1. Realiza la siguiente operación $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{10}} + \frac{4}{\sqrt{2}-5} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

Solución

Racionalizamos cada uno de los sumandos:

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{10}}{\sqrt{5}-\sqrt{10}} = \frac{5-5\sqrt{2}}{5-10} = -1+\sqrt{2}$$

$$\frac{4}{\sqrt{2}-5} = \frac{4}{\sqrt{2}\text{-}5} \cdot \frac{\sqrt{2}+5}{\sqrt{2}+5} = \frac{20+4\sqrt{2}}{2-25} = -\frac{20+4\sqrt{2}}{23}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ahora sumamos y simplificamos:

$$-1+\sqrt{2} - \frac{20+4\sqrt{2}}{23} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{-46+46\sqrt{2}-40+8\sqrt{2}-23\sqrt{2}}{46}$$

$$= \frac{-86+31\sqrt{2}}{46}$$

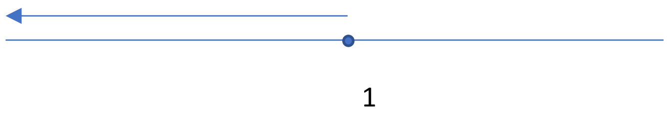
2. Dados los siguientes intervalos, calcula:

$A = (-\infty, 1]$ $\mathrm{B} = [0,5)$ $C = [-1,3]$

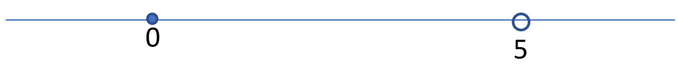
a. $A \cup B$
b. $A \cup C$
c. $B \cap C$
d. $A \cap B \cap C$

Solución

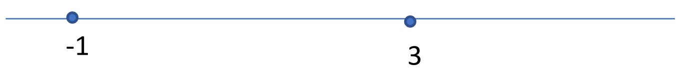
$A = (-\infty, 1]$



$\mathrm{B} = [0,5)$



$C = [-1,3]$



Ahora podemos calcular más fácilmente los conjuntos solicitados:

$A \cup B = (-\infty, 1] \cup [0,5) = (-\infty, 5)$

$A \cup C = (-\infty, 1] \cup [-1,3] = (-\infty, 3]$

$B \cap C = [0,5) \cap [-1,3] = [0,3]$

$A \cap B \cap C = (-\infty, 1] \cap [0,3] = [0,1]$

3. Realiza la siguiente operación utilizando fracciones enteras:

$$10,2\overset{\frown}{5} - 5,\overset{\frown}{7}$$

Solución

Calcularemos la fracción generatriz de cada uno de los números racionales:

$10,2\overset{\frown}{5} = \frac{923}{90}$

$5,\overset{\frown}{7} = \frac{52}{9}$

$10,2\overset{\frown}{5} - 5,\overset{\frown}{7} = \frac{923}{90} - \frac{52}{9} = \frac{923}{90} - \frac{520}{90} = \frac{403}{90}$

4. Sabiendo que $log4 = 0,6021$ calcula los siguientes logaritmos:

   a. $log2$
   b. $log\frac{1}{4}$

Solución

$$log2 = log\sqrt{4} = \frac{1}{2}log4 = \frac{0,6021}{2} = 0,30105$$

$$log\frac{1}{4} = log1 - log4 = 0 - 0,6021 = -0,6021$$

5. Simplifica si es posible:

   a. $\sqrt{75} - 2\sqrt{12} - \sqrt{363} + 4\sqrt{27}$
   b. $\frac{1}{3}\sqrt{6} + \frac{7}{3}\sqrt{24} - \frac{3}{6}\sqrt{54} + \sqrt{18}$

Solución

$$\begin{aligned}\sqrt{75} - 2\sqrt{12} - \sqrt{363} + 4\sqrt{27} \\ &= \sqrt{5^2 \cdot 3} - 2\sqrt{2^2 \cdot 3} - \sqrt{11^2 \cdot 3} + 4\sqrt{3^3} \\ &= 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 11\sqrt{3} + 12\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{6}+\frac{7}{3}\sqrt{24}-\frac{3}{6}\sqrt{54}+\sqrt{18}$$
$$=\frac{1}{3}\sqrt{6}+\frac{7}{3}\sqrt{2^2\cdot 6}-\frac{3}{6}\sqrt{3^2\cdot 6}+\sqrt{3^2\cdot 2}$$
$$=\frac{1}{3}\sqrt{6}+\frac{14}{3}\sqrt{6}-\frac{9}{6}\sqrt{6}+3\sqrt{2}$$
$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{14}{3}-\frac{9}{6}\right)\sqrt{6}+3\sqrt{2}=\frac{21}{6}\sqrt{6}+3\sqrt{2}$$
$$=\frac{7}{2}\sqrt{6}+3\sqrt{2}$$

6. Simplifica la siguiente fracción algebraica:

$$\frac{3}{3x^2+6x}+\frac{1}{x}-\frac{2-x}{6x+12}$$

Solución

$$\frac{3}{3x^2+6x}+\frac{1}{x}-\frac{2-x}{6x+12}=\frac{3}{3x(x+2)}+\frac{1}{x}-\frac{2-x}{6(x+2)}=$$

$$\frac{6}{6x(x+2)}+\frac{6(x+2)}{6x(x+2)}-\frac{x(2-x)}{6x(x+2)}=\frac{6+6x+2-2x+x^2}{6x(x+2)}=$$

$$=\frac{x^2+4x+18}{6x(x+2)}$$

7. Factoriza el polinomio: $2x^3-8x^2+2x+12$

Solución

$$2x^3-8x^2+2x+12=2(\mathrm{x}+1)(\mathrm{x}-2)(\mathrm{x}-3)$$

8. ¿Para qué valores de la variable x resulta que y no es un número real? (Pista: simplifica y resuelve la ecuación de segundo grado resultante)

$$y=\frac{x}{x+\frac{x}{x+y}}$$

Solución

$$y=\frac{x+y}{x+y+1};xy+y^2+y=x+y;\ y^2+xy-x=0$$

Resolvemos la ecuación en y (ecuación de segundo grado):

$$y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + 4x}}{2}$$

Para que y sea un número real el discriminante debe ser mayor o igual que cero, por tanto:

$$x^2 + 4x \geq 0\ ; x(x+4) \geq 0; x \leq -4\ o\ x \geq 0$$

Eliminamos el cero, pues no tendría sentido la expresión inicial (división por cero).