UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID	**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID** PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS Convocatoria **2014** **MATERIA: MATEMÁTICAS II**	**MODELO**

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

INSTRUCCIONES: Escoja entre una de las dos opciones A o B. Lea con atención y detenimiento los enunciados de las cuestiones y responda de manera razonada a los puntos concretos que se preguntan en la opción elegida.
DURACIÓN DEL EJERCICIO: Una hora y treinta minutos.
CALIFICACIÓN: Se indica en cada apartado

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.

a) (1.5 Puntos) Analiza el siguiente sistema en función del parámetro **a**. En los casos en los que el sistema sea compatible, encuentra sus soluciones.

$$x + y + \mathbf{a}\, z = -1 \quad , \quad x + \mathbf{a}^2 y - z = 2\mathbf{a}.$$

b) (1 Punto) Si **a**=1, dibuja la recta de $\mathbf{R}^3$ donde están todas las soluciones del sistema lineal anterior (para **a**=1).

EJERCICIO 2. Dados los vectores **u** y **v** en el espacio euclídeo usual $\mathbf{R}^3$, denotaremos por **u.v** a su producto escalar y por **u** x **v** a su producto vectorial. El símbolo |**u**| denotará el módulo del vector **u**.

a) (1 Punto) Considera los vectores de $\mathbf{R}^3$ de coordenadas

$$(1,1,-1) \quad , \quad (3,-1,2).$$

Calcula su producto escalar y su producto vectorial ¿Son ortogonales?

b) (1.5 Puntos) Si **u** y **v** son dos vectores de $\mathbf{R}^3$ tales que |**u**|=4 y |**v**|=5 y su producto escalar **u.v** = 10, ¿qué ángulos pueden formar entre los dos?

EJERCICIO 3. (1 Punto) Halla las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta de $\mathbf{R}^3$ que une los puntos A=(3,1,2) y B=(2,4,1) ¿El punto C=(4,-2,3) está alineado con A y B?

EJERCICIO 4.

a) (1 Punto) Calcula el dominio de la función f(x) = ln (x^2-4).

b) (1 Punto) Calcula la derivada de f(x) y halla su dominio.

c) (1 Punto) Calcula justificadamente los siguientes límites

- $\lim\limits_{x\to 2+} f'(x)$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x)$

d) (1 Punto) Calcula razonadamente el número

$$\int_3^6 (x^2-4)dx.$$

¿Es este número positivo? Da una justificación geométrica de tu respuesta.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1. (2.5 Puntos) Halla la matriz X de tamaño 2x2 que satisface la ecuación matricial:

AB - 2X=C,

donde:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -4\end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 2. Considera los planos del espacio euclídeo $\mathbf{R}^3$ de ecuaciones

π_1 : 3x+4y+z-5=0 , π_2 : x-**a**y+z-3=0.

a) (1 Punto) ¿Para qué valor de **a** son π_1 y π_2 perpendiculares?

b) (1.5 Puntos) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta de corte de π_1 y π_2 para **a**=1.

EJERCICIO 3. (1 Punto) Encuentra los valores del parámetro b para los que la matriz tiene rango estrictamente menor que 3.

$$B=\begin{pmatrix}b & 1 & 1\\ 1 & 1 & b^2\\ b+1 & 2 & b+1\end{pmatrix}$$

EJERCICIO 4. Considera la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}.$$

a) (1 Punto) Calcula el dominio de f(x).
b) (1 Punto) Calcula los extremos de la función f(x).
c) (1 Punto) Calcula todas las asíntotas de f(x).
d) (1 Punto) Calcula razonadamente el número:

$$\int_0^{1/2} f(x)dx.$$

¿Es este número positivo? Da una justificación geométrica de tu respuesta.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID	**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID** PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS Convocatoria **2014** **MATERIA: MATEMÁTICAS II**	**MODELO**

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

OPCIÓN A

EJERCICIO 1.
Apartado a) Planteamiento: 1 punto; Resolución: 0.5 puntos.
Apartado b) Planteamiento: 0.5 puntos; Resolución: 0.5 puntos
EJERCICIO 2.
Apartado a) Planteamiento: 0.5 puntos; Resolución: 0.5 puntos
Apartado b) Planteamiento: 1 punto; Resolución: 0.5 puntos
EJERCICIO 3.
Planteamiento: 0.5 puntos; Resolución: 0.5 puntos.
EJERCICIO 4.
Apartado a) Planteamiento: 0.5 puntos; Resolución: 0.5 puntos
Apartado b) Planteamiento: 0.5 puntos; Resolución: 0.5 puntos
Apartado c) Planteamiento: 0.5 puntos; Resolución: 0.5 puntos
Apartado d) Planteamiento: 0.5 puntos; Resolución: 0.5 puntos

OPCIÓN B

EJERCICIO 1.
Planteamiento: 1.5 puntos; Resolución: 1 punto.
EJERCICIO 2.
Apartado a) Planteamiento: 1 punto; Resolución: 0.5 puntos
Apartado b) Planteamiento: 0.5 puntos; Resolución: 0.5 puntos
EJERCICIO 3.
Planteamiento: 0.5 puntos; Resolución: 0.5 puntos.
EJERCICIO 4.
Apartado a) Planteamiento: 0.5 puntos; Resolución: 0.5 puntos
Apartado b) Planteamiento: 0.5 puntos; Resolución: 0.5 puntos
Apartado c) Planteamiento: 0.5 puntos; Resolución: 0.5 puntos
Apartado d) Planteamiento: 0.5 puntos; Resolución: 0.5 puntos

UAM UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID	**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID** PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS Convocatoria **2014** **MATERIA: MATEMÁTICAS II**	**MODELO**

SOLUCIONES

OPCIÓN A

N.1.

a) El sistema dado es equivalente al sistema:

x + y + **a** z= - 1 , ($\mathbf{a}^2$ -1) y – (a+1)z = 2**a**+1.

- Si el valor del parámetro es distinto de 1 o -1 podemos despejar la variable y en función de la variable z de la segunda ecuación. Lo que da el conjunto de soluciones:

$$x=\frac{-a^2-2a+2}{a^2-1}+\frac{1+a}{1-a}t,\ y=\frac{2a+1}{a^2-1}+\frac{1}{a-1}t,\ z=t,$$

para t un número real arbitrario.

- Por otro lado, si a=1 tenemos que resolver el sistema:

x + y + z = - 1 , – 2z = 3.

Lo que da el conjunto de soluciones:

x = -t+1/2 , y = t , z = -3/2 , para t un número real arbitrario.

- Además, si a=-1 tenemos que resolver el sistema:

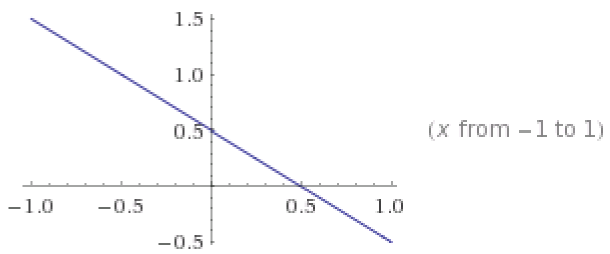
x + y - z= - 1 , 0z = 3.

Pero este sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.

b) La solución del sistema para **a**=1 es la recta de ecuación implícita

$$y=-x+1/2,\ z=-3/2,$$

Lo que da lugar a la siguiente representación gráfica de la misma:



en el plano de $\mathbf{R}^3$ de ecuación $z=-3/2$.

N.2

a) Su producto escalar es: (1,1,-1) **.** (3,-1,2) = 1.3-1.1-1.2 = 3-1-2=0.

   Su producto vectorial es: (1,1,-1) x (3,-1,2) = (1,-5,-4).

   Los vectores **u** y **v** son ortogonales porque su producto escalar vale 0.

b) Como **u . v**=|**u**|.|**v**|. cos(α), donde α es el ángulo que forman **u** y **v**, entonces, cos(α)=10/(4.5)=1/2. Luego el valor de α es 60º o -60º.

N.3

Un vector director de la recta pedida es el vector **w** que une los puntos A y B cuyas coordenadas son:

w = (2,4,1) – (3,1,2) = (-1,3,-1).

Luego la ecuación paramétrica de la recta es:

r: A +t **w** = (3,1,2)+t(-1,3,-1)=(3-t,1+3t,2-t), para t un parámetro real.

De la ecuación anterior podemos deducir la ecuación en forma continua para **r**:

$$\frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{-1}.$$

Si el punto C estuviera en esta recta el sistema (en la variable t) dado por :

C = (4,-2,3) = (3-t,1+3t,2-t),

sería compatible determinado, lo que es cierto (basta tomar t=-1). Luego C está alineado con A y B.

N.4

a) La función real logaritmo neperiano está bien definida para valores reales estrictamente positivos por lo tanto, el dominio de la función pedida ha de ser formado por los valores de x tales que $x^2 - 4 > 0$. Luego para los números reales tales que |x|>2. Es decir en el conjunto (-∞,-2) y también en (2,+∞).

b) Según la regla de derivación del logaritmo neperiano se tiene que:

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2-4}.$$

c) Para calcular los límites pedido procederemos e la siguiente manera:

   a. $\lim\limits_{x\to 2+} f'(x)=2\lim\limits_{x\to 2+}\frac{1}{x-(4/x)}=+\infty.$

b. $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 2\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x-(4/x)} = 0.$

También, para calcular los anteriores límites, basta observar que los límites pedidos son de una función que es cociente de dos polinomios, pongamos f'=P/Q, con grado de P estrictamente menor que grado de Q.

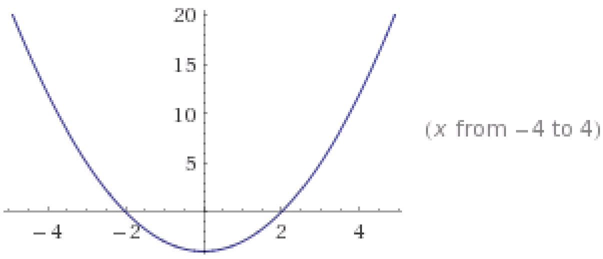
d) Aplicando la regla de integración:

$$\int_3^6 x^n dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_3^6 = \frac{6^{n+1}}{n+1} - \frac{3^{n+1}}{n+1}.$$

Se tiene que

$$\int_3^6 (x^2-4)dx = \int_3^6 x^2 dx - 4\int_3^6 dx = \frac{6^3}{3} - \frac{3^3}{3} - 12 = 51.$$

Este número es positivo pues la función integrando dada es positiva para x >2, y el número pedido es la medida del área que queda entre la gráfica de la curva y el eje horizontal desde el valor x=3 hasta el x=6.



OPCIÓN B

N.1

Pongamos la matriz X como

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

Entonces, como

$$AB = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \text{ y también } 2X = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2z & 2t \end{pmatrix},$$

Se tiene que:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2z & 2t \end{pmatrix} = AB - 2X,$$

Lo que da el sistema de ecuaciones:

$$2 = 6 - 2x,\ \ 1 = 2 - 2y,\ \ -1 = -2z,\ \ -4 = -6 - 2t,$$

En consecuencia: $X = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$.

N.2

a) Unos vectores normales son respectivamente:

$n_1 = (3,4,1)$, vector normal a π_1, y $n_2 = (1,-a,1)$, vector normal a π_2.

Su producto escalar es nulo si y sólo si $a = 1$, ya que la ecuación:

$$0 = n_1.n_2 = (3,4,1).(1,-a,1) = 3 - 4a + 1 = 4(1 - a),$$

tiene por única solución $a = 1$.

b) Para $a = 1$ la recta de corte de los planos dados es la solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$3x + 4y + z = 5, \quad x - y + z = 3$$

Luego, resolviendo el sistema anterior obtenemos la ecuación paramétrica pedida, es decir:

$$x=\frac{17}{7}-\frac{5}{7}t\,,\quad y=\frac{-4}{7}+\frac{2}{7}t\,,\ z=t\,.$$

N.3

Para que la matriz B tenga rango estrictamente menor que 3 es necesario y suficiente que su determinante sea nulo. Luego, basta calcular el determinante de B, $\det(B)$, e igualarlo a 0. Así:

$$0=\det(B)=\det\begin{pmatrix} b & 1 & 1\\ 1-b & 0 & b^2-2\\ 1-b & 0 & b-1\end{pmatrix}=(b-1)\det\begin{pmatrix} b & 1 & 1\\ 1-b & 0 & b^2-2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}=-(b-1)(b^2-b-1)\,.$$

En consecuencia para los valores

$$b=1,\ b=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ b=\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

obtenemos que el rango de B es estrictamente menor que 3.

N.4

a) La función f(x) dada está bien definida para cada número real x tal que x^2-4 se distinto de 0. Luego su dominio se compone de tres intervalos de la recta real, a saber: (-∞,-2), (-2,2) y (2,∞).

b) Calculamos en primer lugar la derivada de la función f(x) según la regla de derivación del cociente de dos funciones. Así tenemos que:

$$f'(x)=\frac{2x(x^2-4)-2x(x^2-1)}{(x^2-4)^2}=\frac{-6x}{(x^2-4)^2}$$

Luego el único extremo se alcanza para x=0, ya que es el único valor real que anula la derivada. Además, como

$$f''(0)=-3/8<0,$$

se tiene que x=0 es un máximo local de la función f(x), cuyo valor máximo local es f(0)=1/4.

c) Para calcular las asíntotas de f(x) procedemos según el tipo de asíntota que estemos buscando:

- Asíntotas verticales. Son las rectas x=2 y x=-2 ya que:
  - $\lim\limits_{x\to 2+} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to 2-} f(x)=-\infty,$
  - $\lim\limits_{x\to -2+} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to -2-} f(x)=+\infty,$

- Asíntotas horizontales. Es la recta y=1 puesto que
  - $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1, \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1,$
- Asíntotas oblicuas. Buscaríamos las rectas de ecuación y= m x + n satisfaciendo las condiciones
  - $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m < +\infty, \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m < +\infty,$
  - $\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = n < +\infty$

  pero ya hemos visto que esta condición se satisface para m=0 y n=1.

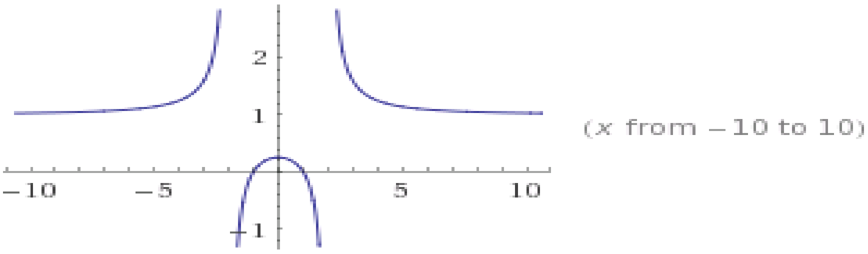
d) Descomponemos la fracción que nos da la fórmula de f(x) como suma de fracciones elementales:

$$f(x) = 1 + \frac{3}{x^2 - 4} = 1 + \frac{3/4}{x-2} - \frac{3/4}{x+2}.$$

Entonces se tiene que

$$\int_0^{1/2} f(x)dx = \int_0^{1/2} 1dx + \frac{3}{4}\int_0^{1/2} \frac{1}{x-2}dx - \frac{3}{4}\int_0^{1/2} \frac{1}{x+2}dx = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\Bigg\|_0^{1/2} \approx 0.117.$$

Este número es positivo pues la función f(x) dada es positiva para 0<x<1/2, y el número pedido es la medida del área que queda entre la gráfica de la curva y el eje horizontal desde el valor x=0 hasta el x=1/2.



UAM UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID	**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID** PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS Convocatoria **2014** **MATERIA: MATEMÁTICAS II**	**MODELO**

OBJETIVOS GENERALES Y CONTENIDOS:

De acuerdo con la Resolución de 29 de mayo de 2012, de la Dirección General de Universidades e Investigación, por la que se da publicidad al Acuerdo de la Comisión Organizadora, por el que se dictan las normas e instrucciones reguladoras de la prueba de acceso a la universidad para mayores de veinticinco años en el ámbito de la Comunidad de Madrid, publicado en el BOCM el 21 de junio de 2012 (BOCM nº 147, pg. 37 y siguientes), el currículo de los ejercicios para la materia de Matemáticas será el establecido para la materia Matemáticas II de segundo curso de Bachillerato, conforme a lo determinado en el Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.
Específicamente, los contenidos correspondientes para la materia Matemáticas II de segundo curso de Bachillerato, conforme a lo determinado en el Real Decreto 1467/2007 de 2 de noviembre son:
***1.** Álgebra lineal:*
– Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos.
– Operaciones con matrices. Aplicación de las operaciones y de sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales.
– Determinantes. Propiedades elementales de los determinantes. Rango de una matriz.
– Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
2. *Geometría:*
– Vectores en el espacio tridimensional. Producto escalar, vectorial y mixto. Significado geométrico.
– Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio. Resolución de problemas de posiciones relativas. Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes.
3. *Análisis:*
– Concepto de límite de una función. Calculo de límites.
– Continuidad de una función. Tipos de discontinuidad.
– Interpretación geométrica y física del concepto de derivada de una función en un punto.
– Función derivada. Cálculo de derivadas. Derivada de la suma, el producto y el cociente de funciones y de la función compuesta. Aplicación de la derivada al estudio de las propiedades locales de una función. Problemas de optimización.
– Introducción al concepto de integral definida a partir del cálculo de áreas encerradas bajo una curva. Técnicas elementales para el cálculo de primitivas. Aplicación al cálculo de áreas de regiones planas.
Según el mismo Real Decreto 1467/2007 de 2 de noviembre: “Matemáticas II requiere conocimientos de Matemáticas I.” En relación con los bloques Álgebra Lineal, Geometría y Análisis correspondientes a los contenidos para la materia Matemáticas II, los contenidos para la materia Matemáticas I son:
1. *Aritmética y Álgebra:*
– Números reales. Valor absoluto. Desigualdades. Distancias entre la recta real. Intervalos y entornos.
– Resolución e interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones.
– Utilización de las herramientas algebraicas en la resolución de problemas.
2. *Geometría:*
– Medida de un ángulo en radianes. Razones trigonométricas de un ángulo. Uso de fórmulas y transformaciones trigonométricas en la resolución de triángulos y problemas geométricos diversos.
– Vectores libres en el plano. Operaciones. Producto escalar. Módulo de un vector.
– Ecuaciones de la recta. Posiciones relativas de rectas. Distancias y ángulos. Resolución de problemas.
– Idea de lugar geométrico en el plano. Cónicas.
3. *Análisis:*
– Funciones reales de variable real: clasificación y características básicas de las funciones polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, parte entera, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.
– Dominio, recorrido y extremos de una función.
– Operaciones y composición de funciones.
– Aproximación al concepto de límite de una función, tendencia y continuidad.
– Aproximación al concepto de derivada. Extremos relativos en un intervalo.
– Interpretación y análisis de funciones sencillas, expresadas de manera analítica o gráfica, que describan situaciones reales.