Segunda semana

1. Simplifica la siguiente expresión algebraica:

$$\frac{x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 1}{2x^3 - 7x^2 + 8x + 3}$$

Solución

Factorizamos los dos polinomios para poder simplificar:

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = (x-1)^2(x^2 + x - 1)$$

Antes de factorizar el polinomio del denominador comprobaremos si 1 es raíz: $2 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 + 3 = 6$

Por tanto, no podremos simplificar por el factor $(x-1)$, por tanto, la expresión algebraica es irreducible.

2. $2\sqrt{x+1} - 5 = 3\sqrt{4x-3}$

Solución

Se trata de una ecuación irracional, elevaremos los dos miembros de la ecuación al cuadrado:

$\left(2\sqrt{x+1} - 5\right)^2 = \left(3\sqrt{4x-3}\right)^2$

Desarrollando:

$4(x+1) + 25 - 20\sqrt{x+1} = 9(4x-3)\ ;\ -20\sqrt{x+1} = 32x - 56$

Elevando otra vez al cuadrado:

$\left(-20\sqrt{x+1}\right)^2 = (32x-56)^2\ \ ; 400x + 400 = 1024x^2 + 3136 - 3584x$

$1024x^2 - 3984x + 2736 = 0$

$$x = \frac{3984 \pm \sqrt{(-3984)^2 - 4 \cdot 1024 \cdot 2736}}{2 \cdot 1024} = \frac{3984 \pm 2160}{2048} = \begin{cases} x = 3 \\ x = \dfrac{67}{54} \end{cases}$$

Ahora debemos verificar si las soluciones obtenidas por este método son soluciones de la ecuación original:

$x = 3\,;\ 2\sqrt{3+1} - 5 = 3\sqrt{4\cdot 3 - 3}\,;\ -1 = 9\ Por\ tanto\ no\ es\ solución$

$x = \frac{67}{54};\ 2\sqrt{\frac{67}{54}+1} - 5 = 3\sqrt{4\cdot\frac{67}{54} - 3}\,;\ \frac{-270+22\sqrt{54}}{54} = \frac{3\sqrt{6804}}{54}\ ; por\ tanto\ no\ es\ solución.$

3. Resuelve $\begin{cases} 3x + y - z = 4 \\ 2x - 3y + 2z = 3 \\ 5x - 2y + z = 7 \end{cases}$

Solución

Se trata de un sistema lineal de 3 ecuaciones con tres incógnitas, que resolveremos por el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} Transformaciones\colon \begin{cases} 2E_1 - 3E_2 \to E_2 \\ 5E_1 - 3E_3 \to E_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 11 & -8 & -1 \\ 0 & 11 & -8 & -1 \end{pmatrix} Transformaciones\colon E_2 - E_3 \to E_3$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 11 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} El\ sistema\ es\ compatible\ indeterminado$$

Parametrizamos el conjunto de soluciones:

$$z = \propto\,;\ 11y - 8\propto = -1\,;\ \ y = \frac{-1+8\propto}{11};$$

$$3x + \frac{-1+8\propto}{11} + \propto = 4\ ;\ 3x = 4 - \frac{-1+8\propto}{11} - \propto\,; x = \frac{12-19\propto}{33}$$

4. Resuelve $\begin{cases} x^2 + y^2 = 50 \\ xy = -7 \end{cases}$

Solución

El sistema no es lineal y lo resolveremos por sustitución. Despejamos una de las incógnitas de la segunda ecuación.

$y = -\frac{7}{x}$; sustituimos en la primera ecuación:

$$x^2 + \left(-\frac{7}{x}\right)^2 = 50 \; ; \; x^2 + \frac{49}{x^2} = 50;$$

Quitando denominadores y despejando:

$$x^4 + 49 = 50x^2 \; ; \; x^4 - 50x^2 + 49 = 0$$

Se trata pues de resolver una ecuación bicuadrada. Resolveremos haciendo el cambio de variable $t = x^2$ y resolviendo la ecuación de segundo grado resultante:

$$t^2 - 50t + 49 = 0 \; ; \; t = 1 \; o \; t = 49$$

Deshacemos el cambio:

$$Si \; t = 1, entonces \; x = 1 \; o \; x = -1$$

$$Si \; t = 49, entonces \; x = 7 \; o \; x = -7$$

Las soluciones que obtenemos, teniendo en cuenta que $y = -\frac{7}{x}$, son:

$$\boldsymbol{x = 1 \; e \; y = -7; x = -1 \; e \; y = 7; x = 7 \; e \; y = -1; x = -7 \; e \; y = 1}$$

5. Un hipermercado inicia una campaña de ofertas. En la primera de ellas descuenta un 4% en un cierto producto A, un 6% en el producto B y un 5% en el producto C. A las dos semanas pone en marcha la segunda oferta descontando un 8% sobre el precio inicial de A, un 10% sobre el precio inicial de B y un 6% sobre el precio inicial de C.
   Se sabe que si un cliente compra durante la primera oferta un producto A, dos B y tres C, se ahorra 16 euros respecto del precio inicial. Si compra tres productos A, uno B y cinco C en la segunda oferta, el ahorro es de 29 euros. Si compra un producto A, uno B y uno C, sin ningún tipo de descuento, debe abonar 135 euros.

Solución

Para resolver el problema nombraremos de la siguiente forma las tres incógnitas:

$a \equiv Precio\ inicial\ del\ producto\ A$

$b \equiv Precio\ inicial\ del\ producto\ B$

$c \equiv Precio\ inicial\ del\ producto\ C$

El ahorro de 16 € se puede expresar mediante la ecuación:

$$0{,}04a + 0{,}12b + 0{,}15c = 16$$

El ahorro de 29 € se puede expresar mediante la ecuación:

$$0{,}24a + 0{,}1b + 0{,}30c = 29$$

El precio pagado por la compra sin descuento es:

$$a + b + c = 135$$

Se trata de un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas. Hemos multiplicado por 100 la primera y la segunda ecuación para eliminar los decimales y hemos dispuesto la tercera ecuación como la primera. En notación matricial queda el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 135 \\ 4 & 12 & 15 & 1600 \\ 24 & 10 & 30 & 2900 \end{pmatrix} Transformaciones: \begin{cases} 4E_1 - E_2 \to E_2 \\ 24E_1 - E_3 \to E_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 135 \\ 0 & -8 & -11 & -1060 \\ 0 & 14 & -6 & 340 \end{pmatrix} Transformación: 14E_2 + 8E_3 \to E_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 135 \\ 0 & -8 & -11 & -1060 \\ 0 & 0 & 202 & 12120 \end{pmatrix} Transformación:$$

Por tanto:

$$c = 60; b = 50; a = 25$$

La solución es: el precio del producto A era de 25€, el del B 50 € y el C de 60 €.