Ejercicios semanales 1º Bachillerato CCSS

Primera semana 25/11/2019

1. Opera y simplifica $\frac{x}{x^3-4x^2+3x}+\frac{2}{x^2-1}-\frac{5x^2}{x^2-3x}$

Solución

Para poder sumar habrán de tener cada una de las fracciones algebraicas el mismo denominador, por lo que vamos a factorizar cada uno de los polinomios del denominador:

$$x^3-4x^2+3x=x(x^2-x+3)=x(x-1)(x-3)$$

$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$

$$x^2-3x=x(x-3)$$

Por tanto, como denominador común elegimos:

$$x(x-1)(x-3)(x+1)$$

$$\frac{x}{x^3-4x^2+3x}+\frac{2}{x^2-1}-\frac{5x^2}{x^2-3x}=$$

$$=\frac{x}{x(x-1)(x-3)}+\frac{2}{(x-1)(x+1)}-\frac{5x^2}{x(x-3)}=$$

$$=\frac{x(x+1)}{x(x-1)(x-3)(x+1)}+\frac{2x(x-3)}{x(x-1)(x-3)(x+1)}-\frac{5x^2(x+1)(x-1)}{x(x-1)(x-3)(x+1)}=$$

$$=\frac{x(x+1)+2x(x-3)-5x^2(x+1)(x-1)}{x(x-1)(x-3)(x+1)}=$$

$$=\frac{-5x^4+8x^2-5x}{x(x-1)(x-3)(x+1)}=\frac{(-5x^3+8\mathrm{x}-5)x}{x(x-1)(x-3)(x+1)}=$$

$$=\frac{-5x^3+8\mathrm{x}-5}{(x-1)(x-3)(x+1)}$$

2. Factoriza: $x^3 + 2x^2 - x - 2$

Solución

Cómo se trata de un polinomio de grado 3 empezaremos comprobando si hay alguna raíz entera (los candidatos son $\pm 1\ y\ \pm 2$.

Podemos comprobar que el polinomio se anula para x=1, por lo que podemos expresarlo como:

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (\mathrm{x} - 1)(x^2 + 3x + 2)$

Resolviendo la ecuación de segundo grado $x^2 + 3x + 2 = 0$, obtenemos las otras dos raíces que son -1 y -2.

Por tanto, el polinomio quedará factorizado:

$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (\mathrm{x} - 1)(\mathrm{x} + 1)(\mathrm{x} + 2)$

3. Opera y simplifica: $\frac{2}{1-2\sqrt{2}}$

Solución

Multiplicaremos por el conjugado del denominador, el numerador y el denominador para obtener un número entero en el denominador:

$$\frac{2}{1-2\sqrt{2}} \cdot \frac{1+2\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}} = \frac{2+4\sqrt{2}}{1^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2+4\sqrt{2}}{-7} = -\frac{2+4\sqrt{2}}{7}$$

4. Resuelve $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 7y - 5z = 31 \\ 6x + y + 2z = -1 \end{cases}$

Solución

Se trata de un sistema lineal de 3 ecuaciones con tres incógnitas, que resolveremos por el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -5 & 31 \\ 6 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} Transformaciones: \begin{cases} 2E_1 - E_2 \to E_2 \\ 6E_1 - E_3 \to E_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -29 \\ 0 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} Transformaciones: E_2 + E_3 \to E_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & -29 \\ 0 & 0 & 11 & -22 \end{pmatrix} Por\ tanto: z = -2; y = 3; x = 0$$

5. Resuelve: $x^2 - 3x = \frac{2}{x^2-3x+1}$

Solución

$$x^2 - 3x = \frac{2}{x^2 - 3x + 1}\ ; \quad (x^2 - 3x)(x^2 - 3x + 1) = 2$$

$$(x^2 - 3x)(x^2 - 3x + 1) = 2\ ; \quad x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x - 2 = 0$$

Vamos a comprobar si hay alguna raíz entera (los candidatos son divisores del término independiente):

Podemos comprobar que 1 y 2 son raíces del polinomio, por tanto, podemos expresar la ecuación como:

$$(x-1)(x-2)(x^2 - 3x - 1) = 0$$

Para calcular las otras soluciones resolveremos la ecuación de segundo grado $x^2 - 3x - 1 = 0$:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

que son las otras dos soluciones. Como ninguna de las cuatro soluciones calculadas anulan el denominador de la ecuación original todas son válidas.