Inecuaciones

Inecuaciones y programación lineal

Inecuaciones

- Una inecuación es una desigualdad entre dos expresiones formadas por variables (incógnitas), números y operaciones relacionadas por los siguientes símbolos $\leq, \geq, <$ y $>$.
- El grado de una inecuación es el mayor de los grados a los que se encuentra elevadas las incógnitas.
- La solución a una inecuación es el conjunto de valores que puede tomar las incógnitas de tal forma que se verifique la desigualdad.

Ejemplos

$\boldsymbol{x + y - 3 < 2x + 2y}$ Inecuación de primer grado con dos incógnitas

$\boldsymbol{2x + 1 > 2}$ Inecuación de primer grado con una incógnita

$\boldsymbol{3x^2 - 5x > 12x - 7}$ Inecuación de segundo grado con una incógnita

Propiedades de las inecuaciones

- Si se suma (o resta) la misma expresión algebraica a los dos miembros de una inecuación la inecuación obtenida es equivalente a la anterior.
- Si se multiplica (o divide) la misma expresión algebraica positiva por los dos miembros de una inecuación, la inecuación obtenida es equivalente a la anterior.
- Si se multiplica (o divide) la misma expresión algebraica negativa por los dos miembros de una inecuación, la inecuación obtenida es equivalente anterior si la desigualdad resultante cambia de sentido.

Propiedades: ejemplos

Ejemplo

$\mathbf{2x+1>2}$ si restamos 1 a ambos miembros queda la inecuación equivalente

$\mathbf{2x>1}$ si dividimos por 2 a ambos miembros queda la inecuación equivalente

$\boldsymbol{x>\frac{1}{2}}$

Ejemplo

$\mathbf{-3-2x\leq 4}$ si sumamos 3 a ambos miembros queda la inecuación equivalente

$\mathbf{-2x\leq 7}$ si dividimos por -2 a ambos miembros queda la inecuación equivalente

$\boldsymbol{x\geq -\frac{7}{2}}$

Resolución de inecuaciones de primer grado y una incógnita

- Para resolver una inecuación de primer grado con una incógnita se aplican las propiedades de las inecuaciones, con el objetivo que la incógnita quede en uno de los miembros.

Ejemplo

$\mathbf{2(x-3)-5x+1>x-2}$

Aplicamos la propiedad distributiva

$\mathbf{2x-6-5x+1>x-2}$

$\mathbf{-3x-5>x-2}$ Agrupamos términos semejantes

$\mathbf{-4x>3}$ Sumamos y restamos para trasponer los términos semejantes

$\mathbf{x<-\frac{3}{4}}$ Dividimos por -4 por lo que cambiamos el sentido de la desigualdad

Solución: $x \in (-\infty, -\frac{3}{4}]$

Resolución de sistemas de inecuaciones de primer grado y una incógnita

- La solución de un sistema de inecuaciones de primer grado y una incógnita es el conjunto intersección de la cada una de las inecuaciones que forman el sistema.

Ejemplo

$$\begin{cases} \mathbf{6x - 1 > 8} \\ \mathbf{-3x > 3} \end{cases}$$

Resolvemos la primera ecuación

$\mathbf{6x > 9}$

$\mathbf{x > \frac{3}{2}}$ **solución** $\mathbf{x \in (\frac{3}{2}, +\infty)}$

Resolvemos la segunda ecuación

$\mathbf{-3x > 3}$

$\mathbf{x <}$**-1 solución** $\mathbf{x \in (-\infty, -1)}$

La solución del sistema será:

$\mathbf{x \in (\frac{3}{2}, +\infty) \cap (-\infty, -1)}$

Por tanto, la solución en este caso es el conjunto vacío

Inecuaciones de grado mayor que uno con una incógnita

- Para resolver una inecuación de grado mayor que uno con una incógnita se procederá como sigue:
  - Expresar la inecuación como un polinomio en uno de los miembros y cero en otro utilizando las propiedades de las inecuaciones
  - Calcular las raíces del polinomio
  - Representar las raíces en la recta real.
  - Calcular el signo del valor del polinomio en cada intervalo que determinan las raíces.
  - Resolver la inecuación.

Ejemplo I

Ejemplo

$$x^2 + 2x + 2 < -x + 6$$

$$x^2 + 3x - 4 < 0$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$$

	x < -4	-4 < x < 1	x > 1
x - 1	Negativo	Negativo	Positivo
x + 4	Negativo	Positivo	Positivo
(x-1)(x+4)	Positivo	**Negativo**	Positivo

Solución

Por ser la inecuación $x^2 + 3x - 4 < 0$, es decir, $(x-1)(x+4) < 0$ tomaremos los intervalos etiquetados como **negativos** en la tabla, es decir, la solución es:

$$x \in (-4, 1)$$

Ejemplo II

Ejemplo

$$\boldsymbol{x^5 + 6x^4 + 9x^3 - 4x^2 - 12x < 0}$$

Factorizamos el polinomio:

$$x(x-1)(x+2)^2(x+3) < 0$$

	x < -3	-3 < x <-2	-2 < x < 0	0 < x < 1	x >1
x + 3	Negativo	Positivo	Positivo	Positivo	Positivo
$(x+2)^2$	Positivo	Positivo	Positivo	Positivo	Positivo
x	Negativo	Negativo	Negativo	Positivo	Positivo
x - 1	Negativo	Negativo	Negativo	Negativo	Positivo
Producto	**Negativo**	Positivo	Positivo	**Negativo**	Positivo

Solución

Por ser la inecuación a resolver "menor que cero" tomaremos los intervalos etiquetados como **negativos** en la tabla, es decir, la solución es:

$$\boldsymbol{x \in (-\infty, -3) \cup (0, 1)}$$

Ejemplo III

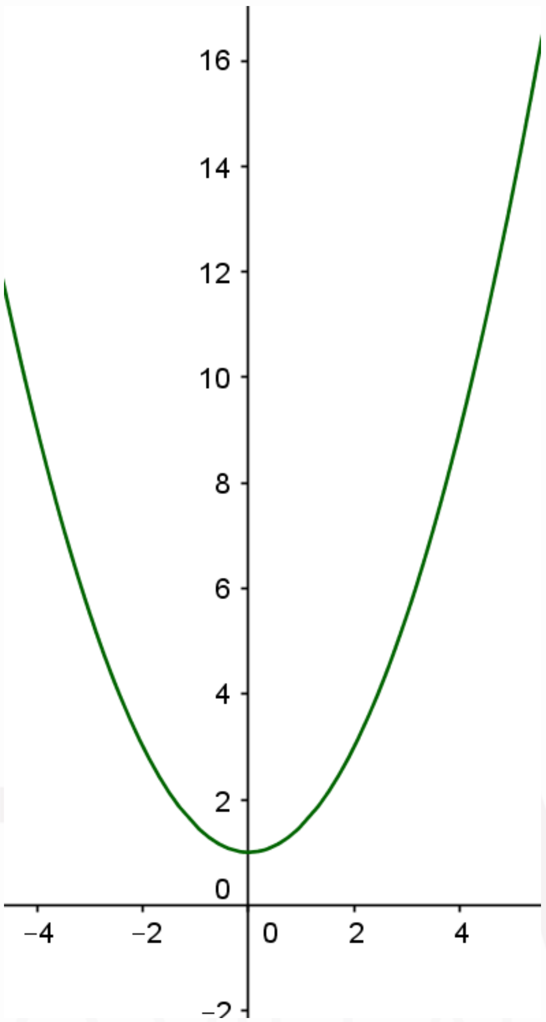
Ejemplo

$\boldsymbol{x^2 + 1 < 0}$

Intentamos factorizar el polinomio:

$$x^2 + 1 = 0\ ;\ x^2 = -1$$

Pero el polinomio no tiene raíces reales. Si representamos la función $f(x) = x^2 + 1$ resulta que ésta queda por encima del eje OX (se trata de una función siempre positiva) por tanto la solución de esta inecuación es el conjunto vacío (∅).



Inecuaciones racionales con una incógnita

- Una inecuación es irracional si tiene alguna expresión en el denominador que incluye alguna incógnita.
- Para resolverla:
  - Transponer todos los términos a uno de los miembros, el otro deberá quedar a cero.
  - Calcular las raíces del numerador y del denominador.
  - Estudiar el signo de las expresiones del numerador y del denominador para cada intervalo determinado por las raíces.
  - Decidir la solución teniendo en cuenta la desigualdad.

Ejemplo 1

Ejemplo

$\frac{x+3}{x-2} > 2$ Transponemos 2 para dejar el valor cero en el miembro de la derecha

$\frac{x+3}{x-2} - 2 > 0$ Operamos para expresar el miembro de la izquierda como una única fracción

$\frac{x+3}{x-2} - \frac{2x-4}{x-2} > 0$; $\frac{-x+7}{x-2} > 0$ La raíz del numerador es 7 y la del denominador 2.

	x < 2	2 < x < 7	x > 7
-x + 7	Positivo	Positivo	Negativo
x - 2	Negativo	Positivo	Positivo
Cociente	Negativo	**Positivo**	Negativo

Solución

Como la desigualdad es mayor que tomaremos aquellos intervalos donde la expresión resulta positiva, es decir:

$$x \in (2, 7)$$

Ejemplo 2

Ejemplo

$\frac{x+1}{1-x} \geq 1$ Transponemos 1 para dejar el valor cero en el miembro de la derecha

$\frac{x+1}{1-x} - 1 \geq 0$ Operamos para expresar el miembro de la izquierda como una única fracción

$\frac{x+1}{1-x} - \frac{1-x}{1-x} \geq 0$; $\frac{2x}{1-x} \geq 0$ La raíz del numerador es 0 y la del denominador 1.

	x < 0	0 < x < 1	x > 1
2x	Negativo	Positivo	Positivo
1-x	Positivo	Positivo	Negativo
Cociente	Negativo	**Positivo**	Negativo

Solución

Como la desigualdad es mayor o igual que tomaremos aquellos intervalos donde la expresión resulta positiva o cero, descartando el valor 1 al no estar definida la expresión (anula el denominador), por tanto, el resultado es $x \in [0, 1)$

Inecuaciones lineales con dos incógnitas

- Una inecuación lineal es una expresión que puede ser escrita de la forma:

$$ax + by > c$$

  - Donde el símbolo > puede ser sustituido por cualquiera de los siguientes: $<, \leq, \geq$.
  - a, b y c son números reales
  - x e y son variables
  - Resolver esta inecuación es calcular todos los pares de valores (x,y) tales que verifican la desigualdad.

Interpretación geométrica

Si a una inecuación lineal con dos incógnitas le cambiamos el símbolo de desigualdad por otro de igualdad queda la ecuación de una recta.

La inecuación representará uno de los semiplanos en que queda dividido el plano, que contendrá o no a la recta, dependiendo si la desigualdad es estricta o no.

Para decidir el semiplano que se corresponde con la solución de la inecuación se procederá a seleccionar un punto externo a la recta, tras evaluar la inecuación si el punto verifica la inecuación el semiplano será el correspondiente al punto, en otro caso, se tomará el otro semiplano.

Ejemplo I

Ejemplo

Resolver la inecuación $3x+2y \leq -5$

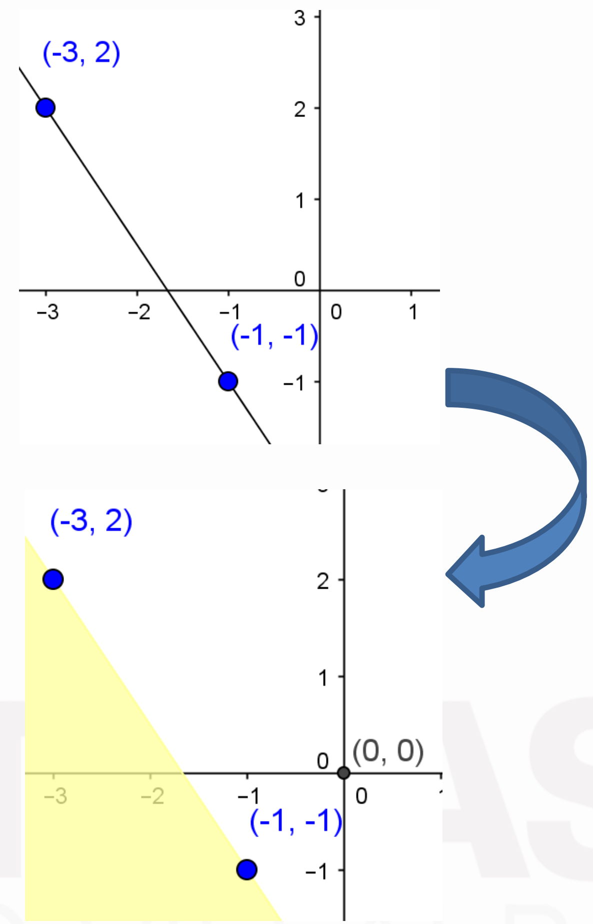
Solución

1. Se representa la recta $3x+2y = -5$ calculando dos puntos: (-1,-1) y (-3,2)

2. Seleccionamos un punto que no pertenezca a la recta, por ejemplo, (0,0) y comprobamos si verifica la inecuación:

   3·0+2·0=0 > -5 (no verifica la inecuación)

3. Marcamos el semiplano, en este caso la recta pertenece a la solución al ser una desigualdad no estricta.



Ejemplo II

Ejemplo

Resolver la inecuación $6x + 4y - 14 < 0$

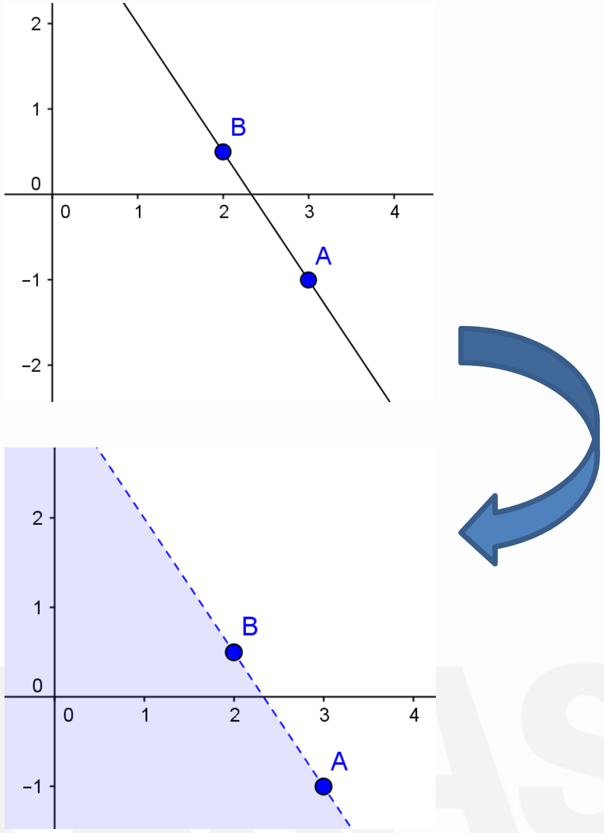
Solución

1. Se representa la recta $6x+4y = 14$ calculando dos puntos: (3,-1) y (2,0.5)

2. Seleccionamos un punto que no pertenezca a la recta, por ejemplo, (0,0) y comprobamos si verifica la inecuación:

   6·0+4·0=0 < 14 (verifica la inecuación)

3. Marcamos el semiplano, en este caso la recta no pertenece a la solución al ser una desigualdad estricta.



Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas

Un sistema lineal de inecuaciones con dos incógnitas tiene por solución el conjunto de todos los puntos del plano que verifican todas y cada una de las inecuaciones que lo forman.

Para representar la solución se tendrán en cuenta la intersección de los semiplanos determinados por las inecuaciones.

La solución puede ser acotada si el recinto que representa la solución se encuentra limitado en todas las direcciones, en caso contrario la solución tendrá un recinto no acotado.

Ejemplo I

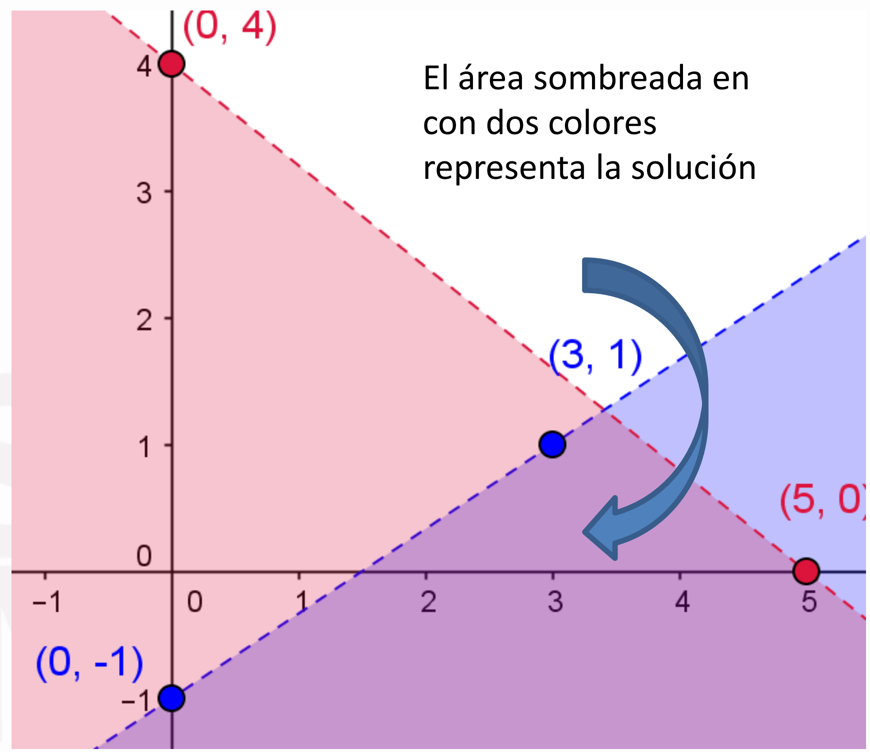
Ejemplo

Resolver el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - 3y > 3 \\ 4x + 5y < 20 \end{cases}$$

Solución

1. Se representa la recta $2x - 3y = 3$ calculando dos puntos: (0,-1) y (3,1), también la recta $4x + 5y = 20$ por ejemplo, con los puntos (5,0) y (0,4).
2. Tras decidir los semiplanos correspondientes a cada una de las inecuaciones marcamos la solución que será la intersección de los dos semiplanos.

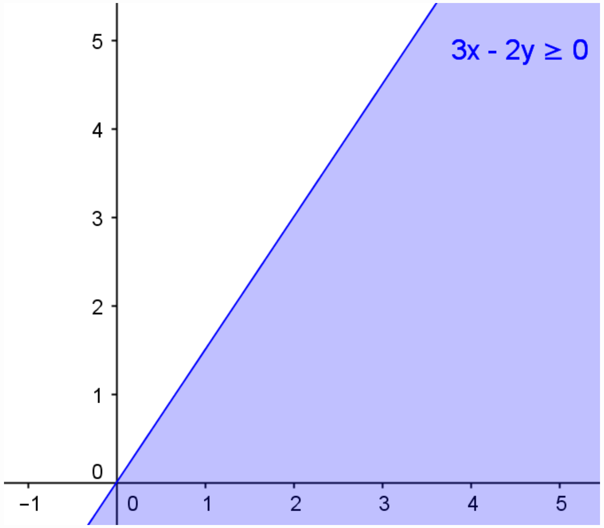


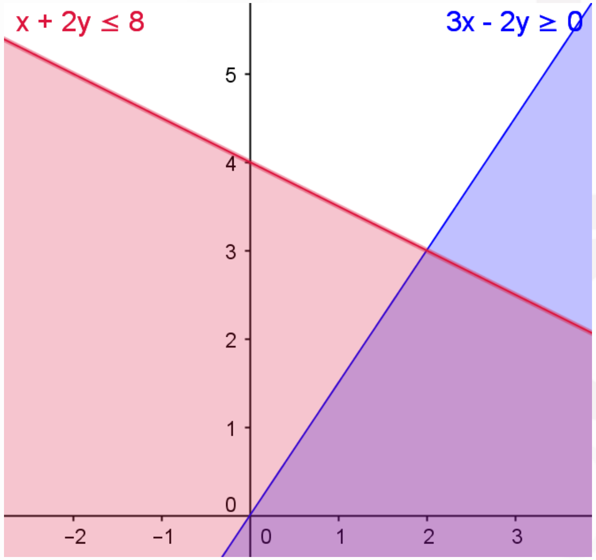
Ejemplo II

Ejemplo

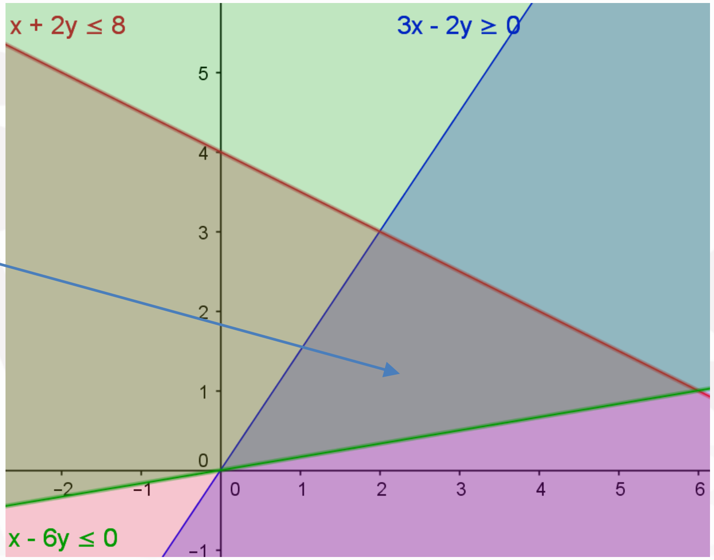
Resolver el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - 2y \geq 0 \\ x + 2y \leq 8 \\ x - 6y \leq 0 \end{cases}$$





En este caso la solución es acotada



PROGRAMACIÓN LINEAL

Elementos de un problema de PL

La programación lineal es una técnica que permite calcular los valores óptimos (máximo o mínimo) de una función (lineal) cuyas variables se encuentran sujetas a un conjunto de restricciones (lineales).

Un problema de programación lineal se compone de:

- **Variables de decisión**
- **Función objetivo**, función de primer grado que combina las variables de decisión y que modelizan el objetivo que se pretende resolver el problema (maximizar o minimizar)
- **Restricciones**, conjunto de relaciones lineales de las variables, pudiendo ser ecuaciones o inecuaciones.

Ejemplo

Un artesano fabrica collares y pulseras. Hacer un collar le lleva dos horas y hacer una pulsera una hora. El material de que dispone no le permite hacer mas de 50 piezas. Como mucho, el artesano puede dedicar al trabajo 80 horas. Por cada collar gana 5 euros y por cada pulsera 4 euros. El artesano desea determinar el numero de collares y pulseras que debe fabricar para optimizar sus beneficios.

Variables de decisión : Número de pulseras (x) y de collares (y) a elaborar

Función objetivo: F(x,y) = 5x + 4y (beneficio de cada elemento)

Restricciones: $\begin{cases} 2y + x \leq 80 \ (\text{número máximo de horas}) \\ x + y \leq 50 \ (\text{número máximo de artículos}) \end{cases}$

Problemas de PL con dos variables

- Cuando se debe resolver un problema de programación lineal con dos variables ***x*** e ***y***, se tendrán:
  - Una función objetivo que hay que optimizar (maximizar o minimizar) de la forma $\boldsymbol{f(x,y) = ax + by}$
  - Se expresa el conjunto de restricciones a las que está sujeta la función mediante un grupo de inecuaciones lineales en x e y.

$$\textbf{\textit{Restricciones}} \begin{cases} \boldsymbol{c_{11}x + c_{12}y \leq b_1} \\ \quad\quad\quad \boldsymbol{\ldots .} \\ \boldsymbol{c_{n1}x + c_{n2}y \leq b_n} \end{cases}$$

(Los símbolos de desigualdad pueden ser también, pudiéndose combinar $\geq$)

Formulación matemática

- Cuando se debe resolver un problema de programación lineal con dos variables ***x*** e ***y***, se tendrán:
  - Una función objetivo que hay que optimizar (maximizar o minimizar) de la forma $\boldsymbol{f(x,y) = ax + by}$
  - Se expresa el conjunto de restricciones a las que está sujeta la función mediante un grupo de inecuaciones lineales en x e y.

$$\textbf{\textit{Restricciones}} \begin{cases} c_{11}x + c_{12}y \leq d_1 \\ \quad\quad \dots . \\ c_{n1}x + c_{n2}y \leq d_n \end{cases}$$

(Los símbolos de desigualdad pueden ser también $\geq$, pudiéndose combinar)

A tener en cuenta

- Las restricciones originan una región en el plano, denominada **región factible**, donde se encuentran los puntos que verifican todas las restricciones.
- La región factible puede ser acotada o no.
- Si el problema tiene una única solución ésta se encuentra en uno de los vértices de la región factible. Si tiene infinitas soluciones se encuentran en uno de los lados de aquella.
- Si la región es acotada, el problema tiene al menos una solución.
- Si la región no es acotada, el problema puede no tener solución.

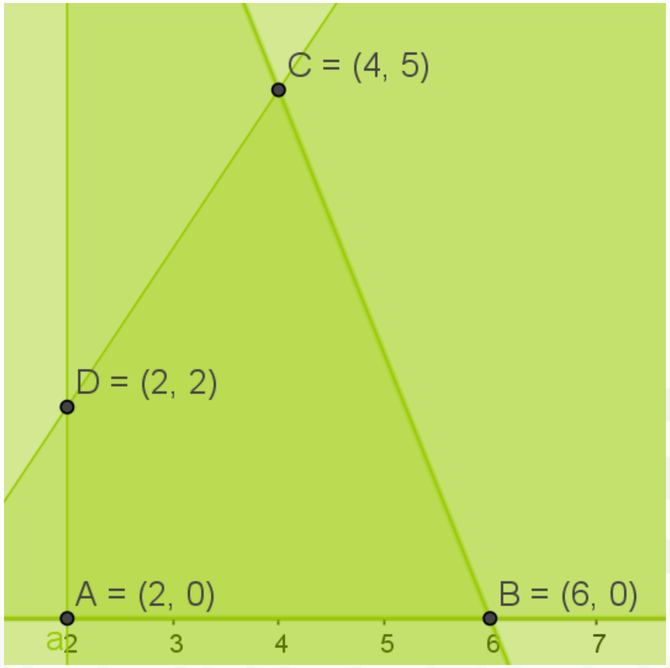
Resolución analítica I

- Primero se representa en el plano la región factible
- Se obtienen todos los puntos que son vértice de la región factible.
- Para cada uno de los vértices se evalúa la función objetivo

$$\textit{Minimizar } F(x,y) = 3x - 4y$$

$$\textit{Restricciones} \begin{cases} 3x - 2y \geq 2 \\ 5x + 2y \leq 30 \\ x \geq 2, y \geq 0 \end{cases}$$

F(2,0)= 6
F(6,0)= 18
F(4,5)= -8
F(2,2)= -2



Resolución analítica II

- Si la región factible es **acotada**:
  - Se selecciona el vértice con valor óptimo, si éste es único (la solución es única)
  - Si hay dos vértices con el mismo valor todas los puntos del segmento que los une serán solución (hay infinitas soluciones)

Minimizar $F(x, y) = 3x - 4y$

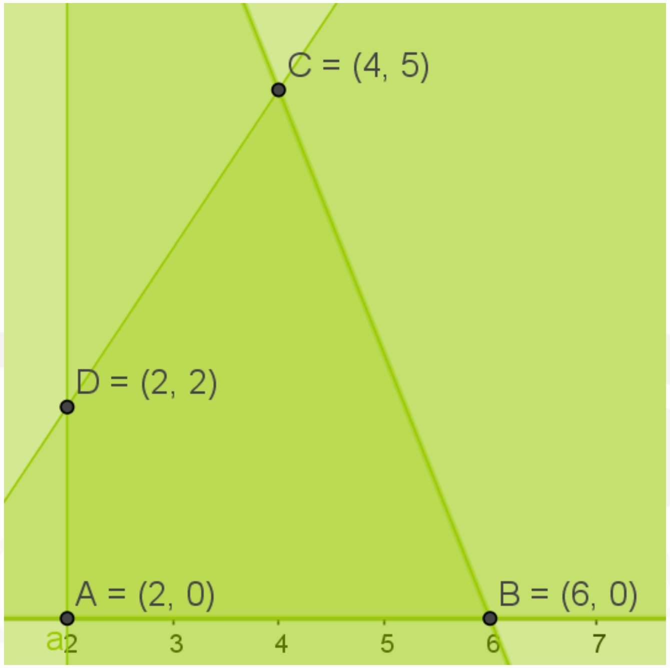
F(2,0)= 6

F(6,0)= 18

F(4,5)= -8

F(2,2)= -2

Solución única x=4 e y=5, valor de la función -8



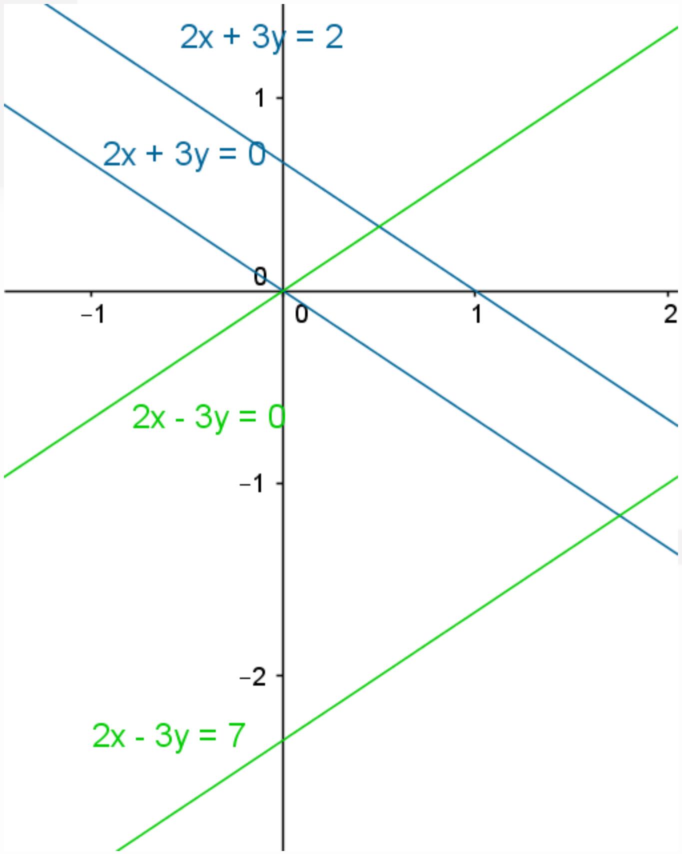
Resolución analítica III

- Si la región factible es **no acotada**:
  - Se selecciona el vértice con valor óptimo, si éste es único (la solución es única)
  - Si hay dos vértices con el mismo valor todas los puntos del segmento que los une serán solución (hay infinitas soluciones)
  - Puede ocurrir que no haya solución al crecer o decrecer la función objetivo de forma indefinida. En este caso utilizar el método gráfico.

Rectas paralelas

- La expresión **ax+by = c**, donde a, b y c son números reales representa una recta en el plano

La recta **ax+by=c** será creciente cuando los signos de a y b sean distintos, en caso contrario, la recta será decreciente.



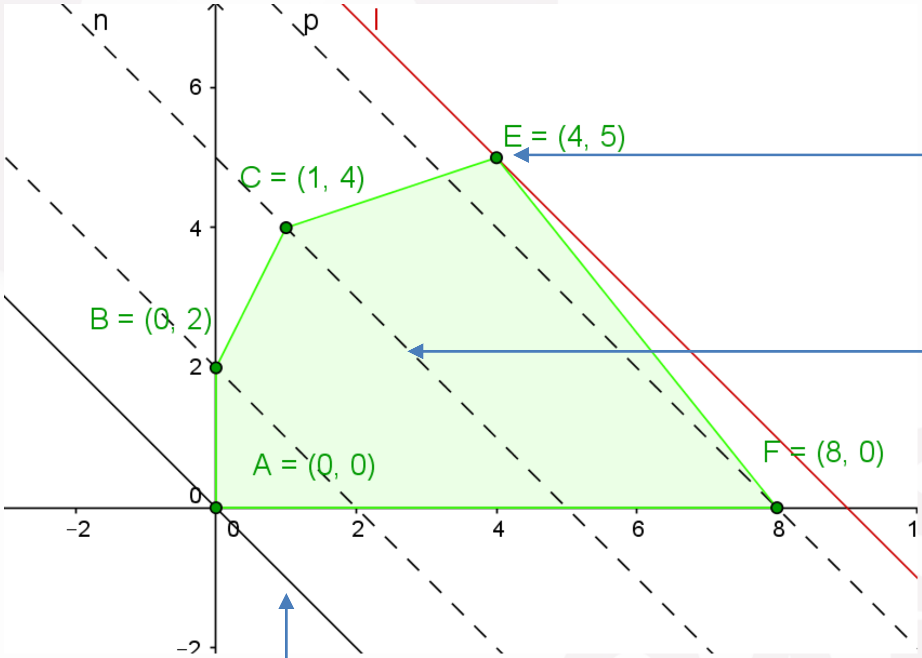
Todas las rectas del tipo **ax+by = k**, donde k es un parámetro variable, son paralelas. Cuanto más grande sea k mayor será el valor de la ordenada cuando x = 0.

Resolución gráfica

- Se representa gráficamente la región factible.
- Se representa la recta definida por la función objetivo igualada a cero. Se consideran todas las rectas paralelas a ésta.
- Se tiene en cuenta si se desea maximizar o minimizar la función además de los vértices de la región al construir la recta paralela (respecto a la construida con la función objetivo) que nos interesa.

Ejemplo I

Resolución de un problema de programación lineal de forma gráfica con los dos coeficientes de la función positivos y solución única (F(x,y)=x+y).



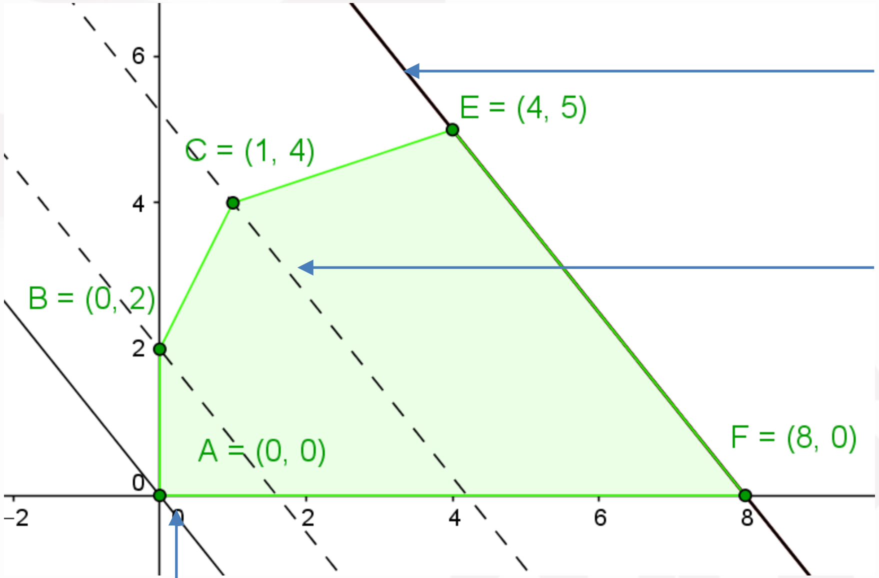
Recta paralela a x+y=0 que pasa por el vértice superior (solución del problema x=4 e y=5 para maximizar)

Recta paralela a x+y=0 que pasa por un vértice que no es solución

Recta x+y=0 (proviene de igualar a cero la función objetivo)

Ejemplo II

Resolución de un problema de programación lineal de forma gráfica con los dos coeficientes de la función positivos (F(x,y)=5x+4y) y un número de soluciones infinitas.



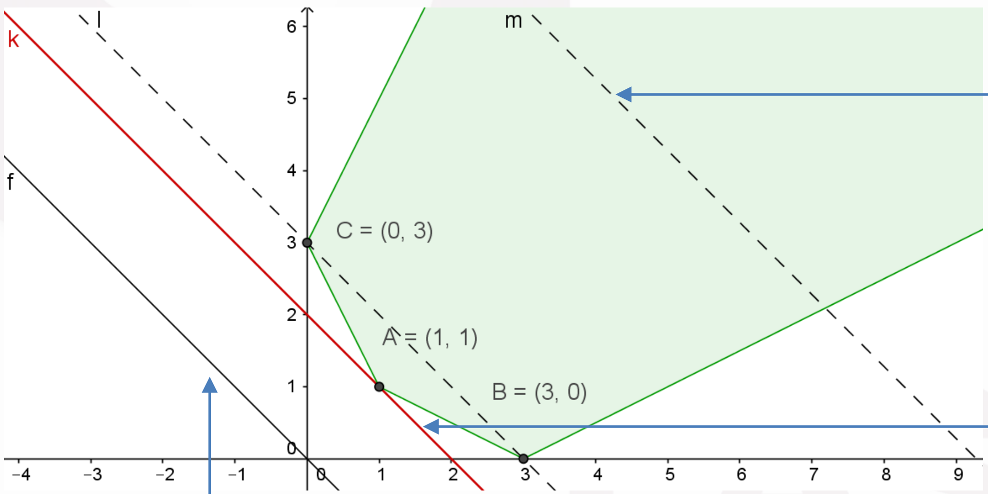
Recta paralela a 5x+4y=0 que pasa por el vértice E y F, todos los puntos del segmento son solución (maximizar)

Recta paralela a 5x+4y=0 que pasa por un vértice que no es solución

Recta 5x+4y=0 (proviene de igualar a cero la función objetivo)

Ejemplo III

Resolución de un problema de programación lineal de forma gráfica con los dos coeficientes de la función positivos (F(x,y)=x+y) sin solución.



Recta paralela a x+y=0 como se pueden tomar tantas como se desee no existe solución si se desea maximizar la función.

Recta paralela a x+y=0 que pasa por un vértice que es solución si se desea minimizar la función.

Recta x+y=0 (proviene de igualar a cero la función objetivo)

Un problema de maximización de beneficios (I)

Enunciado
Una fábrica de carrocerías de automóviles y camiones tiene dos naves. En la nave A para hacer la carrocería de un camión se invierten 7 días-operario, para fabricar la de un coche se precisan 2 días-operario. En la nave B se invierten 3 días-operario tanto en carrocerías de camión como de coche. Por limitaciones de mano de obra y maquinaria la nave A dispone de 300 días-operario, y la nave B de 270 días- operario. Si los beneficios que se obtienen por cada camión son de 6.000 €, y por cada automóvil 2.000 € ¿Cuántas unidades de cada uno se deben producir para maximizar las ganancias?

Formulación matemática

$x \equiv Número\ de\ camiones\ a\ fabricar$

$y \equiv Número\ de\ coches\ a\ fabricar$

Función objetivo a maximizar
$F(x, y) \equiv 6000x + 2000y$

Restricciones:

$$x \geq 0\ e\ y \geq 0$$
$$7x + 2y \leq 300$$
$$3x + 3y \leq 270$$

Un problema de maximización de beneficios (II)

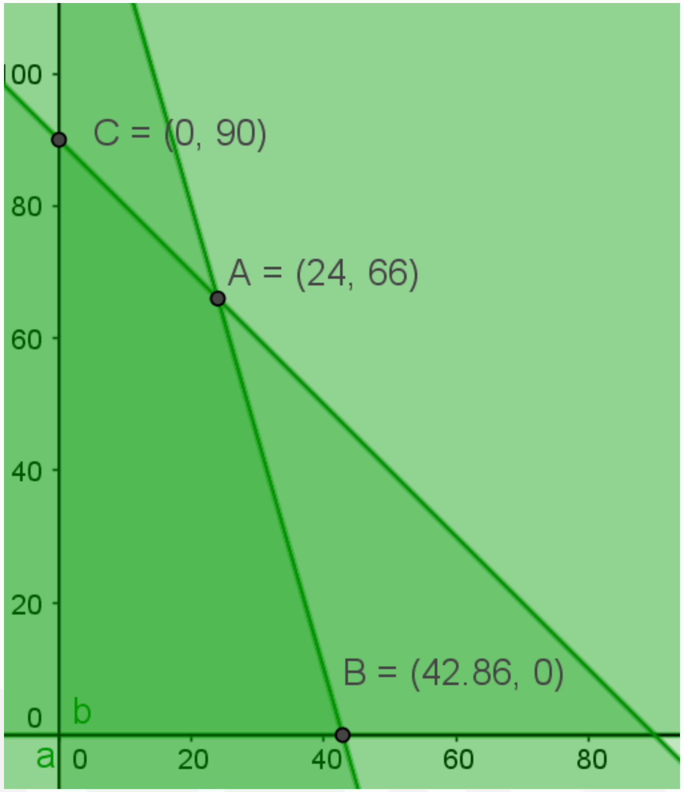
Calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible:

F(0,90) = 6000·0 + 2000·90 = 180.000 €

F(24,66) = 6000·24 + 2000·66= 276.000 €

F(42,0) = 6000·42 = 252.000

El valor máximo se alcanza en el punto A, es decir, el valor óptimo se obtiene al fabricar 24 camiones y 66 coches, obteniéndose un beneficio de 276.000 €



Un problema de minimización del gasto(I)

Enunciado

Para cubrir las necesidades del organismo, durante un cierto periodo de tiempo, en dos tipos de vitaminas P y Q se necesitan 30.000 unidades de la primera y 800 de la segunda. Se pueden adquirir dos productos A y B, cuyos costes respectivos son 20 y 10 € por caja. Una caja del producto A proporciona 300 unidades de vitamina P y 4 unidades de vitamina Q. La caja del producto B proporciona 100 unidades de P y 8 unidades de vitamina Q.
Determinar la cantidad de cajas que se debe adquirir de cada producto para que el gasto que realicemos sea mínimo.

Formulación matemática

$x \equiv Número\ de\ cajas\ tipo$ A

$y \equiv Número\ de\ cajas\ tipo\ B$

Función objetivo a minimizar

$F(x, y) \equiv 20x + 10y$

Restricciones:

$$x \geq 0\ e\ y \geq 0$$
$$7x + 2y \leq 300$$
$$3x + 3y \leq 270$$

Un problema de maximización de beneficios (II)

La región factible es no acotada, si representamos la recta
$20x+10y=0$
Obtenida la igualar a cero la función objetivo, podemos observar que en el punto A (80,60) se obtiene su valor mínimo.

Por tanto, el coste mínimo es:

$F(80,60) = 20 \cdot 80 + 10 \cdot 60 = 2.200$ €

Nota.-
Obsérvese que si hubiera que maximizar la función objetivo este problema no tendría solución.