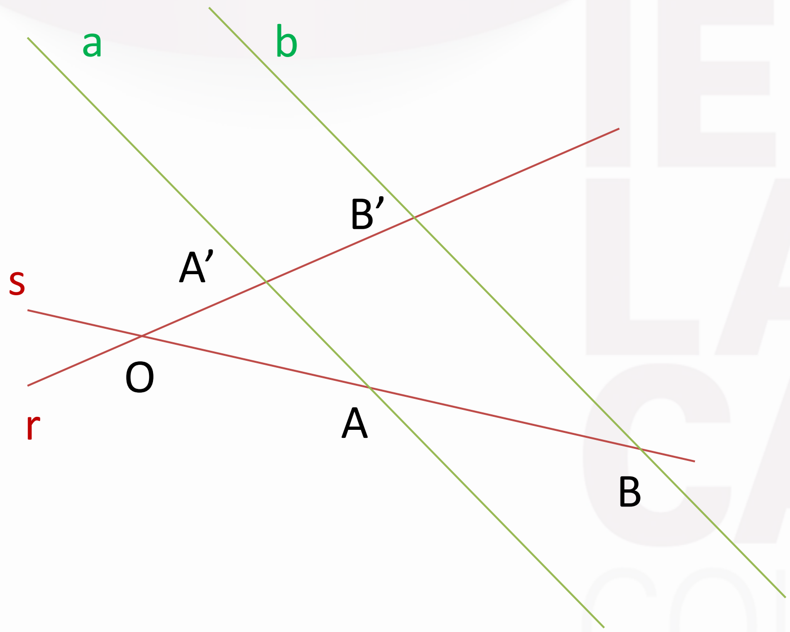
5 **Si con los puntos obtenidos construimos rectas paralelas a los lados que les corresponden pasando por los puntos construidos anteriormente tendremos el polígono semejante construido**





Teorema de Tales

Si dos rectas secantes r y s están cortadas por dos paralelas entre sí a y b, los segmentos que se forman sobre una de las secantes son proporcionales a los segmentos que se forman en la otra secante.



Se cumple:

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OA'}{A'B'}$$

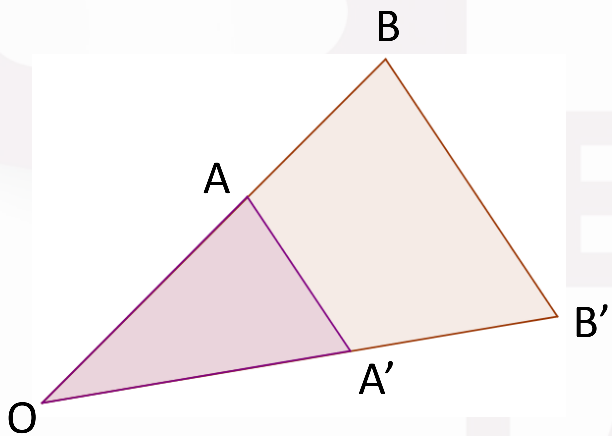
También:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$$

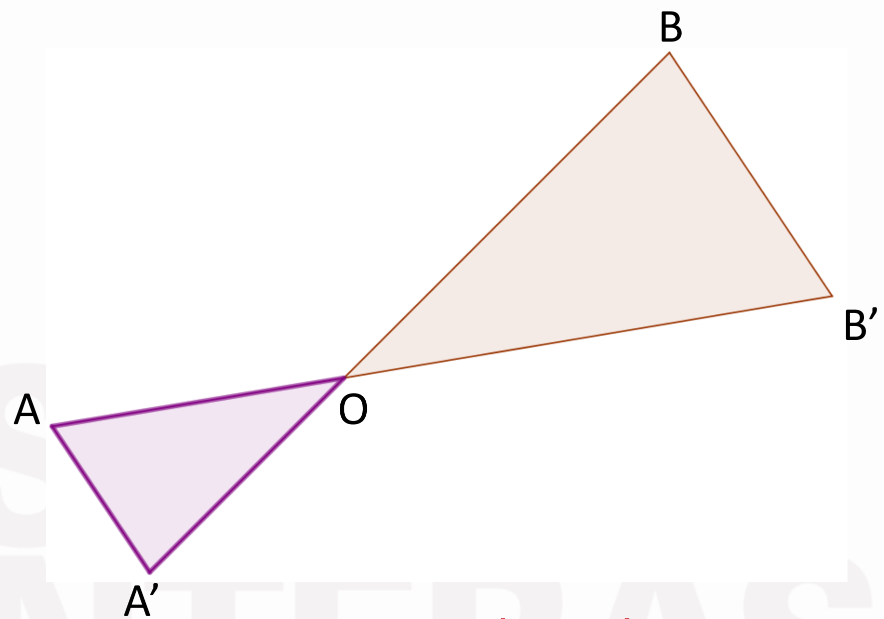
$$\frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'}$$

Triángulos en posición de Tales

Dos triángulos están en posición de Tales si tienen un ángulo común y los lados opuestos son paralelos.



$AA' \parallel BB'$



$AA' \parallel BB'$

Ejemplo

Utilizando el teorema de Tales, calculad el valor de x.

Solución:
Podemos utilizar la siguiente igualdad que nos proporciona el teorema de Tales:

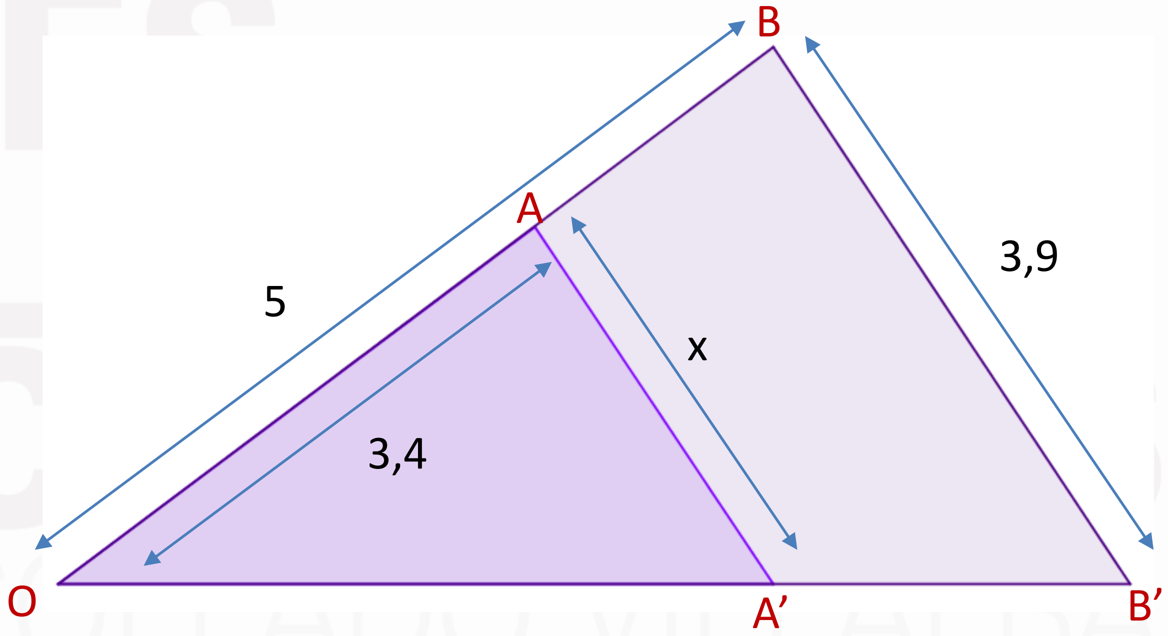
$$\frac{OA}{AA'} = \frac{OB}{BB'}$$

Sustituyendo:

$$\frac{3{,}4}{x} = \frac{5}{3{,}9}$$

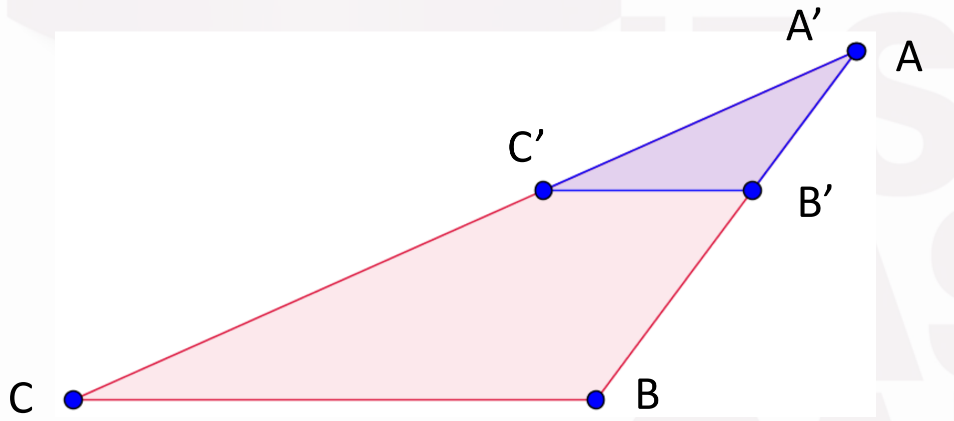
Despejando:

$$x = \frac{3{,}4 \cdot 3{,}9}{5} = 2{,}65$$



Semejanza de triángulos: criterio I

- Dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales



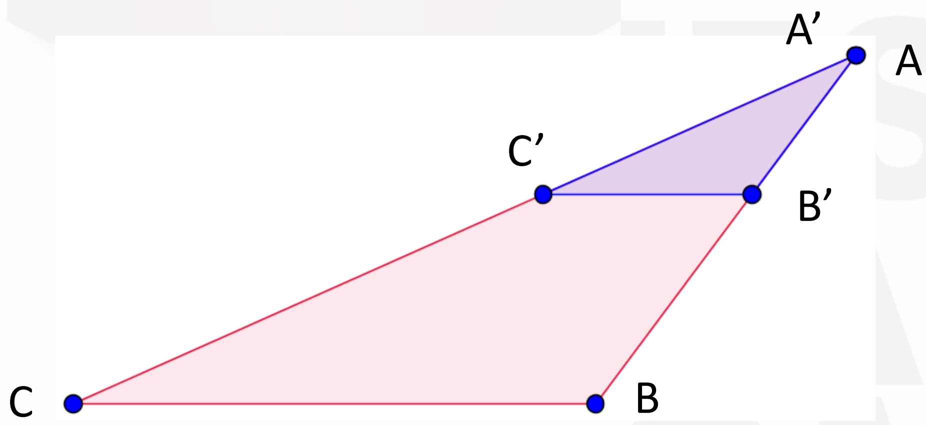
$$\hat{A} = \widehat{A'}$$

$$\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC}$$

$$\overline{ABC} \approx \overline{A'B'C'}$$

Semejanza de triángulos: criterio II

- Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos iguales.

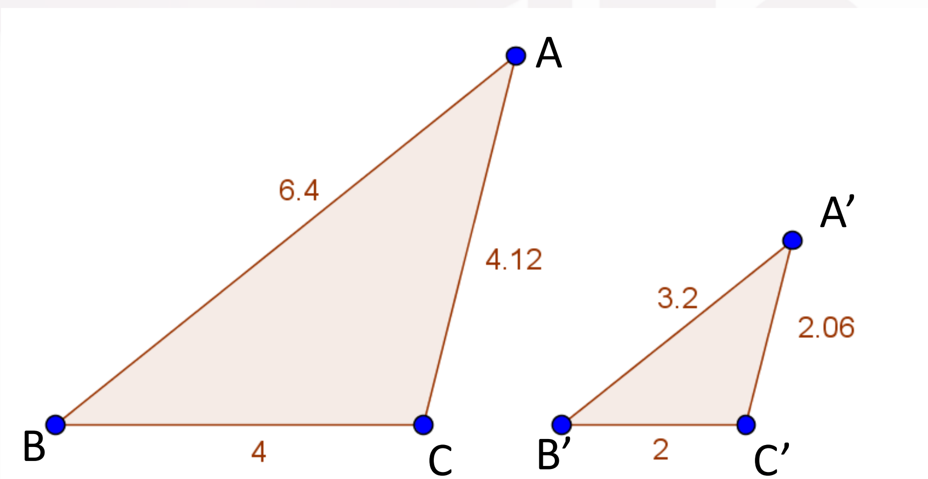


$$\hat{A} = \widehat{A'} \; y \; \hat{B} = \widehat{B'}$$

$$\overline{ABC} \approx \overline{A'B'C'}$$

Semejanza de triángulos: criterio III

- Dos triángulos son semejantes cuando tienen los tres lados proporcionales.



$$AB = k \cdot A'B'$$
$$AC = k \cdot A'C'$$
$$BC = k \cdot B'C$$

$$\overline{ABC} \approx \overline{A'B'C'}$$

Ejemplo I

Los lados de un triángulo miden 24 cm, 18 cm y 36 cm., respectivamente. Si los lados de otro triángulo miden 12 cm, 16 cm y 24 cm, respectivamente. Determina si son o no semejantes.

Solución:

Al conocer las medidas de los lados, vamos a ordenar de mayor a menor las longitudes de los lados de ambos triángulos:

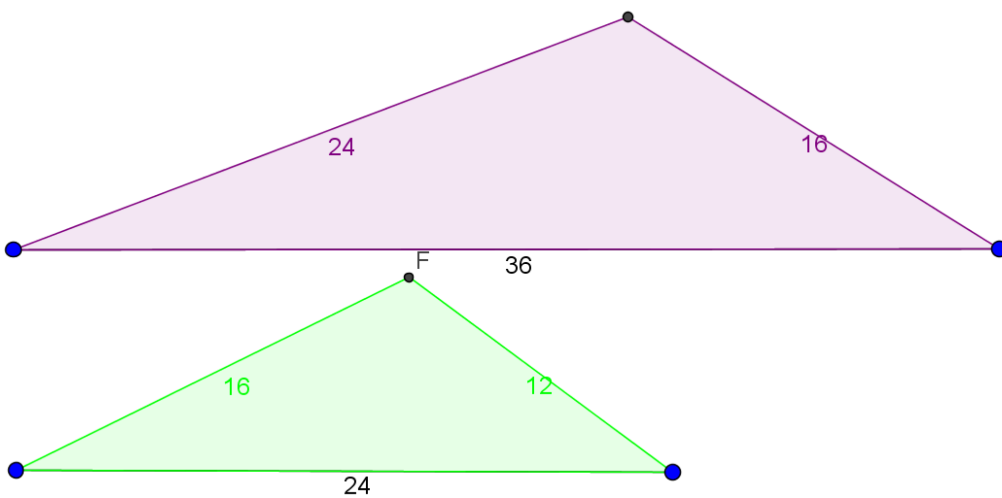
36, 24 y 16 para el primero

24, 16 y 12 para el segundo

A continuación calcularemos el cociente de las medidas de los lados que podrían ser homólogos, es decir:

$$\frac{36}{24} = 1{,}5\ ;\ \frac{24}{16} = 1{,}5\ ;\ \frac{16}{12} = 1{,}3\ \ldots.$$

Por tanto, los triángulos no son semejantes, pues no guardan la misma proporción los lados menores de ambos triángulos.



Ejemplo II

La razón de semejanza entre los triángulos ABC y A’B’C’ es 3:4. Si los lados del primero son 18, 21 y 30, determina los lados del segundo.

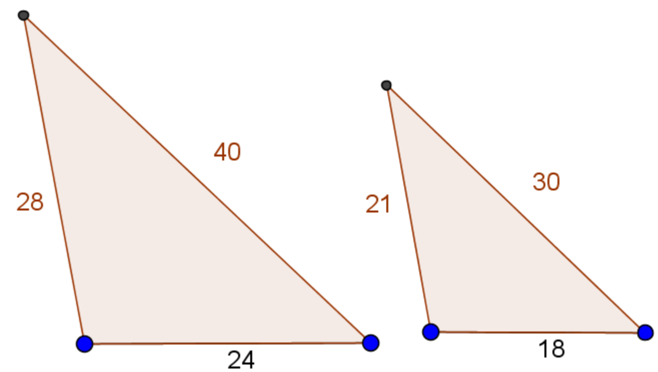
Solución:

Basta con calcular los valores que hacen el cociente de los lados homólogos una fracción equivalente a ¾.

$\frac{18}{x} = \frac{3}{4}$ por tanto el lado homólogo en el triángulo A’B’C’ al de 18 mide 24

$\frac{21}{x} = \frac{3}{4}$ por tanto el lado homólogo en el triángulo A’B’C’ al de 21 mide 28

$\frac{30}{x} = \frac{3}{4}$ por tanto el lado homólogo en el triángulo A’B’C’ al de 30 mide 40



Teorema de la altura

En cualquier **triángulo rectángulo** la altura relativa a la hipotenusa es la media geométrica entre las proyecciones ortogonales de los catetos sobre la hipotenusa.

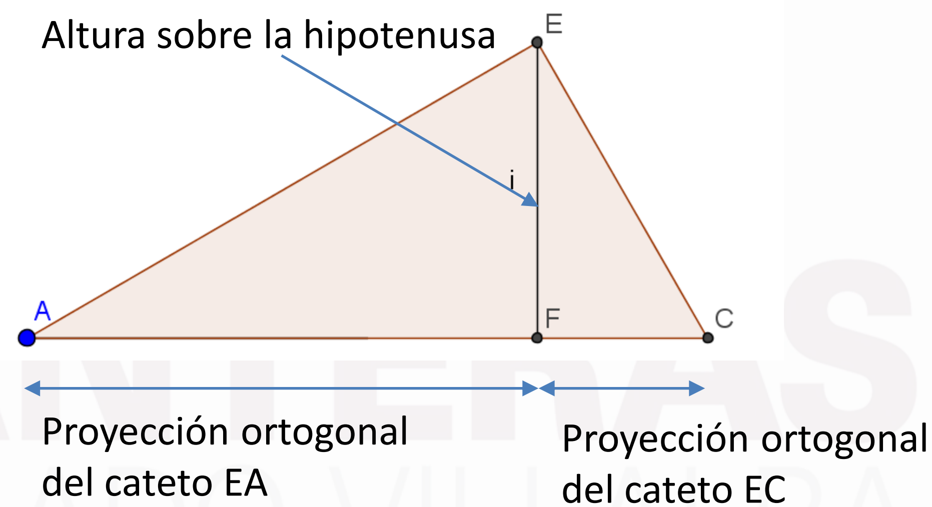
Demostración:
La altura divide al triángulo rectángulo en dos triángulos semejantes (AFE≈EFC), pues todos sus ángulos son iguales, por tanto:

$$\frac{AF}{EF} = \frac{EF}{FC}$$

despejando EF que es la altura:

$EF^2 = AF \cdot FC$, es decir:

$$EF = \sqrt{AF \cdot FC}$$



Teorema del cateto

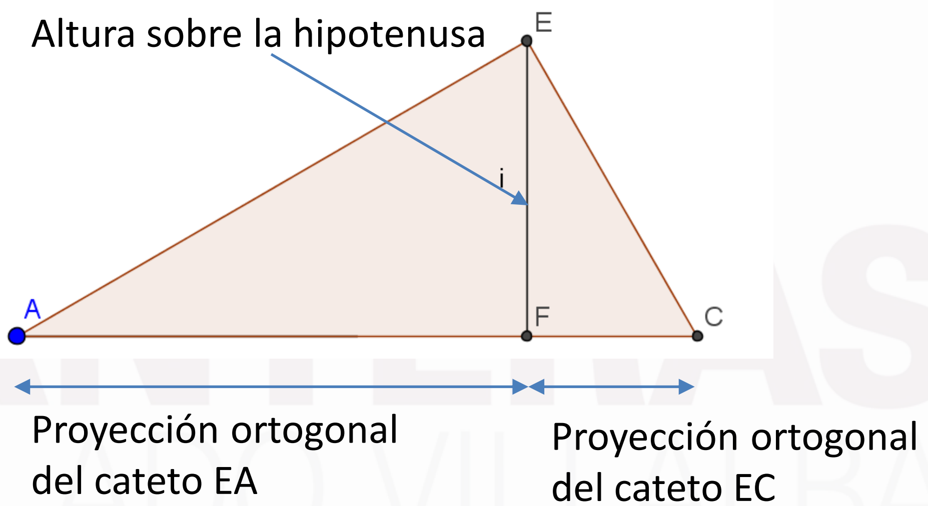
En todo **triángulo rectángulo** el cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección ortogonal de dicho cateto sobre la hipotenusa.

Demostración:
Los tres triángulos de la figura son semejantes (AFE≈EFC ≈AFE), pues todos sus ángulos son iguales, por tanto:

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AE}$$

despejando AE que es el cateto:

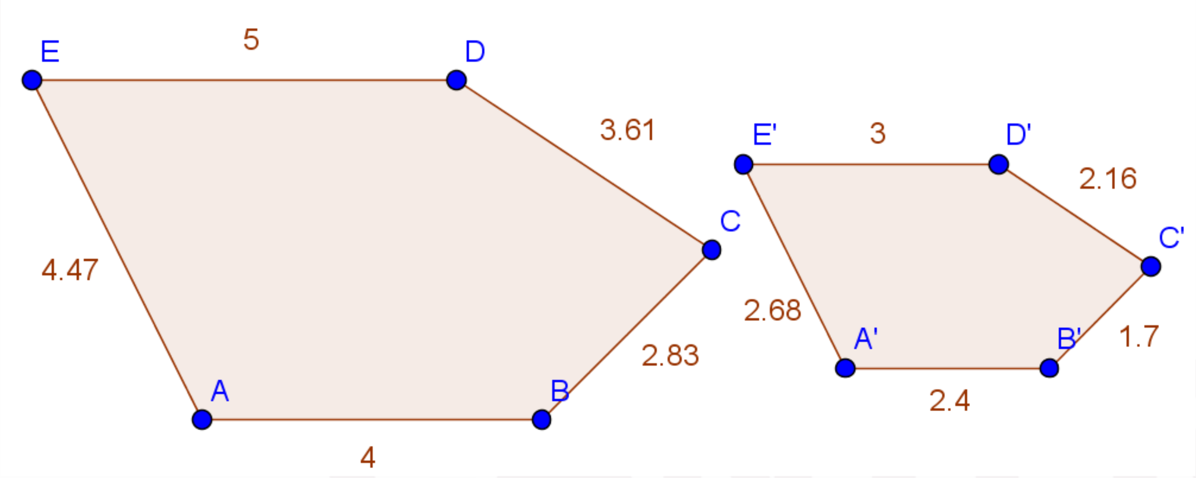
$$AE^2 = AF \cdot AC$$



Razón de los perímetros de dos polígonos semejantes

La razón de los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a la razón de semejanza.

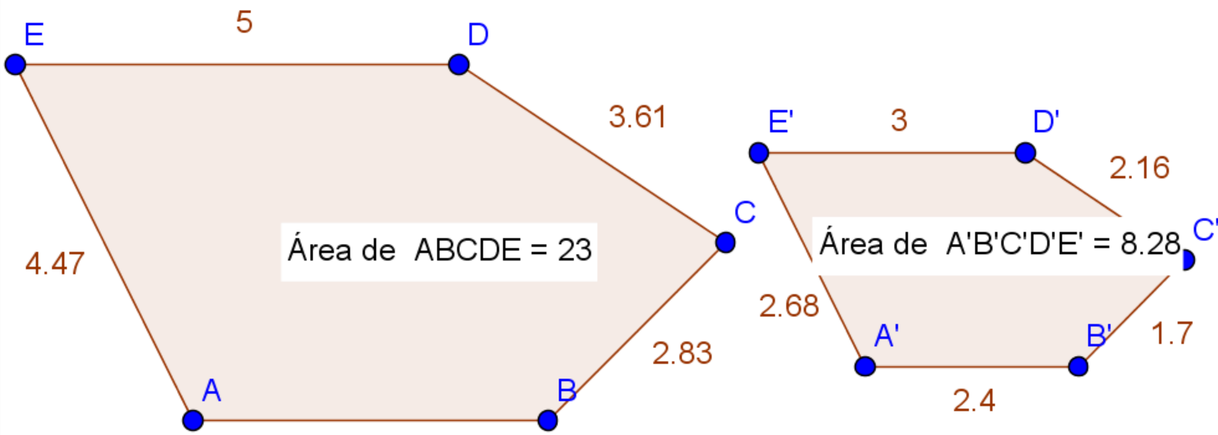
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \cdots = k \qquad \frac{perimetro(ABC..)}{perímetro(A'B'C'\ldots)} = \frac{k \cdot perímetro(A'B'C'\ldots)}{perímetro(A'B'C'\ldots)} = k$$



Razón de las áreas de dos polígonos semejantes

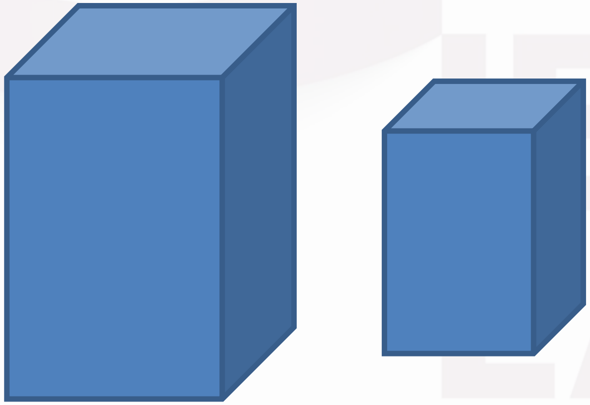
La razón de las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \cdots = k \qquad \frac{área(ABC..)}{área(A'B'C'\ldots)} = \frac{k^2 \cdot área(A'B'C'\ldots)}{área(A'B'C'\ldots)} = k^2$$



Razón de los volúmenes de dos cuerpos semejantes.

La razón de los volúmenes de dos cuerpos semejantes es igual al cubo de la razón de semejanza.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \cdots = k$$

$$\frac{volumen(ABC..)}{volumen(A'B'C' \ldots)} = \frac{k^3 \cdot volumen(A'B'C' \ldots)}{volumen(A'B'C' \ldots)} = k^3$$

Mapas, planos y maquetas

Los planos, mapas y maquetas son representaciones reducidas y semejantes a la realidad que representan. Estas representaciones se hacen a escala.

Escalas

La **escala** es la relación que existe entre la medida en la representación y la medida real.

La escala no tiene unidades, es únicamente una razón.

Si el numerador de la razón es mayor que el denominador, se trata de una escala de ampliación, por ejemplo, 3:1, será de reducción en caso contrario, por ejemplo 1:500.

La escala 1:1 se corresponde a un objeto representado a tamaño real (escala natural).

En una escala 1:500 cada unidad representada en un plano se corresponde con 500 unidades en la realidad.

Ejemplo I

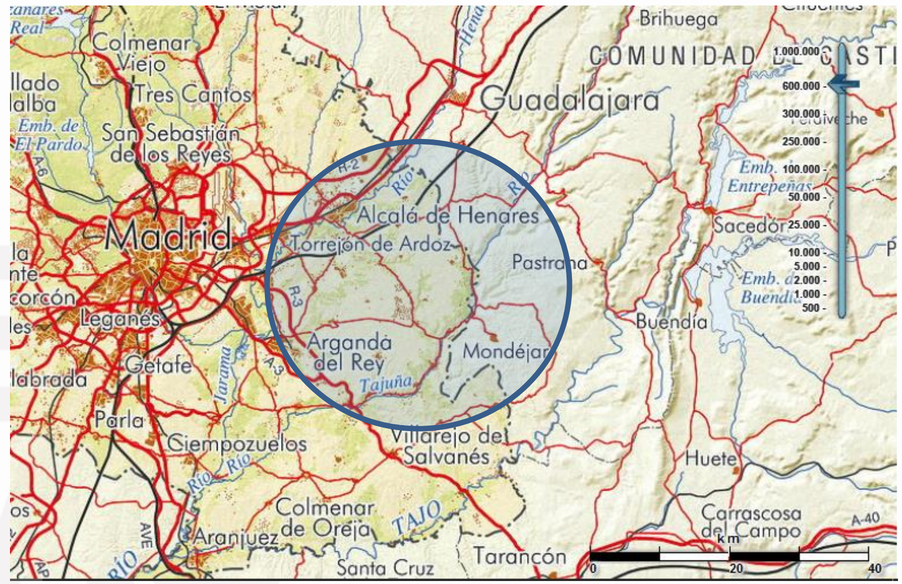
Este mapa tiene una escala 1:600.000. ¿Qué distancia real hay entre Arganda del Rey y Alcalá de Henares?

La distancia en el mapa entre las dos poblaciones es de aproximadamente 4 cm.

Por tanto, en la realidad

4x600.000 cm=2.400.000 cm

=24 km



Ejemplo II

Dos ciudades que separadas por 36 km de distancia, se encuentran separadas en un mapa por 7,2 cm. ¿Cuál es la escala del mapa?

Solución:
La escala de un mapa no es más que la razón que existe entre una unidad medida en el mapa y las unidades reales. Hay que recordar que antes de realizar las operaciones tendremos que utilizar las mismas unidades (36 km = 3.600.000 cm)

Por tanto:

$$\frac{7{,}2}{3600000} = \frac{1}{500.000}$$

La escala es 1:500.000