1. Realiza la siguiente operación $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{10}}+\frac{4}{\sqrt{2}-5}-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Solución

Racionalizamos cada uno de los sumandos:

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{10}}{\sqrt{5}-\sqrt{10}}=\frac{5-5\sqrt{2}}{5-10}=-1+\sqrt{2}$$

$$\frac{4}{\sqrt{2}-5}\cdot\frac{\sqrt{2}+5}{\sqrt{2}+5}=\frac{20+4\sqrt{2}}{2-25}=-\frac{20+4\sqrt{2}}{23}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Sumando:

$$-1+\sqrt{2}-\frac{20+4\sqrt{2}}{23}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{-46+46\sqrt{2}-40-8\sqrt{2}-23\sqrt{2}}{46}=$$

$$=\frac{-86+15\sqrt{2}}{46}$$

2. Calcula x en los siguientes casos:
   a. $log_2 x=-2$
   b. $log_4 x=0$

Solución

$$log_2 x=-2 \iff 2^{-2}=x \iff x=\frac{1}{4}$$

$$log_4 x=0 \iff x=4^0=1$$

3. Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{3}{x+1}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$$

Solución

Sumamos (tenemos que tener igual denominador):

$$\frac{6(x-1)x}{2x(x-1)(x+1)}+\frac{4(x+1)x}{2x(x-1)(x+1)}-\frac{2(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x+1)}=\frac{5x(x-1)(x+1)}{2x(x-1)(x+1)}$$

Simplificando

$$6x^2-6x+4x^2+4x-2x^2+2=5x^3-5x$$

$$5x^3-8x^2-3x-2=0$$

Sabemos que las raíces enteras de un polinomio dividen al término independiente. Encontramos de esta forma que x=2 es raíz del polinomio y solución de la ecuación.

$(x-2)(5x^2+2x+1)=0$

La ecuación $5x^2+2x+1=0$ no tiene solución en los números reales, por tanto, la única solución de la ecuación es x=2.

4. Resuelve por el método de Gauss el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} 6x+4y-12z=6 \\ 7x+6y+18z=7 \\ -3x-2y+6z=-3 \end{cases}$$

Solución

Realizamos las transformaciones $7E_1-6E_2 \longrightarrow E_2$ y $E_1+2E_3 \longrightarrow E_3$

$$\begin{cases} 6x+4y-12z=6 \\ \quad -8y-192z=0 \\ \qquad 0=0 \end{cases}$$

Como la última ecuación se ha transformado en $0=0$, el sistema es compatible indeterminado.

Vamos a parametrizar el conjunto de soluciones $z=k$

De la segunda ecuación:

$$-8y-192k=0 \ \longrightarrow y=-24k$$

De la primera ecuación:

$$6x-96k-12k=6 \ \longrightarrow 6x=108k+6 \ \longrightarrow x=1+18k$$

5. Un ama de casa adquirió en el mercado ciertas cantidades de patatas, manzanas y naranjas a un precio de 1, 1,20 y 1,50 €/kg., respectivamente. El importe total de la compra fueron 11,60 €. El peso total de la misma fue de 9 kg. Además, compró 1 kg. mas de naranjas que de manzanas. Plantear un sistema para determinar la cantidad comprada de cada producto y resolver el problema.

Solución

Identificamos las variables que vamos a utilizar:

$x \equiv Kg\ comprados\ de\ patatas$

$y \equiv Kg\ comprados\ de\ manzanas$

$z \equiv Kg\ comprados\ de\ naranjas$

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ y-z=1 \\ 10x+12y+15z=24 \end{cases}$$

Resolviendo queda:

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ y-z=-1 \\ 7z=28 \end{cases}$$

Despejando queda que se han comprado 2 kilos de patatas, 3 kilos de manzanas y 4 kilos de naranjas.

6. Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{3x}{x+y}-\dfrac{6}{y}=-2 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

Solución

Despejamos de la segunda ecuación la variable x y transformamos la primera ecuación para que no tenga denominadores:

$$x=y-1$$

$$\frac{3x}{x+y}-\frac{6}{y}=-2\,;3xy-6(x+y)=-2y(x+y)$$

$$3xy-6x-6y=-2xy-2y^2$$

$$2y^2+5xy-6x-6y=0$$

Sustituimos el valor de x:

$$2y^2+5(y-1)y-6(y-1)-6y=0$$

$$2y^2+5y^2-5y-6y+6-6y=0$$

$$7y^2-17y+6=0$$

$$y=\frac{17\pm\sqrt{17^2-4\cdot7\cdot6}}{2\cdot7}=\frac{17\pm11}{14}=\begin{cases} x=2 \\ x=\dfrac{3}{7} \end{cases}$$

Soluciones (ninguna de ellas provoca que el denominador se anule):

Si $x=2\,;y=1$

Si $x=\frac{3}{7}\,;y=-\frac{4}{7}$