



Figuras planas

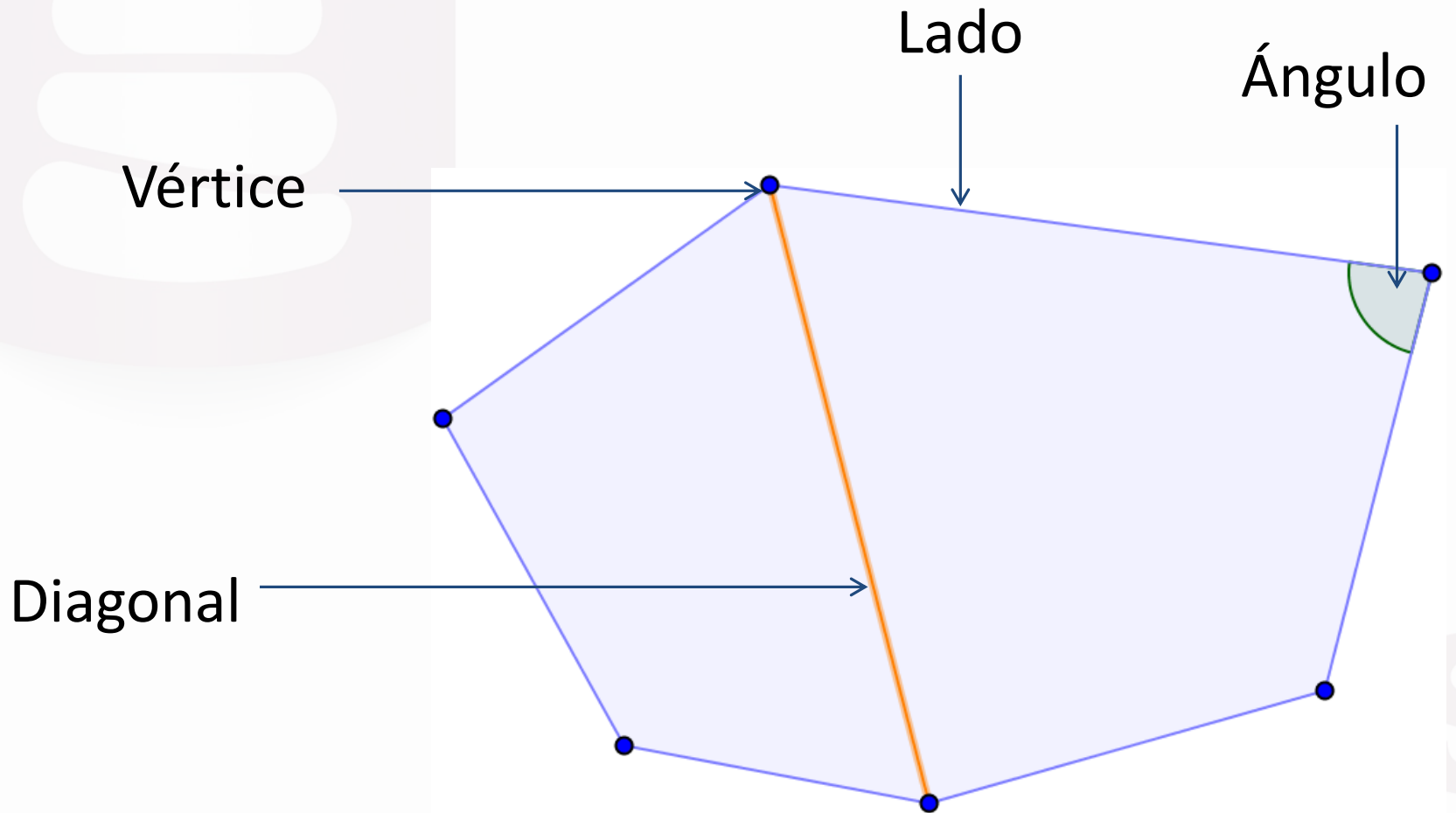
Definiciones

IES
LAS
CANTERAS
COLLADO VILLALBA

Polígono: definición

- Un **polígono** es una figura plana (yace en un plano) cerrada por tres o más segmentos.
- Los **lados** de un polígono son cada uno de los segmentos que delimitan al polígono.
- Los **vértices** de un polígono son los puntos comunes a dos lados contiguos.
- Cada par de lados contiguos determinan un **ángulo** del polígono.
- Una **diagonal** es el segmento que une dos vértices no contiguos

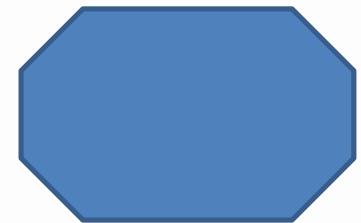
Polígono: esquema



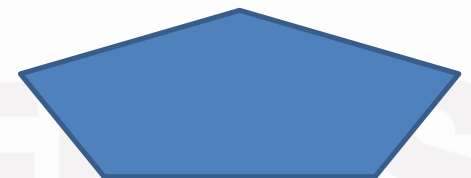
Clasificación de polígonos (I)

- Según el número de lados

Nombre	Número de lados
Triángulo	3
Cuadrilátero	4
Pentágono	5
Hexágono	6
Heptágono	7
Octógono	8
Eneágono	9
Decágono	10
Endecágono	11
Dodecágono	12



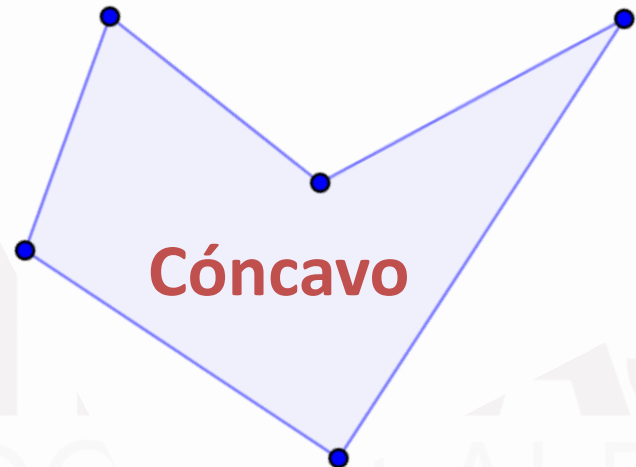
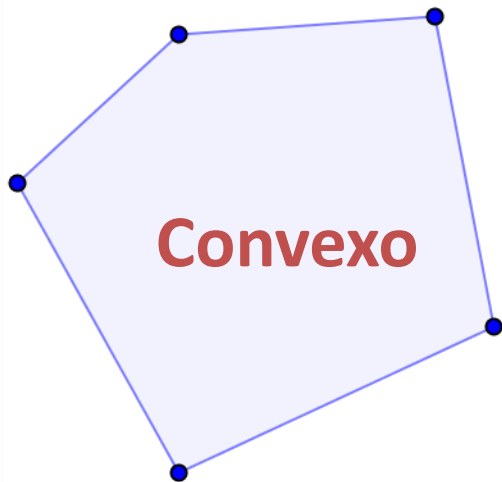
Octógono



Pentágono

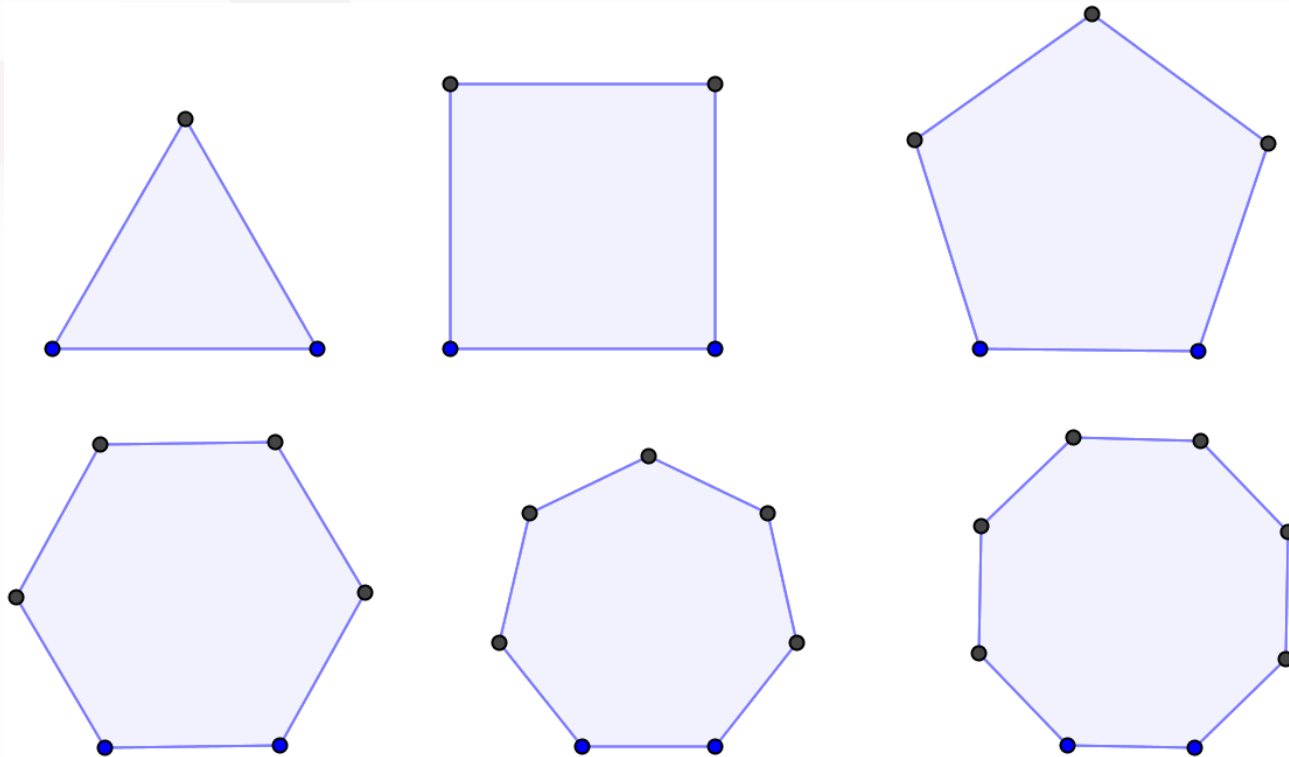
Clasificación de polígonos (II)

- Según la medida de sus ángulos interiores.
 - **Cóncavos**: sus ángulos interiores son menores de 180 grados
 - **Convexos**: al menos un ángulo interior mide más de 180 grados



Polígonos regulares

- Se dice que un polígono es regular si sus lados y sus ángulos son iguales.

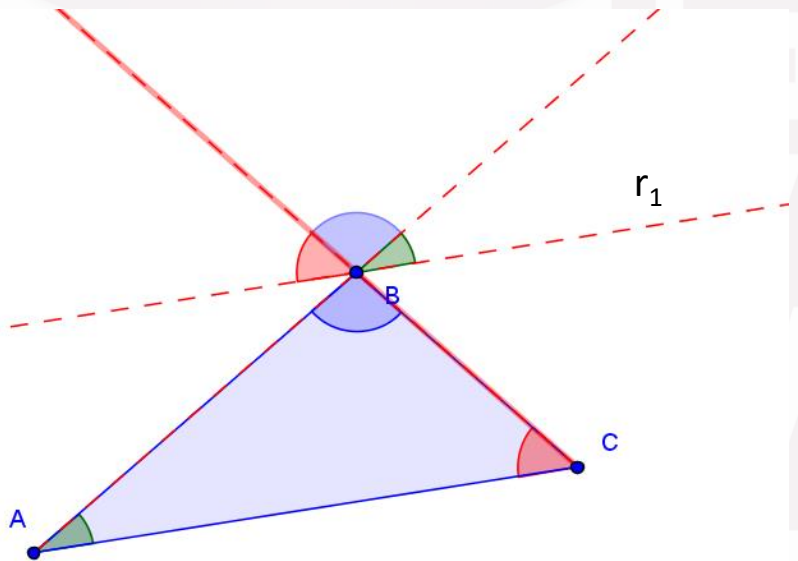


Suma de los ángulos de un triángulo

- La suma de los ángulos de un triángulo es de 180 grados.

Demostración gráfica:

1. Se traza la recta r_1 paralela a uno de los lados del triángulo (en el ejemplo AC)
2. Se extienden los otros lados del triángulo
3. Sobre el vértice (en el ejemplo B) se obtiene la suma de los tres lados.

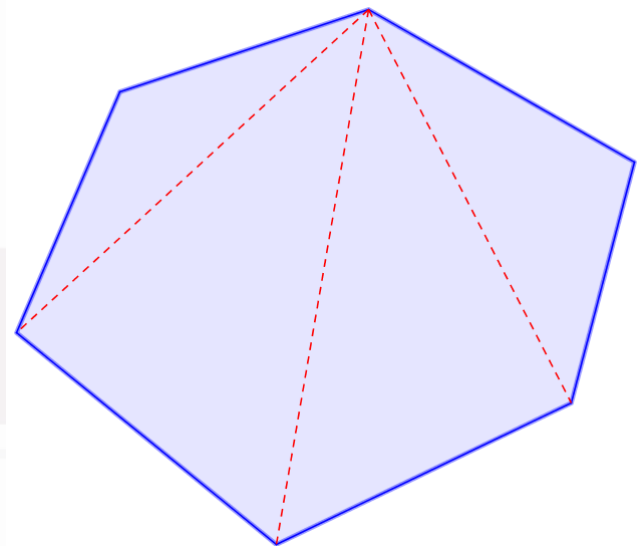


Suma de los ángulos interiores de un polígono

- En todo polígono de más de tres lados se pueden trazar todas las diagonales desde uno de los vértices.
- En la superficie del polígono aparecen triángulos, lo que nos permite calcular la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono.

Desde un vértice podemos trazar tantas diagonales como lados menos dos, formándose tantos triángulos como diagonales, por tanto:

Suma de ángulos = $180^\circ \times (\text{número de lados} - 2)$





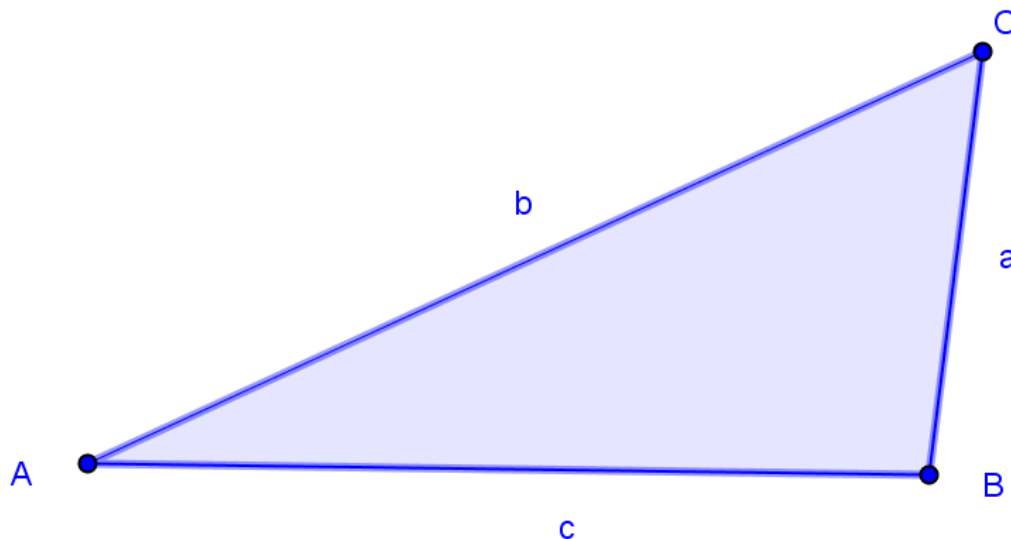
Clasificación y propiedades

TRIÁNGULOS

IES
LAS
CANTERAS
COLLADO VILLALBA

Definición y notación

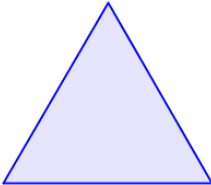
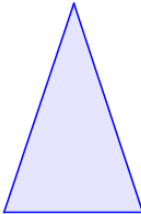
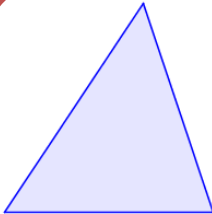
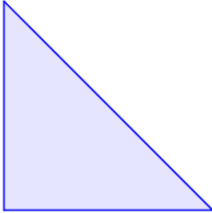
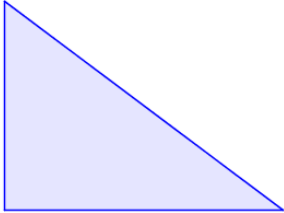
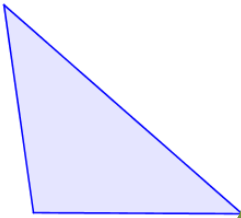
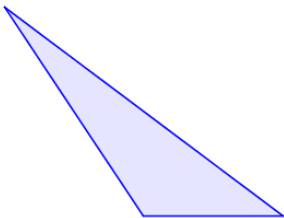
- Un triángulo es un polígono de tres lados.
- Un triángulo siempre es un polígono convexo y la suma de sus ángulos es de 180° .
- Usualmente a los vértices de un triángulo se les nombra con una letra mayúscula, a los lados con los vértices y a la longitud de los lados con la letra minúscula que le corresponde al vértice opuesto.



Clasificación

- Atendiendo a la longitud de sus lados:
 - **Equiláteros**: tres lados iguales
 - **Isósceles**: dos lados iguales
 - **Escaleno**: tres lados distintos
- Atendiendo a la amplitud de sus ángulos
 - **Acutángulo**: todos sus ángulos agudos
 - **Rectángulo**: un ángulo recto
 - **Obtusángulo**: un ángulo obtuso

Clasificación: resumen

	Equilátero	Isósceles	Escaleno
Acutángulo			
Rectángulo			
Obtusángulo			

Construcción de triángulos

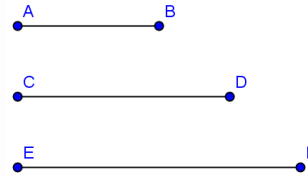
- Los criterios de construcción de un triángulo nos permiten decidir si un triángulo es igual a otro sin necesidad de comprobar que todos sus elementos son iguales.
- Podemos construir un triángulo si conocemos:
 - La longitud de sus tres lados
 - Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos
 - Un lado y sus ángulos contiguos

Construir un triángulo conocidos sus tres lados

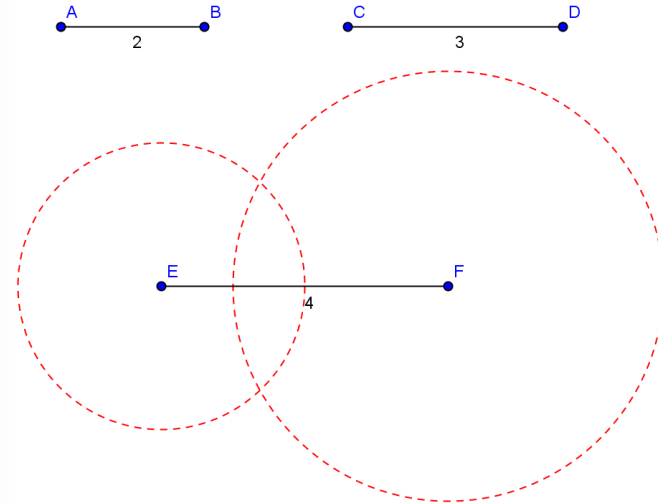
Construcción:

1. Seleccionamos uno de los lados.
2. Con centro en cada uno de sus extremos, construimos dos circunferencias con radio la longitud de los lados restantes.
3. Unimos los extremos del lado seleccionado con uno de los puntos de corte de las circunferencias.

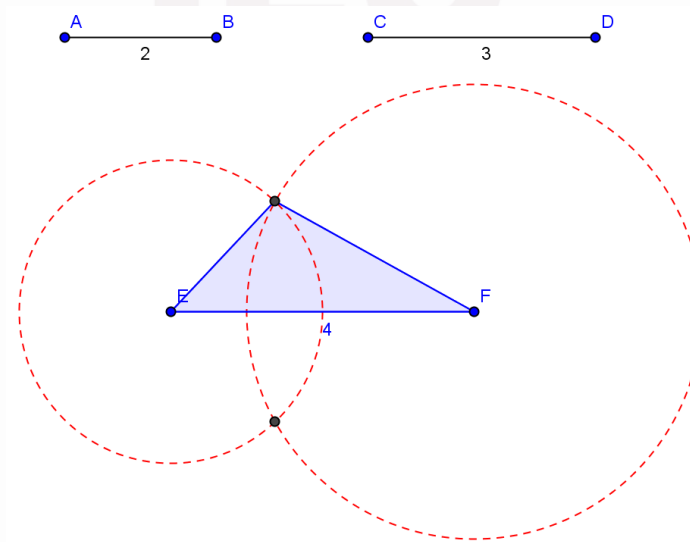
1



2



3

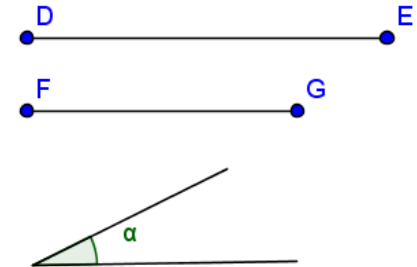


Construir un triángulo conocidos dos lados y el ángulo comprendido

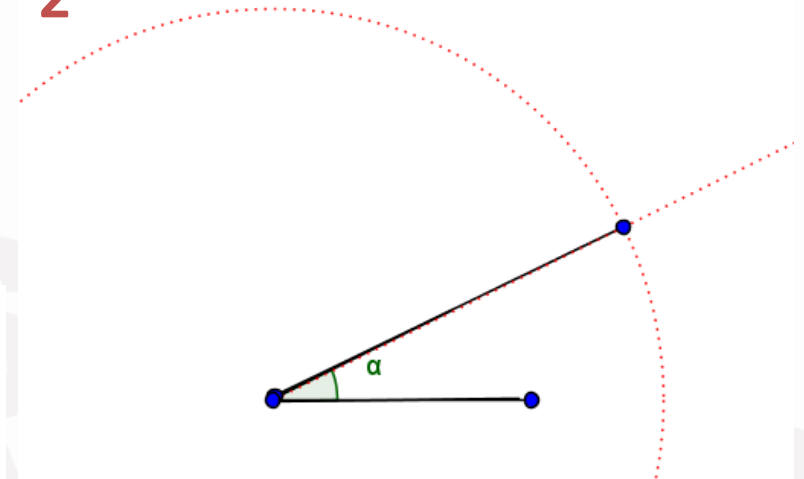
Construcción:

1. Sobre uno de los lados, trasladamos el ángulo y dibujamos una semirrecta que forme dicho ángulo con el lado.
2. Con centro en el anterior punto, trasladamos la longitud del lado a la semirecta.
3. Unimos el anterior punto con el otro extremo del segmento inicial.

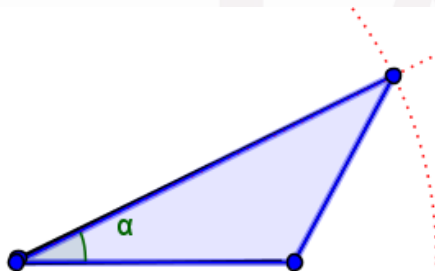
1



2



3



Construir un triángulo conocidos un lado y dos ángulos contiguos

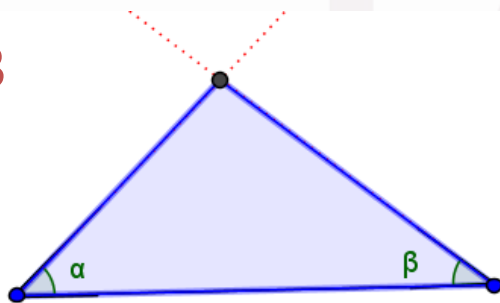
Construcción:

1. Sobre el lado, trasladamos un ángulo a cada extremo.
2. Desde cada extremo construimos una semirrecta que forme con el segmento el ángulo correspondiente
3. El vértice que falta al triángulo es la intersección de las dos semirrectas.

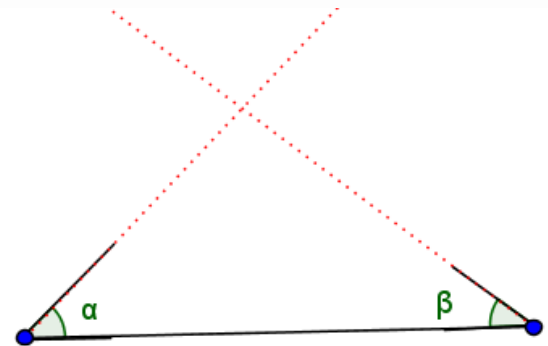
1



3

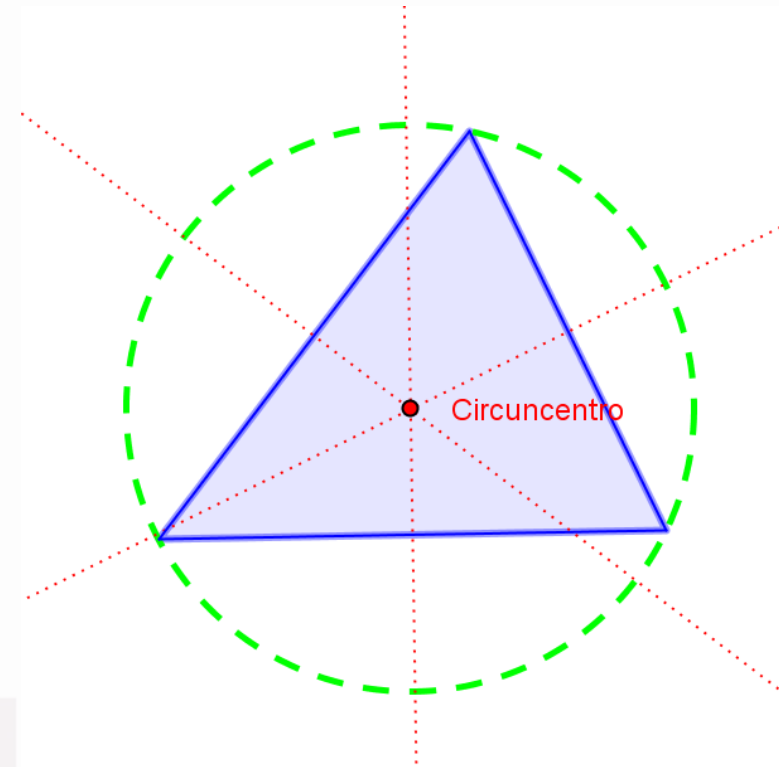


2



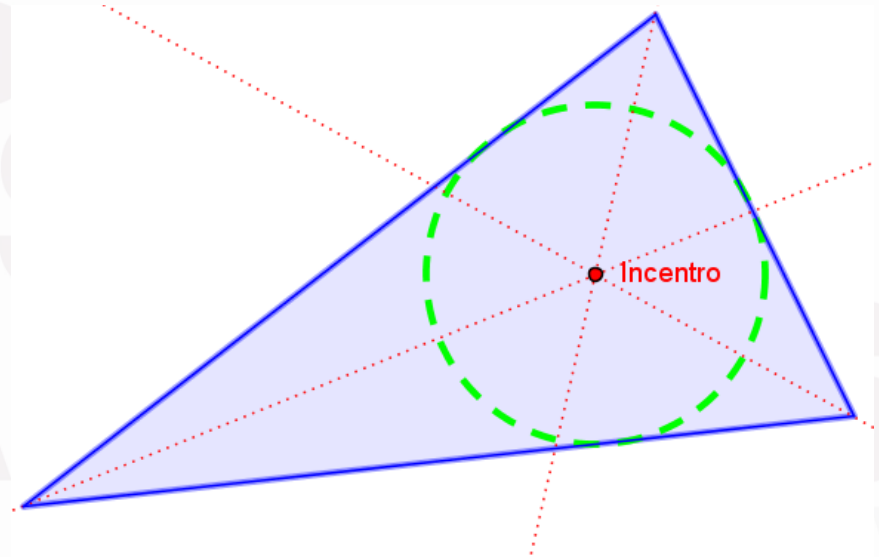
Circuncentro

- El punto donde se cortan las mediatrices de los lados de un triángulo se denomina **circuncentro**.
- El circuncentro es el centro de la circunferencia que contiene los tres vértices de un triángulo.



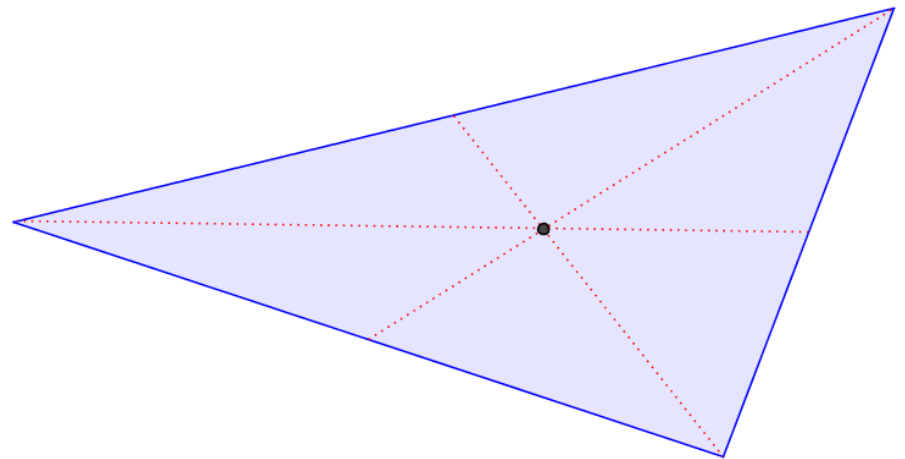
Incentro

- El punto donde se cortan las bisectrices de los ángulos de un triángulo se denomina **incentro**.
- El incentro, es el centro de una circunferencia tangente a los lados del triángulo (circunferencia inscrita)



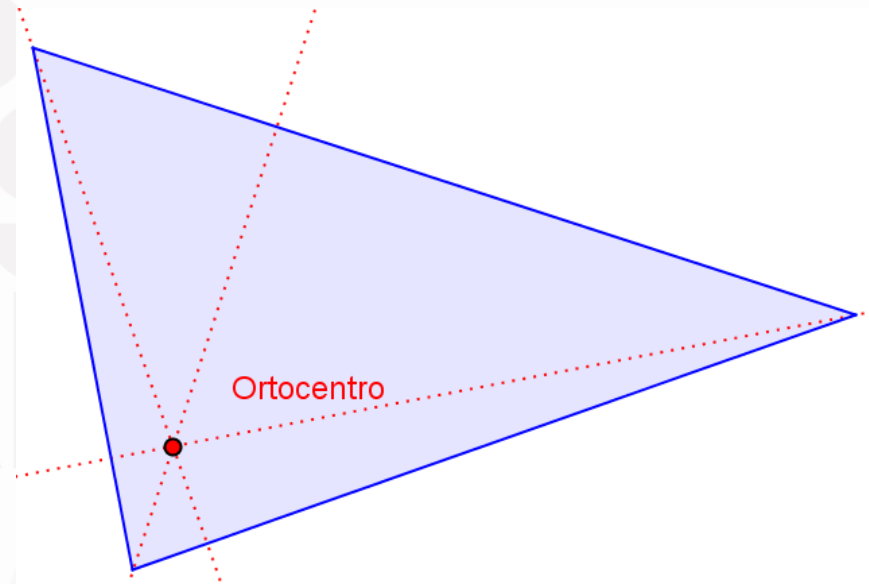
Baricentro

- La **mediana** del lado de un triángulo es el segmento que une el punto medio del lado con su vértice opuesto.
- El **baricentro** de un triángulo es el punto donde se cortan las medianas del triángulo.



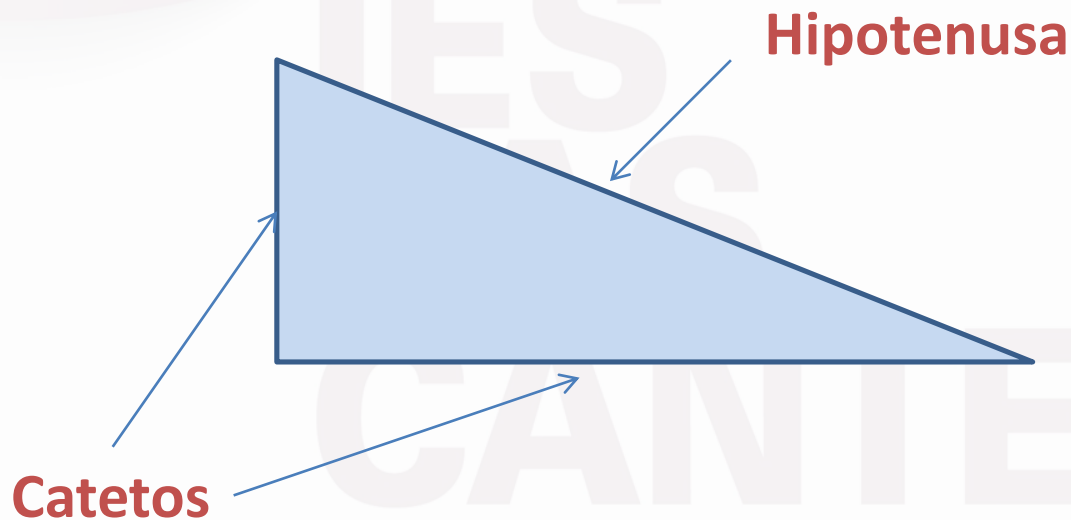
Ortocentro

- La **altura** de un triángulo trazada desde un vértice, es el segmento perpendicular al lado opuesto que contiene al vértice.
- El **ortocentro** es el punto donde se cortan las tres alturas de un triángulo.



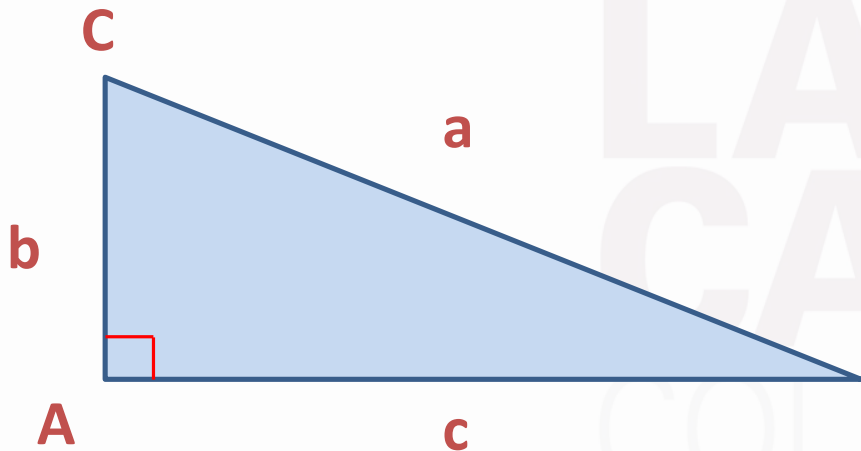
Lados de un triángulo rectángulo

En un triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto se llaman **catetos**. Al lado opuesto al ángulo de 90° se denomina **hipotenusa**.



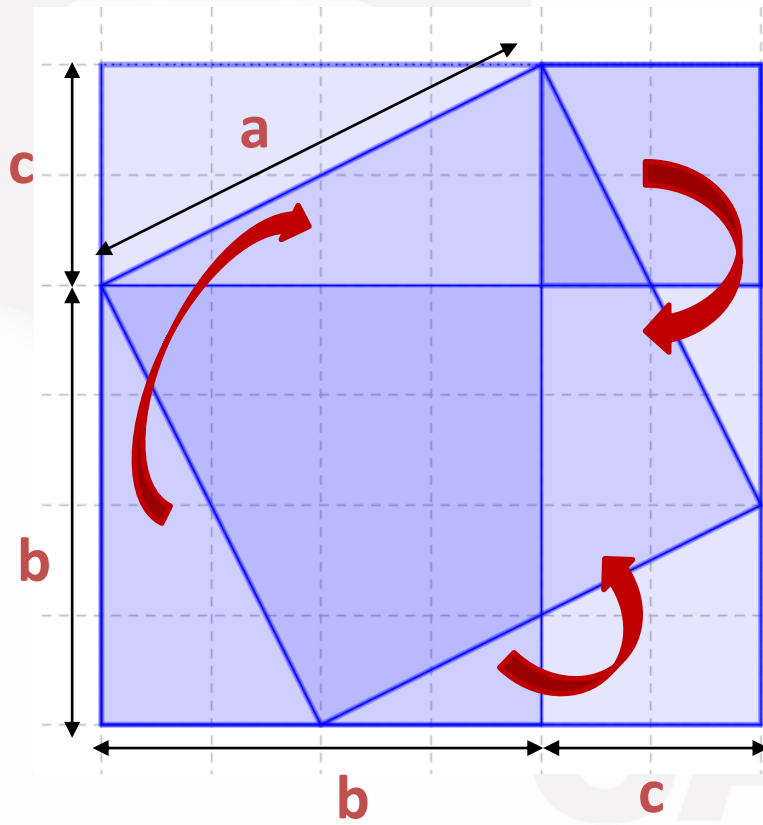
Teorema de Pitágoras

- En un **triángulo rectángulo**, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.
- Si en un triángulo, el cuadrado del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de los lados restantes, entonces el triángulo es **rectángulo**.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Demostración gráfica del teorema de Pitágoras



$$a^2 = b^2 + c^2$$

UNIVERSIDAD
ANTERAS
COLLADO VILLALBA



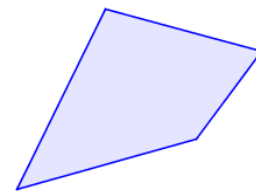
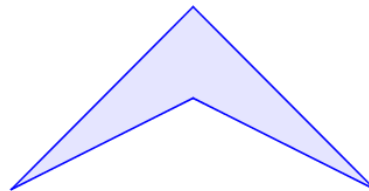
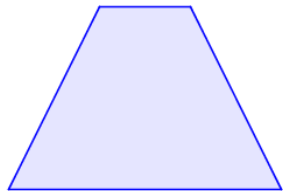
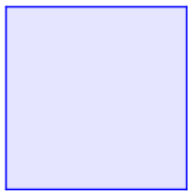
Propiedades

CUADRILÁTEROS

IES
LAS
CANTERAS
COLLADO VILLALBA

Definición

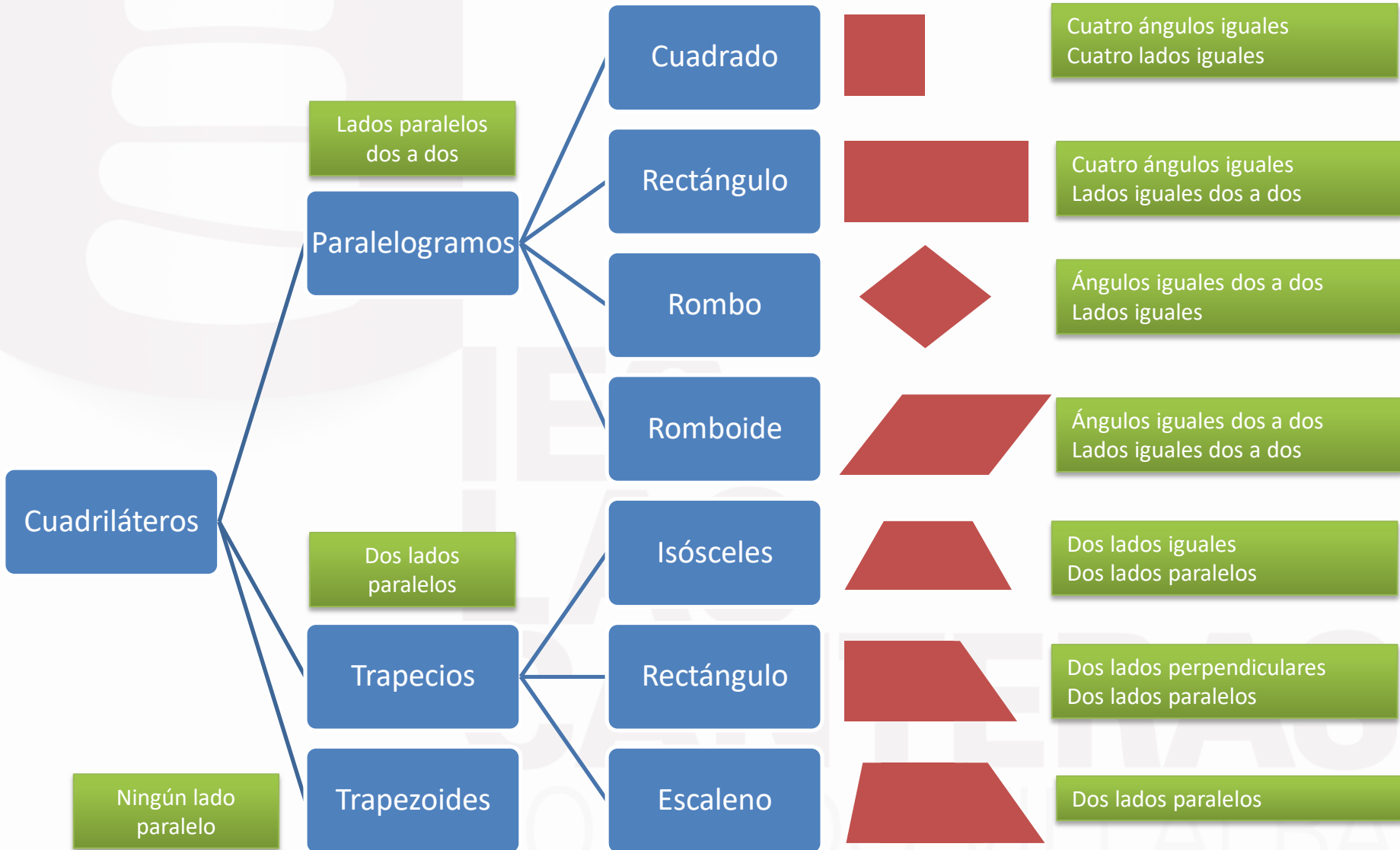
- Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados.
- La suma de los ángulos de un cuadrilátero es siempre de 360° .



IES

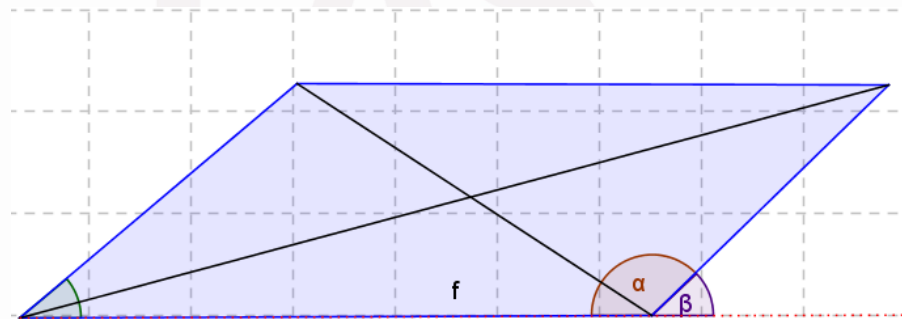
CAJAMARCA
COLLADO VILLALBA

Clasificación



Propiedades de los paralelogramos

- Los lados opuestos son iguales.
- Las diagonales se cortan en el punto medio.
- Los ángulos consecutivos son suplementarios
- Los ángulos opuestos son iguales
- En el caso del rombo y el cuadrado, las diagonales son perpendiculares





Propiedades

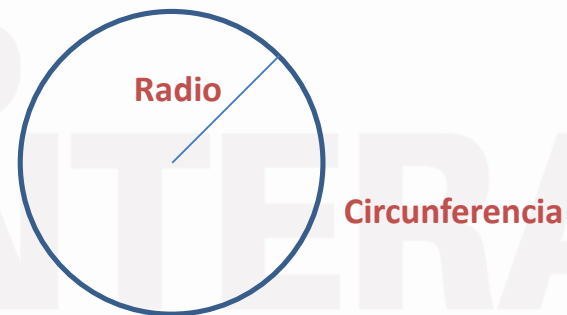
LA CIRCUNFERENCIA

IES
LAS
CANTERAS
COLLADO VILLALBA

Definición

Una circunferencia es una línea curva, cerrada y plana cuyos puntos están a la misma distancia (radio) de un punto llamado centro.

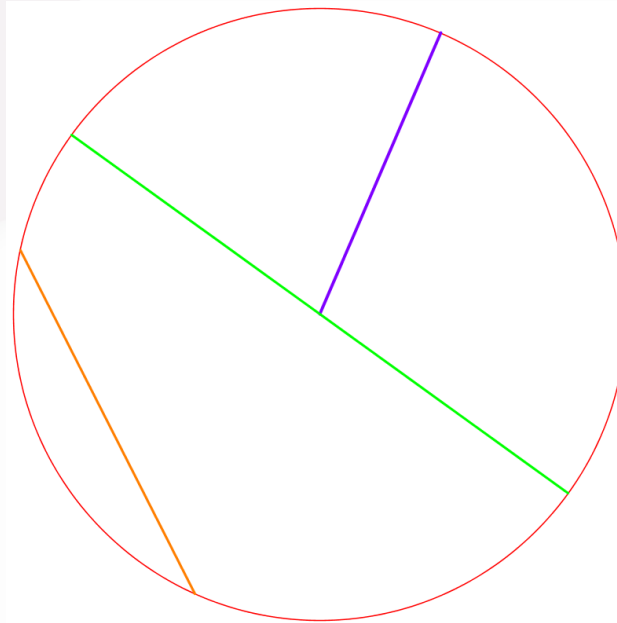
A la superficie encerrada en una circunferencia se le denomina círculo.



Elementos de una circunferencia

Diámetro: Segmento que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro

Radio: Segmento que une un punto de la circunferencia y el centro

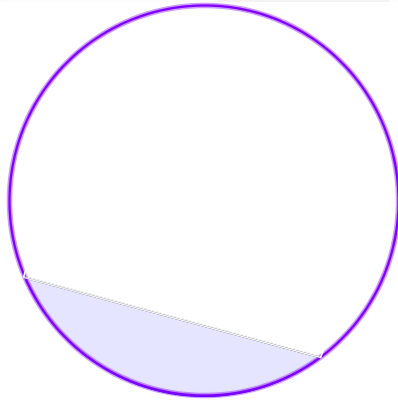


Cuerda: Segmento que une dos puntos de la circunferencia

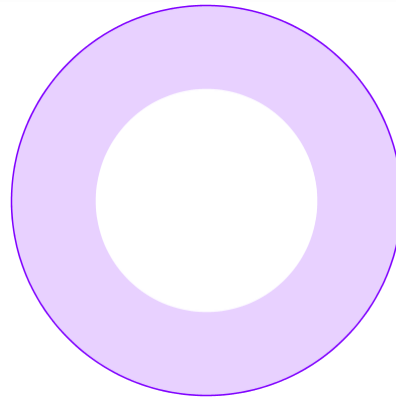
Arco: porción de la circunferencia que une dos puntos.

CAIN FERRAS
COLLADO VILLALBA

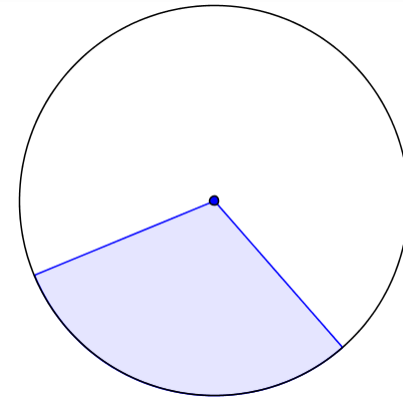
Elementos de un círculo



Segmento circular: porción del plano delimitada por una cuerda y el arco correspondiente



Corona circular: porción del plano delimitada por dos circunferencias concéntricas



Sector circular: porción del plano delimitada por un arco de circunferencia y dos de sus radios

El número π

El cociente entre la longitud de una circunferencia y el diámetro de la misma siempre se mantiene constante.

Esta constante se denomina π

π es un número irracional (no puede ser expresado como fracción de dos números enteros)

Su parte decimal consta de infinitos dígitos y es no periódica.

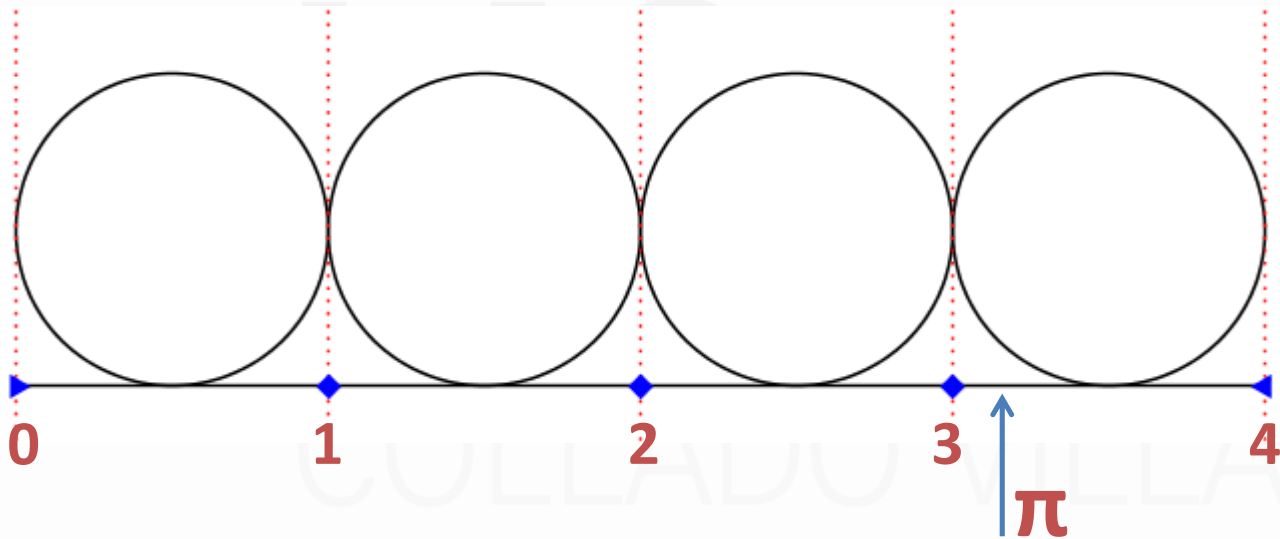
$$\pi \approx 3,14159265 \dots$$

Para realizar cálculos utilizaremos el valor **3,14**

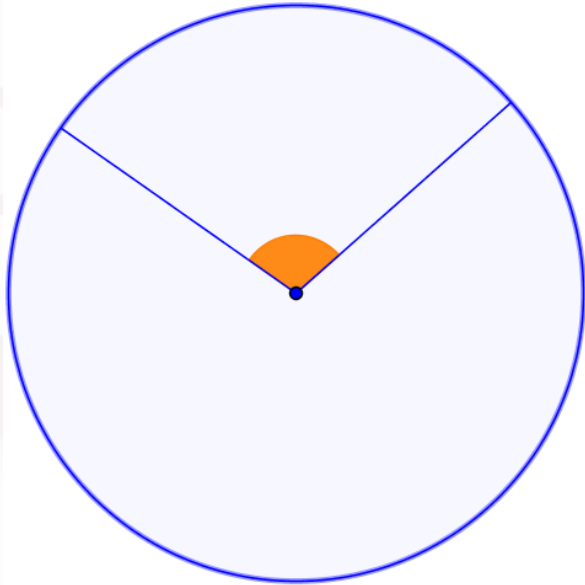
Longitud de una circunferencia

La longitud de una circunferencia es igual a dos veces el radio (r) por el número π .

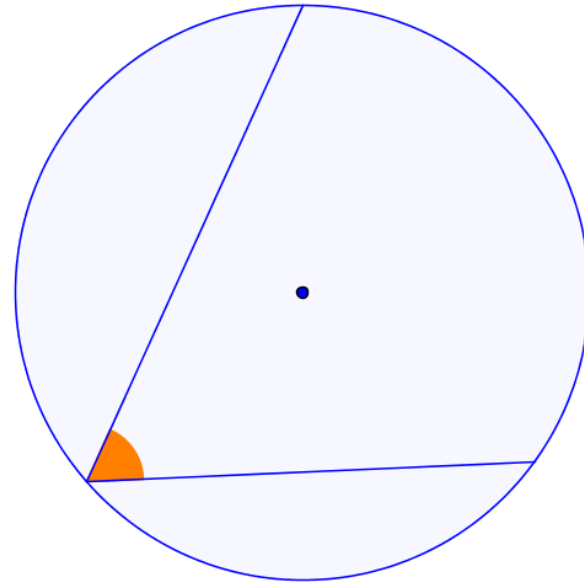
$$L_{\text{circunferencia}} = 2 \cdot \pi \cdot r$$



Ángulo central e inscrito

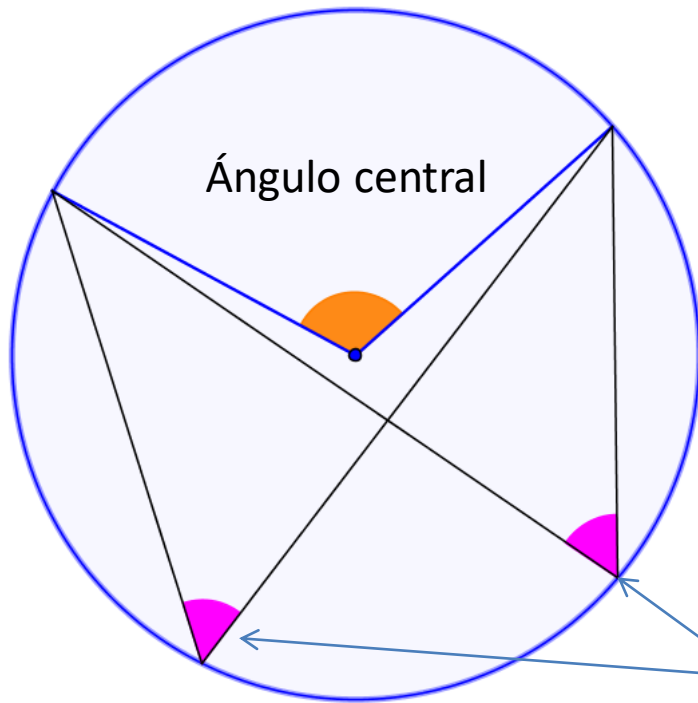


Ángulo central: vértice en el centro de la circunferencia y sus lados contienen dos radios.



Ángulo inscrito: vértice en un punto de la circunferencia y sus lados secantes a la circunferencia.

Relación entre ángulo inscrito y central



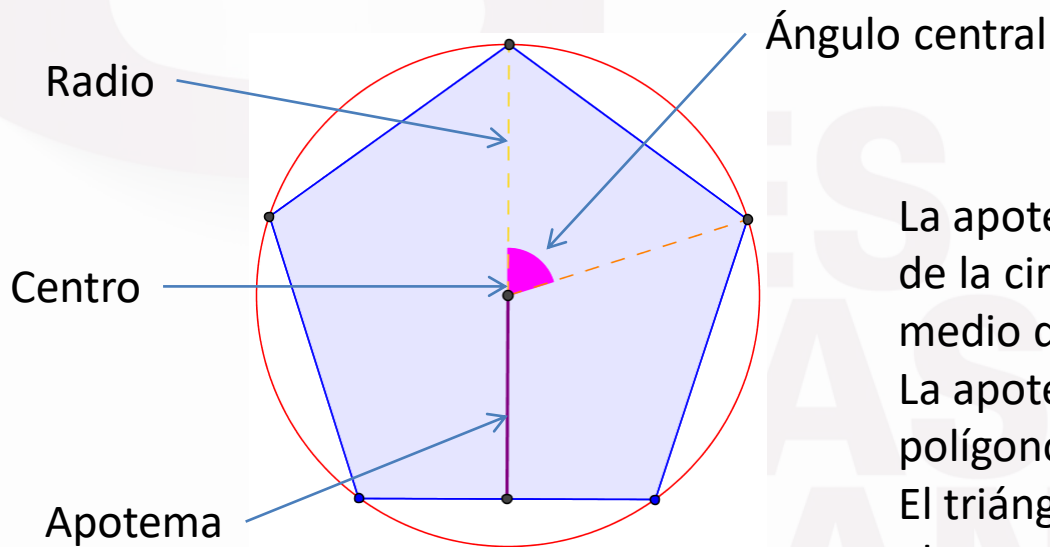
La amplitud del **ángulo inscrito** es la mitad del **ángulo central** correspondiente

Ángulo inscrito

ES
CAS
CANTERAS
COLLADO VILLALBA

Polígonos regulares y circunferencia

Un **polígono regular** se encuentra **inscrito** en una circunferencia cuando todos sus vértices se pertenecen a la circunferencia.

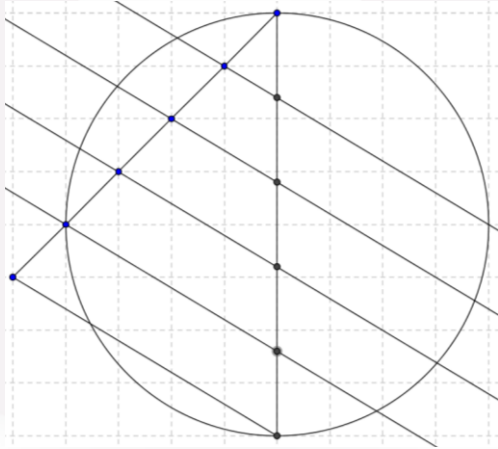


La apotema es el segmento que une el centro de la circunferencia circunscrita con el punto medio del lado del polígono.

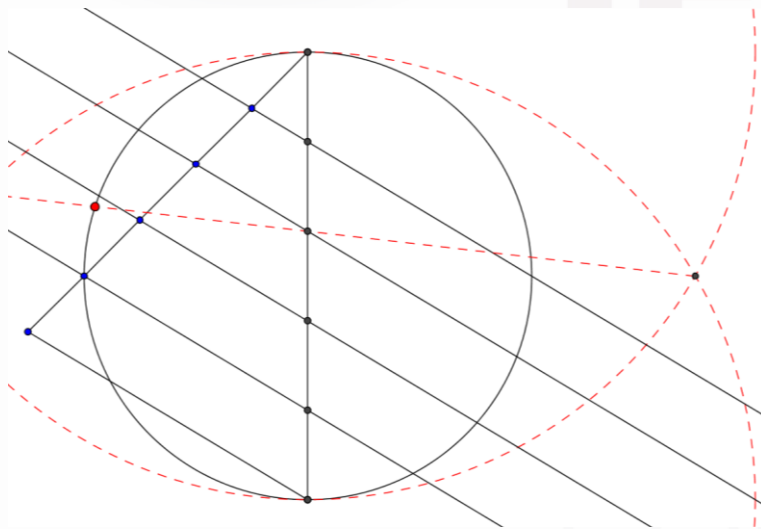
La apotema es perpendicular al lado del polígono.

El triángulo formado por dos radios que unen el centro con dos vértices consecutivos del polígono y el lado correspondiente es isósceles, siendo la apotema su altura.

Construcción de un polígono regular I

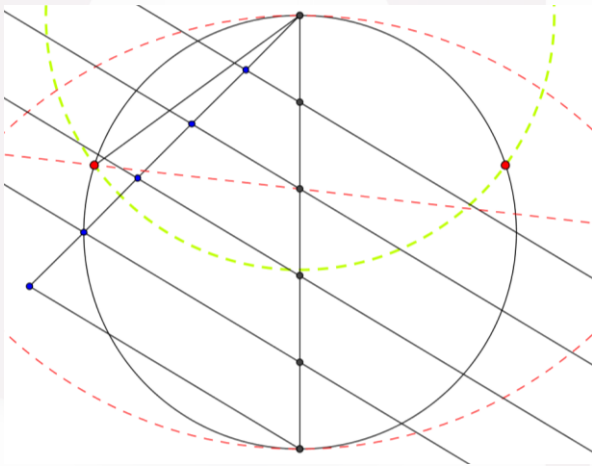


Construimos una circunferencia y su diámetro. Dividimos el diámetro en tantas partes iguales como lados tenga el polígono (en la figura se ha utilizado el teorema de Thales)

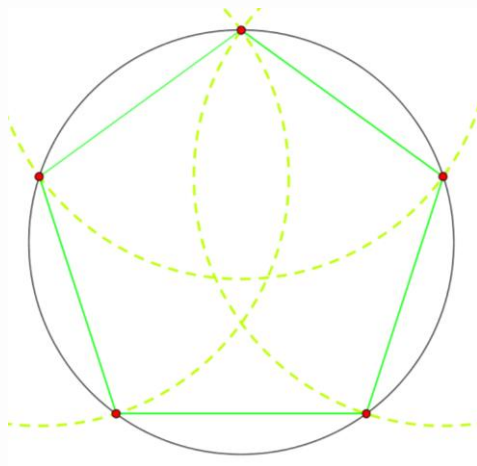


Con centro en los extremos de los diámetros, dibujamos dos circunferencias de radio el diámetro de la circunferencia original. Desde uno de sus puntos de corte trazamos la recta que une la segunda división del diámetro y el punto de corte de las circunferencias construidas.

Construcción de un polígono regular II



El segmento que une el punto de corte anteriormente calculado, con el extremo del diámetro será la longitud del lado del polígono.



Trasladamos la anterior distancia calculada para calcular los vértices restantes.

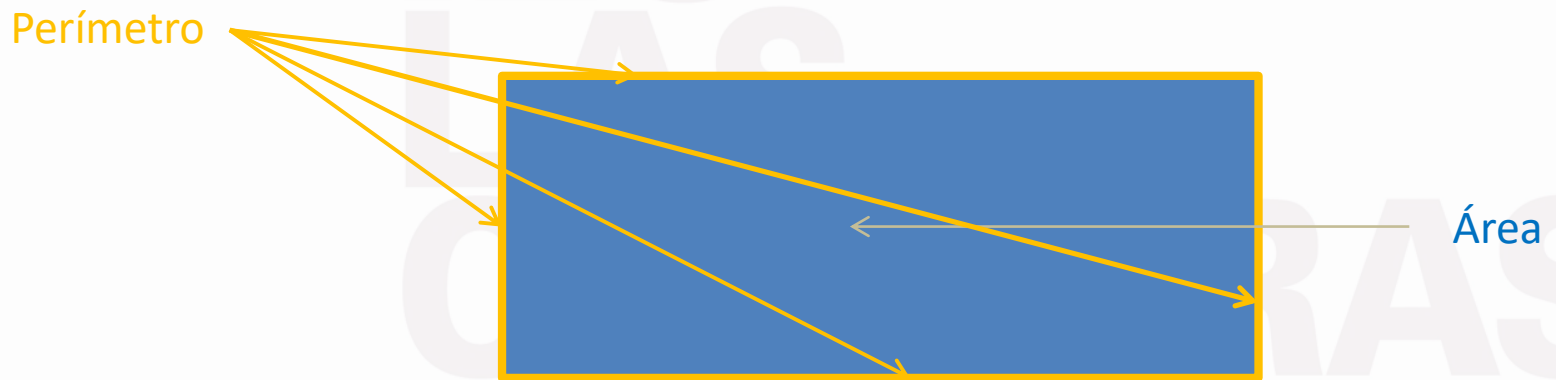


CÁLCULO DE ÁREAS

IES
LAS
CANTERAS
COLLADO VILLALBA

Perímetro y área

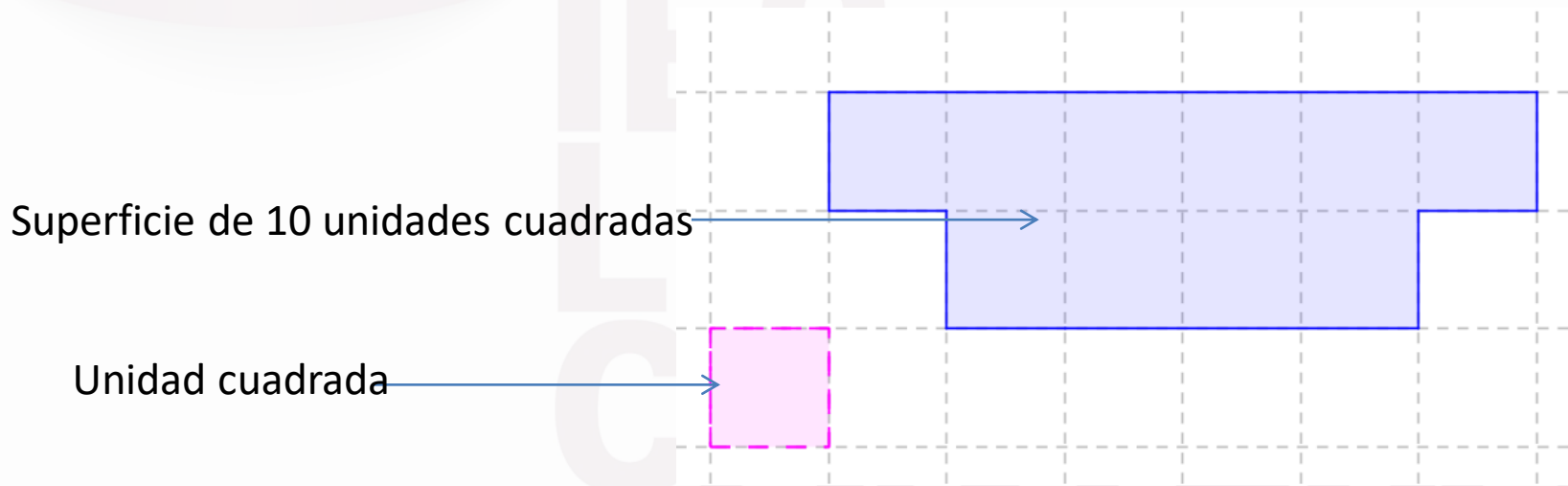
- El **perímetro** de una figura plana es la suma de las longitudes de sus lados.
- El **área** de una figura plana es una medida de extensión de la superficie limitada por sus lados.



Algunas notas

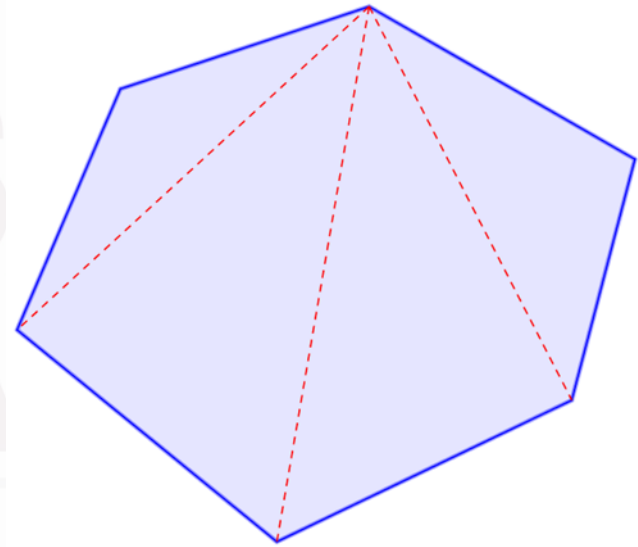
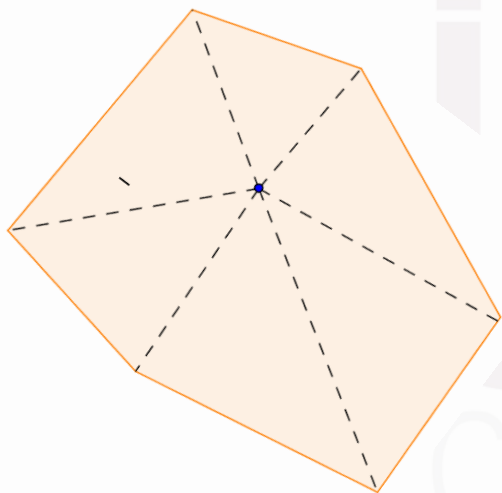
El **área** de una figura plana puede ser entendida como el número de unidades cuadradas necesarias para cubrir una superficie.

Dos polígonos pueden tener igual área pero tener distinto perímetro (y viceversa).



Descomposición de figuras

- Para calcular el área de una figura plana es posible descomponerlo en figuras mas pequeñas de las cuales se conoce el área.
- El área de un polígono puede descomponerse en triángulos, utilizando un punto interior o trazando sus diagonales



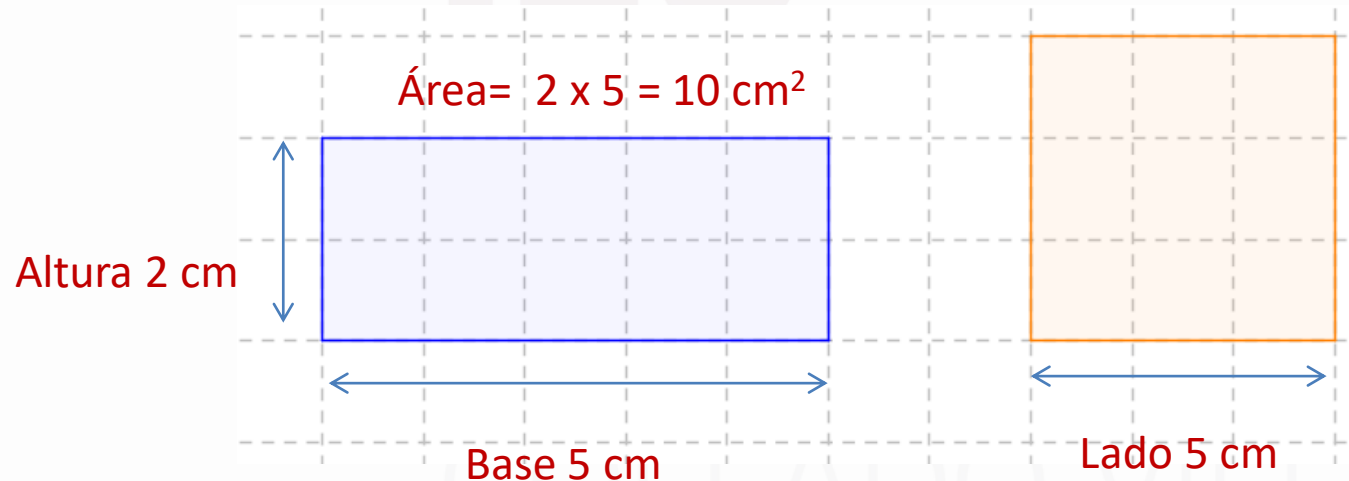
Área de un cuadrado y del rectángulo

El área de un rectángulo se obtiene multiplicando la base por la altura.

El área del cuadrado, al ser la base y la altura iguales, es su lado al cuadrado.

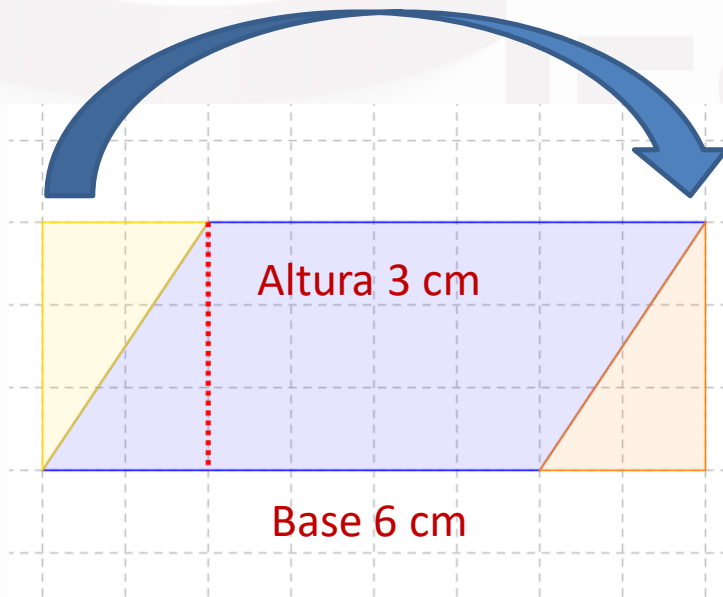
$$A_{\text{rectángulo}} = \text{base} \times \text{altura}$$

$$A_{\text{cuadrado}} = \text{lado} \times \text{lado} = \text{lado}^2$$



Área de un romboide

- El área de un romboide se obtiene multiplicando la base por la altura (segmento perpendicular a la base trazado desde cualquier punto del lado opuesto)

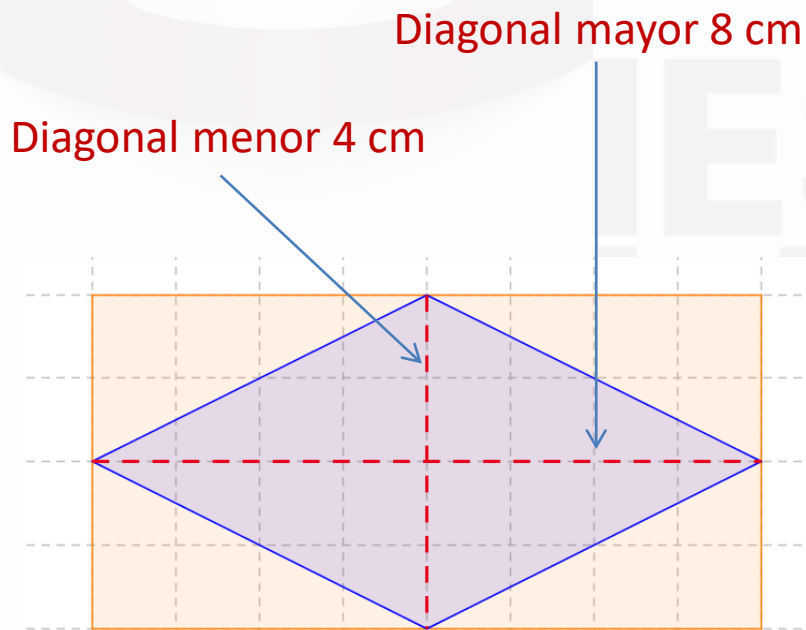


$$A_{\text{romboide}} = \text{base} \times \text{altura}$$

$$\text{Área} = 3 \times 6 = 18 \text{ cm}^2$$

Área del rombo

- Se puede inscribir en un rectángulo, un rombo cuyas diagonales son la base y la altura del rectángulo, formándose 8 triángulos iguales.



$$A_{\text{rombo}} = \frac{\text{Diagonal mayor} \times \text{diagonal menor}}{2}$$

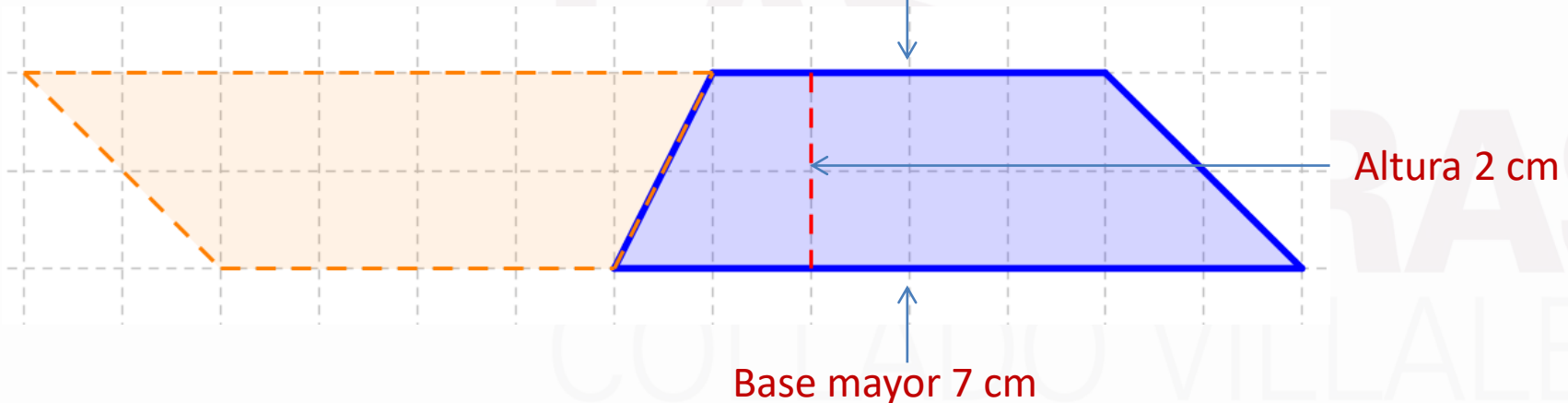
$$\text{Área} = \frac{4 \times 8}{2} = 16 \text{cm}^2$$

Área del trapecio

- Se puede calcular el área de un trapecio a partir del área de un romboide, duplicando el trapecio.

$$A_{\text{trapecio}} = \frac{(\text{base mayor} + \text{base menor}) \times \text{altura}}{2}$$

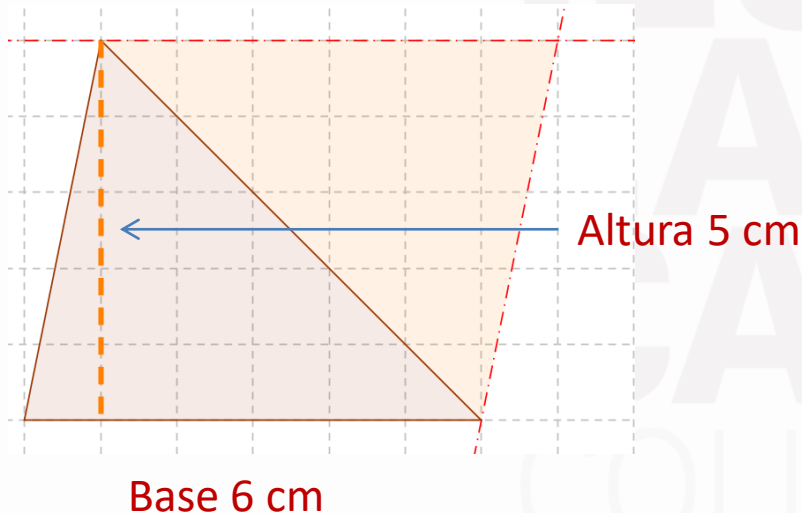
$$A_{\text{trapecio}} = \frac{(4 + 7) \times 2}{2} = 11 \text{ cm}^2$$



Área del triángulo I

- Trazando dos rectas paralelas a los lados, por dos de sus vértices, obtenemos un romboide, pudiendo calcular el área de un triángulo a partir de éste.

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$



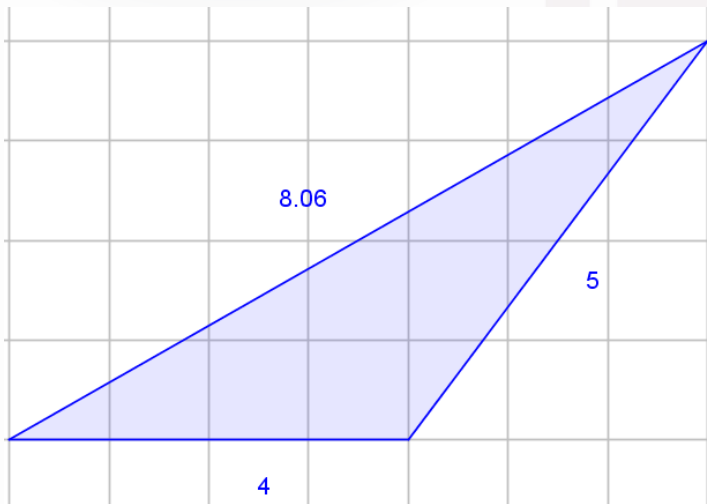
$$A_{\text{triángulo}} = \frac{6 \times 5}{2} = 15 \text{ cm}^2$$

Área del triángulo II

- Si conocemos la longitud de los lados del triángulo podemos utilizar la **fórmula de Herón**:

Sea p el semiperímetro del triángulo, es decir,

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$



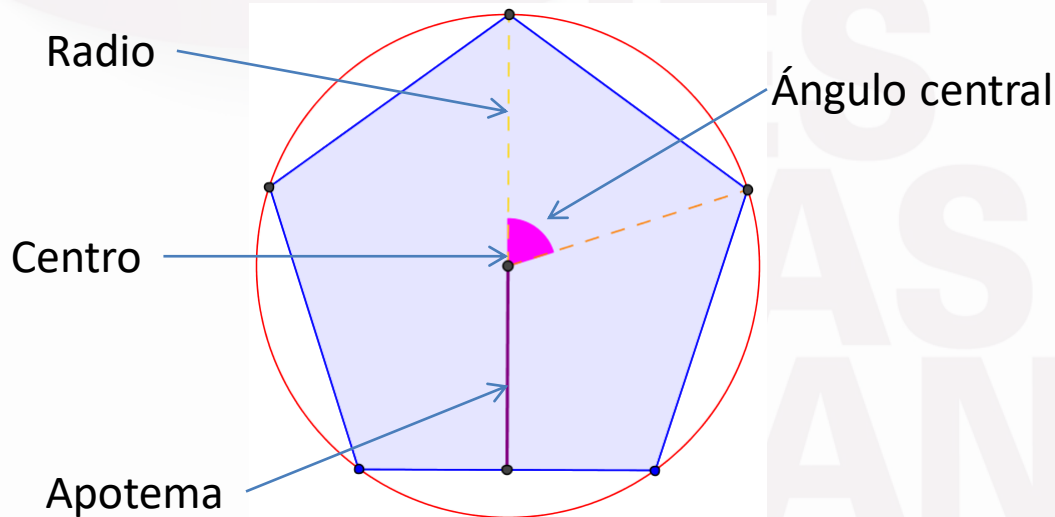
$$A_{\text{triángulo}} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

$$p = \frac{4 + 5 + 8,06}{2} = 8,53 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{triángulo}} = \sqrt{8,53 \cdot (8,53 - 4)(8,53 - 5)(8,53 - 8,06)} = 8 \text{ cm}^2$$

Área de un polígono regular

Un polígono regular queda dividido en tantos triángulos isósceles como lados tiene, si trazamos los radios de la circunferencia que los circunscribe a sus vértices.



$$A_{\text{polígono}} = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2}$$

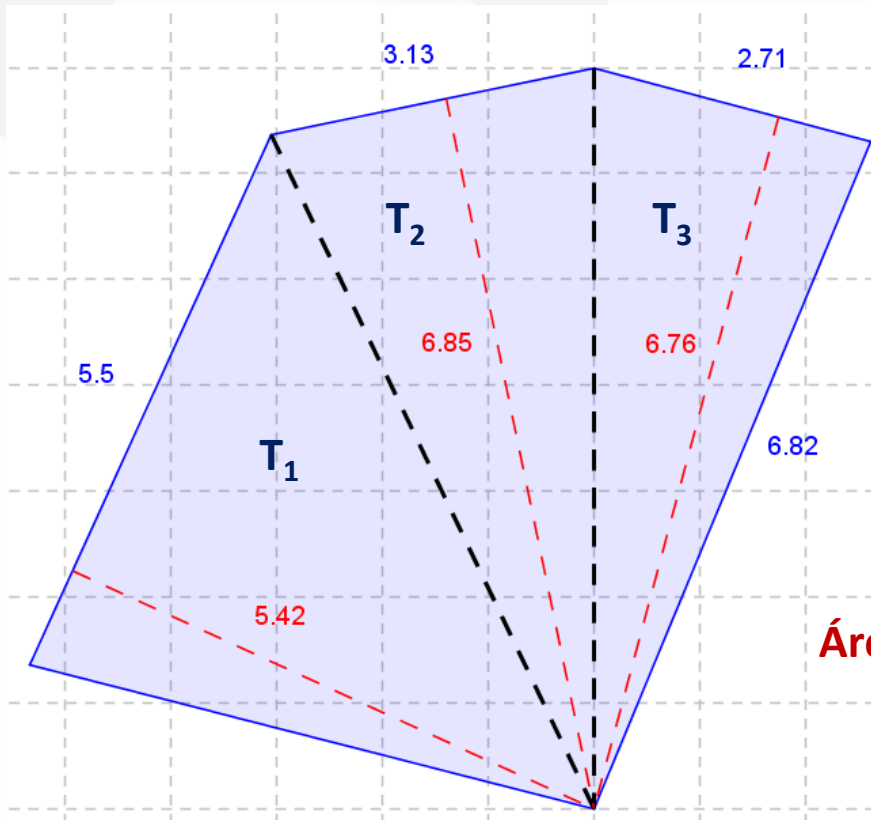
Área de un polígono no regular

Para calcular el área de un polígono regular se puede utilizar el siguiente método:

1. Dividimos el polígono en triángulos.
2. Calculamos la base y altura de cada uno de ellos.
3. Calculamos el área de cada triángulo.
4. El área del polígono original es la suma de las anteriores áreas.

Ejemplo

Este pentágono irregular ha sido dividido en tres triángulos utilizando las diagonales del mismo.



$$T_1 \\ \text{Área} = \frac{5,5 \times 5,42}{2} = 14,905 \text{ cm}^2$$

$$T_2 \\ \text{Área} = \frac{3,13 \times 6,85}{2} = 10,72 \text{ cm}^2$$

$$T_3 \\ \text{Área} = \frac{2,71 \times 6,76}{2} = 9,15 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área total} = 14,905 + 10,72 + 9,15 = 34,775 \text{ cm}^2$$

Área del círculo

Si en una circunferencia calculamos el área de un polígono regular inscrito que tenga cada vez más lados, nos acercamos al cálculo del área del círculo.

$$A_{\text{Círculo}} = \pi \cdot r^2$$

