1. El número de montajes M(t) por día de un determinado artículo que un trabajador realiza en función del número de días, t, de entrenamiento viene dado por:

$$M(t) = \frac{600t + 120}{t + 3}$$

   a. Calcula el número de montajes que realiza al empezar a trabajar con ese artículo

   b. ¿Cuántos días debe entrenar para conseguir hacer 500 montajes?¿Cuál es el máximo número de montajes que puede hacer estando entrenado?.

Solución

   a. $M(0) = \frac{600 \cdot 0 + 120}{0+3} = 40\, montajes$

   b. $M(t) = 500; 500 = \frac{600t+120}{t+3}; t = 13{,}8$.

   Calcularemos los puntos críticos y la monotonía de la función

$$M'(t) = \frac{1680}{t^2 + 6t + 9} = \frac{1680}{(t+3)^2}$$

   Por tanto, la derivada nunca se anula, siendo siempre positiva. Por tanto, la función será siempre creciente. Calcularemos el límite cuando x tiende a infinito:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{600t + 120}{t + 3} = 600$$

   Por tanto, el número máximo de montajes es 600.

2. Una empresa maderera arroja diariamente material según la función:

$$p(t) = 0{,}01t^3 - 0{,}2t^2 + t + 1$$

Con p la cantidad de material en kilogramos y t la hora del día con $8 \leq t \leq 20$

¿En qué momento del día aumenta la cantidad de material que arroja?¿En cuál disminuye? Halla la cantidad máxima de material que arroja y a qué hora se produce.

Solución

Calculamos el valor de la función en los extremos del intervalo:

$p(8) = 0{,}01 \cdot 8^3 - 0{,}2 \cdot 8^2 + 8 + 1 = 1{,}32$

$p(20) = 0{,}01 \cdot 20^3 - 0{,}2 \cdot 20^2 + 20 + 1 = 21$

Calcularemos la monotonía de la función:

$p'(t) = 0{,}03t^2 - 0{,}4t + 1$

Calculamos los puntos críticos: $0{,}03t^2 - 0{,}4t + 1 = 0$, por tanto, no tiene puntos críticos, así la función derivada o es positiva o negativa. Como $p'(0) =$

$1 > 0$. La función es siempre creciente, por lo que en el intervalo alcanzará un máximo en $p(20) = 21$ y ocurre a las 8.

3. Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \sqrt{x+1}$ en x = 3.

   Solución

   Calculamos el valor de la función en x=3: $f(3) = \sqrt{3+1} = 2$

   Calculamos la derivada de la función en x=3 para calcular la pendiente de la recta:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \; ; \; f'(3) = \frac{1}{4}$$

   Por tanto, la recta tiene la forma $y = \frac{1}{4}x + n$. Para calcular n, forzaremos a la ecuación de la recta a pasar por el punto (3,2).

$$2 = \frac{1}{4} \cdot 3 + n \, ; n = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

   Por tanto, la recta tiene por ecuación: $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

4. Una fábrica de televisores vende cada aparato a 300 €. Los gastos derivados de fabricar *x* televisores son $D(x) = 200x + x^2$, donde $0 \leq x \leq 80$.

   a. Suponiendo que se venden todos los televisores que se fabrican, halla la función de los beneficios que se obtienen después de fabricar y vender x televisores.

   b. Determina el número de aparatos que conviene fabricar para obtener el beneficio máximo, así como dicho beneficio máximo.

   Solución

   a. El beneficio será el precio de venta de todos los aparatos, menos los costes:
      $\mathrm{B(x)} = 300\mathrm{x} - (200x + x^2) = -x^2 + 100x \; ; \; 0 \leq x \leq 80.$

   b. Calculamos la derivada de la función:
$$B'(x) = -2x + 100 \, , 0 \leq x \leq 80$$
      La función derivada es positiva desde 0 hasta 50 y negativa desde 50 a 80. Por tanto, en x=50 hay un máximo relativo.
      Para x=50, el máximo beneficio será de:
$$\mathrm{B}(50) = -50^2 + 100 \cdot 50 = -2500 + 5000 = 2500 \text{ €}$$