

La mosca saltarina:

Solución. Son muchas 25 monedas. Vamos a probar con menos, por ejemplo, con $2 \times 2 = 4$ monedas. Así:

O O
O O

Es obvio que se pose donde se pose, la mosca tiene el camino bien fácil.

Probemos con $3 \times 3 = 9$ monedas. Así:

O O O
O O O
O O O

Si la mosca se posa en una esquina también lo tiene fácil. Si se posa en el centro, también. Pero si se posa en cualquier otra moneda, como fácilmente se observa, lo tiene imposible.

Así, en el caso de $3 \times 3 = 9$ monedas, a veces se puede hacer el paseo, y otras no. Podemos sospechar que en el de $5 \times 5 = 25$ monedas suceda algo parecido.

¿Por qué no se puede hacer el paseo en algunos casos cuando hay 9 monedas?

Señalemos los centros de las monedas con coordenadas:

(-1,1) (0,1) (1,1)
(-1,0) (0,0) (1,0)
(-1,-1) (0,-1) (1,-1)

Es curioso: los puntos desde los que el paseo no se puede hacer son (0,1), (1,0), (0,-1), (-1,0)! En ellos, la suma de las coordenadas es impar. En los restantes, la suma de las coordenadas es par. Llamaremos pares a estos vértices y, a los otros, impares.

Hay cuatro vértices impares y cinco pares. El paseo de la mosca, empezando por un vértice impar, sería:

Impar \Rightarrow Par \Rightarrow Impar \Rightarrow Par \Rightarrow ...

Si terminase en impar, habría más vértices impares que pares. Si terminase en par, habría igual número de las dos clases. Ambas cosas son falsas. ¡La mosca no puede hacer el paseo saliendo de un vértice impar!

Esto da luz más que suficiente para tratar el caso de 5×5 monedas. El camino en los casos en los que se puede hacer se encuentra fácilmente.