1. Calcula el dominio de la función: $f(x) = \log\left(\frac{x^2+2\mathrm{x}-15}{-x^2+\mathrm{x}+2}\right)$

Solución

La función logaritmo se encuentra definida únicamente para valores positivos. Por tanto, la condición de existencia de imágenes se obtendrá resolviendo la siguiente inecuación:

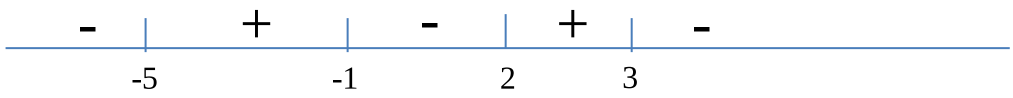
$$\frac{x^2 + 2\mathrm{x} - 15}{-x^2 + \mathrm{x} + 2} > 0$$

Calculamos las raíces de ambos polinomios y factorizamos:

$x^2 + 2\mathrm{x} - 15 = (\mathrm{x} + 5)(\mathrm{x} - 3)$

$-x^2 + \mathrm{x} + 2 = -(\mathrm{x} + 1)(\mathrm{x} - 2)$

Para saber cuando la expresión es positiva representaremos en una recta cada una de las raíces y daremos un valor en cada uno de los intervalos que se formen para conocer el signo de la expresión:



Por tanto, la solución es: $(-5,-1) \cup (2,3)$

2. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3+3x^2+3x+2}{x^3+2x^2}$

Solución

En primer lugar evaluamos: $\frac{(-2)^3+3(-2)^2+3(-2)+2}{(-2)^3+2(-2)^2} = \frac{0}{0}$

Se trata de una indeterminación, por lo que vamos a simplificar la expresión y evaluar de nuevo:

$$\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2} = \lim\limits_{x \to -2} \frac{(x^2 + x + 1)(x + 2)}{x^2(x + 2)} = \frac{3}{4}$$

a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ siendo $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 2 \\ -x + 2 & 2 < x \leq 10 \\ x^2 + 1 & x > 10 \end{cases}$

Solución

En este caso vamos a calcular los límites laterales:

$$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2^2 = 4 \;\; y \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -2 + 2 = 0$$

Cómo los límites laterales no coinciden el límite no existe.

3. Estudia la continuidad de la siguiente función en todo su dominio y esboza su gráfica:

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & x \leq -1 \\ \dfrac{x}{|x|} & -1 < x < 1 \\ (x-1)^2+1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Solución

Vamos a expresar el tramo de la función que utiliza el valor absoluto para poder describir la función de forma más fácil:

La función $g(x) = \frac{x}{|x|}$ no se encuentra definida en x=0 (no se puede dividir por cero) y puede expresarse como:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{-x} & si\ x < 0 \\ \dfrac{x}{x} & si\ x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & si\ \ x < 0 \\ 1 & si\ \ x > 0 \end{cases}$$

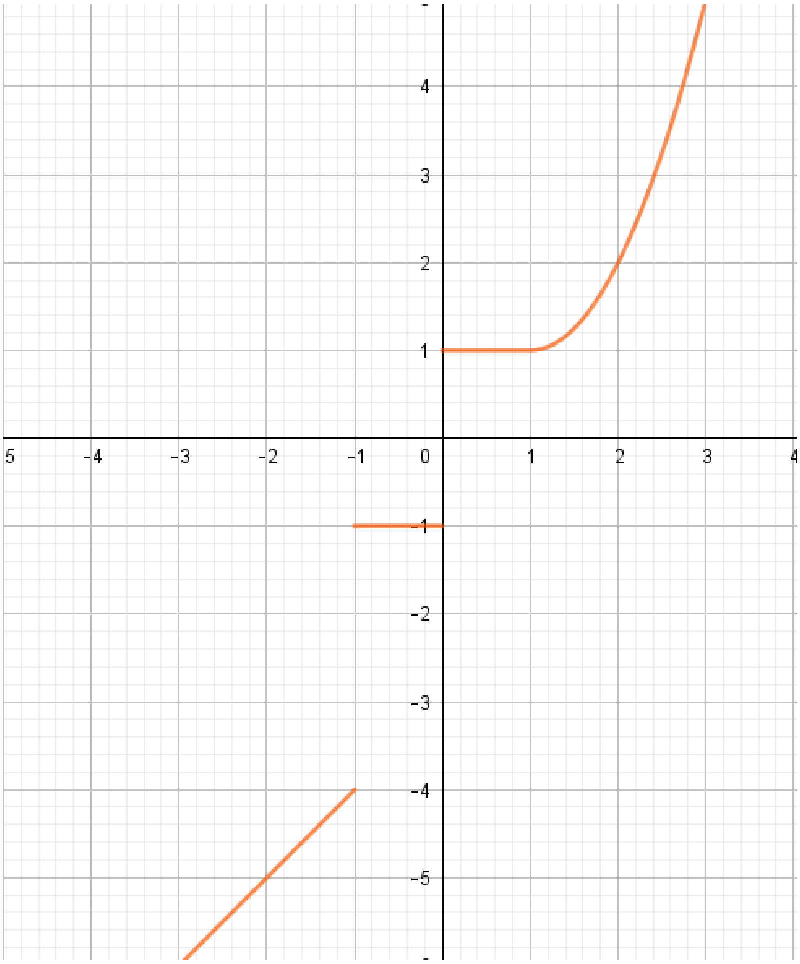
Por tanto, la función original puede expresarse como:

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & x \leq -1 \\ -1 & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \\ (x-1)^2+1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Cada tramo de la función es continua, pues tanto las rectas como las parábolas son continuas, únicamente no falta comprobar que en -1, y 1 la función es continua (en 0 no es necesario comprobarlo pues la función debe existir en un valor para ser continua).

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -4$; $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -1$ Por tanto, el límite no existe en x=1 y hay una discontinuidad.

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$; $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$; $f(1) = 1$.Por tanto, el límite existe, es igual al valor de la función en x=1. La función es continua en x=1.



4. Un alcalde quiere instalar un estanque rectangular en un parque de la ciudad con las siguientes características. El estanque deberá tener al menos 2 metros de ancho y al menos 5 metros de largo. Además, su largo debe ser al menos 2 veces su ancho pero no más de tres veces su ancho.

   Establecer el conjunto de soluciones posibles de este problema.

Solución

Definimos en primer lugar las incógnitas:

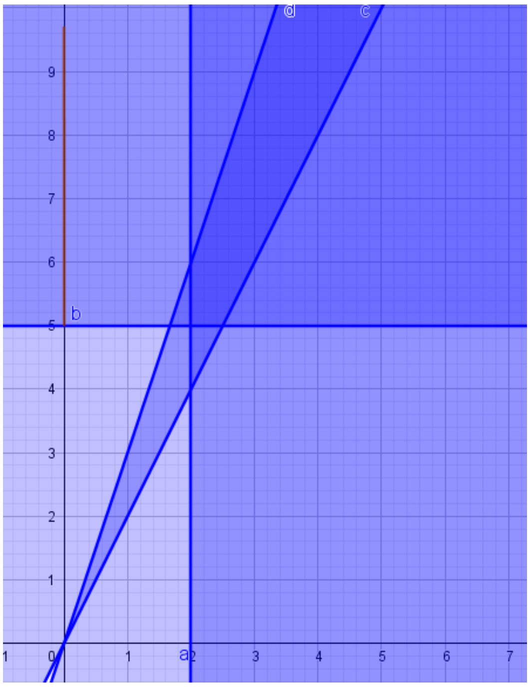
$x \equiv Ancho\ del\ estanque\ rectangular$

$y \equiv Largo\ del\ estanque\ rectangular$

Obtenemos las inecuaciones:

$$x \geq 2; y \geq 5; y \geq 2x; y \leq 3x$$

Representamos las rectas y validamos los semiplanos que se corresponden con la inecuación correspondiente:



5. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & x < 0 \\ ax + b & 0 \leq x < 10 \\ 2 & x > 10 \end{cases}$$

a) Calcula el valor de a y b para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

Solución

Por tratarse de una parábola, una recta y una función constante cada uno de los tramos de esta función es continua. Deberemos asegurar que la función es continua en x=0 y x=10.

Los límites laterales deben coincidir para asegurar la continuidad:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \; ; \; \lim_{x \to 0^+} f(x) = \mathrm{b}$$

Cómo ambas cantidades deben ser iguales, b=-1

$$\lim_{x \to 10^-} f(x) = 10\mathrm{a} + \mathrm{b} \; ; \; \lim_{x \to 10^+} f(x) = 2$$

Sustituyendo b=-1 e igualando, queda:

$$10\mathrm{a} - 1 = 2; 10\mathrm{a} = 3; \mathrm{a} = {}^{3}/_{10}$$

Por tanto, la función quedaría como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & x < 0 \\ {}^{3}/_{10}\, x - 1 & 0 \leq x < 10 \\ 2 & x > 10 \end{cases}$$

b) Realiza un esbozo de la función, explicando el proceso.

El primer tramo de función es una parábola con las ramas hacia arriba (el coeficiente principal es positivo), su vértice se encuentra en (-1,-2) y sus puntos de corte son: (0,-1), $\left(-1-\sqrt{2},0\right)$ y $\left(-1+\sqrt{2},0\right)$.

El segundo tramo de función es una recta de pendiente positiva que pasa por los puntos (0,-1) y (10,2).

El tercer tramo de función es una función constante (recta paralela al eje de abscisas).