Tercera semana

1. Simplifica: $\frac{x^4+x^3-2x^2}{x^4+2x^3+x^2+2x}$

Solución

Factorizamos ambos polinomios:

$$x^4+x^3-2x^2 = x^2(x^2+x-2) = x^2(x-1)(x+2)$$

$$x^4+2x^3+x^2+2x = x(x^3+2x^2+x+2) = x(x+2)(x^2+2)$$

$$\frac{x^4+x^3-2x^2}{x^4+2x^3+x^2+2x} = \frac{x^2(x-1)(x+2)}{x(x+2)(x^2+2)} = \frac{x(x-1)}{x(x^2+2)}$$

2. Resuelve: $x^3+x^2+4x+4=0$

Solución

Factorizamos el polinomio, sabiendo que si tiene raíces enteras éstas son divisores de su término independiente. Una de sus raíces es -1:

$$x^3+x^2+4x+4=0\ ;\ (\mathrm{x}+1)(x^2+4)=0$$

No hay soluciones en el conjunto de los números reales para la ecuación de segundo grado, por tanto, la única solución es x=-1.

3. Resuelve $\frac{3}{5-\sqrt{x}} = \frac{1+\sqrt{x}}{3}$

Solución

$$\frac{3}{5-\sqrt{x}} = \frac{1+\sqrt{x}}{3}\ ; 9 = \left(5-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)\ ;\ -x+4\sqrt{x}-4=0$$

Para resolver la ecuación hacemos el cambio de variable $x=t^2$.

$-t^2+4t-4=0$. Ahora la ecuación a resolver es de segundo grado:

$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{-2} = 2$$

Deshaciendo el cambio: $x = 2^2 = 4$

Comprobamos que no se anula el denominador de la ecuación original para verificar que la solución es correcta.

4. $\begin{cases} 2x + 2y + z = 3 \\ 3x - 4y + 6z = 0 \\ x - 6y + 5z = 2 \end{cases}$

Solución

Se trata de un sistema lineal de 3 ecuaciones con tres incógnitas, que resolveremos por el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 6 & 0 \\ 1 & -6 & 5 & 2 \end{pmatrix} Transformaciones: \begin{cases} E_2 - 3E_3 \rightarrow E_2 \\ E_1 - 2E_3 \rightarrow E_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 14 & -9 & -6 \\ 0 & 14 & -9 & -1 \end{pmatrix} Transformaciones: E_2 - E_3 \rightarrow E_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 14 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} Transformaciones: E_2 - E_3 \rightarrow E_3$$

La fila 3 indica que se trata de un sistema incompatible (no tiene solución).

5. Sabiendo que la suma de las tres cifras de un número es 11, que la cifra de las decenas y la de las unidades difieren en 1, y que si se intercambian las cifras de las centenas y las unidades y restamos al número inicial este número el resultado es 396, ¿cuál es el número?

Solución

Definimos el significado de cada una de las variables que utilizaremos para resolver el problema:

$u \equiv cifra\ de\ las\ unidades$u

$d \equiv cifra\ de\ las\ decenas$

$c \equiv cifra\ de\ las\ centenas$

La suma de sus cifras es 11: $u + d + c = 11;$

Las cifras de las unidades y las decenas es de una unidad: $d - u = 1$;

Si se intercambian las cifras de las centenas y las unidades y restamos al número inicial este número el resultado es 396

$$u + 10d + 100c - (c + 10d + 100u) = 396$$

Simplificando las ecuaciones podemos expresar el sistema lineal como:

$$\begin{cases} u + d + c = 11 \\ -u + d = 1 \\ -u + c = 4 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 11 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} Transformaciones: \begin{cases} E_1 + E_2 \rightarrow E_2 \\ E_1 + 2E_3 \rightarrow E_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -3 & -18 \end{pmatrix} Transformaciones: E_1 - 2E_3 \rightarrow E_3$$

Por tanto:

$$c = 6; d = 3\ ; u = 2$$

Solución: el número es 632.