Aplicaciones de la derivada

1. Calcula la derivada de la siguiente función, en el punto que se indica:
   a. $f(x) = (x^2+9)^3; f'(4)$
   b. $f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2};\ f'(2)$
   c. $f(x) = e^{1-x} + \ln(x+2)\,; f'(1)$
2. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la siguiente función, en el punto que se indica:
   a. $f(x) = \frac{2}{x}; x = 1$
   b. $f(x) = \frac{x}{x-2}; x = 3$
   c. $f(x) = \frac{4x-4}{x+4}; x = 0$
   d. $f(x) = 1 + \ln(2x-2); x = 1$
3. Dada la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$, prueba que la recta y=-x es tangente a la curva y=f(x) en algún punto.
4. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = -x^2 + c$
   a. Calcula a, b y c sabiendo que ambas funciones se cortan en los puntos (-2,-3) y (1,0).
   b. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de g(x) en el punto (-2,-3).
   c. Para los valores a, b y c hallados, representar gráficamente ambas funciones.
5. Sea la función $f(x) = x^2 + ax + b$. Calcula a y b para que su gráfica pase por el punto (0,-5) y que en este punto la recta tangente sea paralela a la recta y = -4x.
6. Halla los intervalos de monotonía y los extremos relativos de la función:
   a. $f(x) = x^2 - 2x + 2$
   b. $f(x) = x^3 - 3\mathrm{x}^2 + 7$
   c. $f(x) = 2 - x^3$
   d. $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$
   e. $f(x) = \frac{2+3x}{1-2x}$
7. Se considera la función $f(x) = x^3 - 3x - 2$. Se pide:
   a. Pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abcisa $x = -\frac{1}{2}$

b. Intervalos donde la función sea creciente y donde sea decreciente

c. Los valores de x done la función alcanza los máximos y mínimos relativos.

8. Se considera la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$. Se pide:

   a. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abcisa x=2.

   b. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

   c. Determina los valores de x donde la función alcanza sus máximos y mínimos relativos y los valores que toma en dichos puntos.

9. Se considera la función $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$. Se pide:

   a. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento

   b. Las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos

   c. El valor de x para el que es máxima la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f.

10. Calcula ***a*** para que el valor mínimo de la función Se considera la función $f(x) = x^2 + 2x + a$ sea igual a 8.

11. Determina donde se alcanza el mínimo de la función Se considera la función $f(x) = 3x^2 - 6x + a$. Calcula el valor de ***a*** para que el valor mínimo de la función sea 5.

12. Dada la función Se considera la función $f(x) = ax^2 - bx + 4$. Calcula los valores de ***a*** y ***b*** para que *f* tenga un extremo relativo en el punto (1,10).

13. Calcula ***b*** y ***c*** de forma que la curva y= $x^2 + bx + c$ pase por el punto (-2,1) y presente un mínimo en x=-3.

14. Dada la función $f(x) = a(x-1)^2 + bx$ calcula ***a*** y ***b*** para que la gráfica de esta función pase por el punto (1,2) y tenga un extremo relativo en el punto de abcisa x=2.

15. Se considera la función $f(x) = ax^4 - \frac{9x^2}{2} + b$

    a. Calcula el valor de los parámetros a y b para que f(x) tenga un mínimo en el punto (3,-8).

    b. Para a=4 y b=0 calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x).

16. Dada la función $f(x) = ax^3 + bx + 11$, donde a y b son parámetros reales, determina el valor de los parámetros a y b para que f(x) tenga un extremo relativo en el punto (2,5). ¿Es máximo o mínimo?

17. Halla los valores de a y b para que la función $f(x) = ax - \frac{b}{x}$ tenga un extremo relativo en el punto (1,2).

18. Para cada valor de a se considera la función $f(x) = 2x + ax^2 - 4\ln(x)$.

    a. Calcula el valor de ***a***, sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa ***x = 1***. Clasifica el extremo.

    b. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento para ***a=3***.

19. La gráfica de la derivada de una función ***f*** es la recta que pasa por los puntos (0,-3) y (4,0). Estudia la monotonía de la función ***f***.

20. Calcula los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión, si existen, de la función:

    a. $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$

    b. $f(x) = x^3 - 2$

    c. $f(x) = \frac{1-x}{2+x}$

    d. $f(x) = 2xe^x$

21. Se considera la función real de variable real $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ siendo *a* y *b* valores reales.

    a. ¿Qué valores deben tomar a y b para que f tenga un máximo relativo en el punto P(1,4)

    b. Para a = -2 y b = -8, determina los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas y calcula los puntos de inflexión de dicha gráfica.

22. Sea la función $f(x) = x^3 - 6x^2$

    a. Determina sus puntos de corte con los ejes

    b. Calcula sus extremos relativos y su punto de inflexión

    c. Representa gráficamente la función.

23. Dada la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

    a. Determina sus máximos y mínimos relativos

    b. Calcula sus puntos de inflexión

    c. Representa gráficamente la función

24. Se considera la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

    a. Determina los extremos relativos de f

b. Estudia la monotonía y la curvatura

c. Representa gráficamente la función f

25. Se considera la función $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

a. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f

b. Determina los intervalos de concavidad y convexidad de f. ¿Existen puntos de inflexión? Razona la respuesta

c. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en x=0.

26. Sea la función f definida por $f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$

a. Determina los puntos de corte con los ejes y sus asíntotas

b. Estudia su curvatura. Representa la función

27. La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tiene un extremo relativo en x=2 y un punto de inflexión en x=3. Calcula los coeficientes a y b y determinar si el extremo es un máximo o un mínimo.

28. Sea la función $f(x) = ax^3 + \mathrm{b}x^2 + cx$

a. Calcula el valor de los coeficientes a, b y c, si se sabe que el punto (0,0) su gráfica posee un extremo relativo y que el punto (2,-16) es un punto de inflexión.

b. Para a=1, b=1 y c=0, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa x=-2.

29. Cierta empresa de material fotográfico oferta una máquina capaz de revelar y pasar a papel 15,5 fotografías por minuto. Sin embargo, sus cualidades se van deteriorando con el tiempo de forma que el número de fotografías por minuto será función de la antigüedad de la máquina de acuerdo a la siguiente expresión (F(x) representa el número de fotografías por minuto cuando la máquina tiene x años):

$$f(x) = \begin{cases} 15{,}5 - 1{,}1x & si \quad 0 \leq x \leq 5 \\ \dfrac{5x+45}{x+2} & si \quad x > 5 \end{cases}$$

a. Estudia la continuidad de la función F

b. Comprueba que el número de fotografías por minuto decrece con la antigüedad de la máquina. Justifica que si tiene más de 5 años revelará menos de 10 fotografías por minuto.

c. Justifica que por muy vieja que sea la máquina no revelará menos de 5 fotografías por minuto.

30. Se ha investigado el tiempo (T, en minutos) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento de los deportistas (x, en días), obteniéndose que:

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{300}{x+30} \; si\ 0 \le x \le 30 \\ \dfrac{1125}{(x-5)(x-15)} + 2 \; si\ x > 30 \end{cases}$$

   a. Justifica que la función T es continua en todo su dominio

   b. ¿Se puede afirmar que cuanto más entrene un deportista menor será el tiempo en realizar la prueba?¿Algún deportista tardará más de 10 minutos en finalizar la prueba?+50

   c. Por mucho que entrene un deportista, ¿Será capaz de hacer la prueba en menos de un minuto?¿y en menos de 2?

31. El número total de bacterias (en miles) presentes en un cultivo después de t horas viene dado por $N(t) = 2t(t-10)^2 + 50$.

   a. Calcula la función derivada N'(t)

   b. Durante las 10 primeras horas, ¿en qué instante se alcanzan la población máxima y mínima?

32. El estudio de rentabilidad de una empresa revela que una inversión de x millones de euros produce una ganancia de f(x) millones de euros, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{50} + \dfrac{8x}{25} - \dfrac{8}{5} \; si\ 0 \le x \le 5 \\ \dfrac{5}{2x} \; si\ x > 5 \end{cases}$$

   a. Representar la función f(x)

   b. Halla la inversión que produce máxima ganancia

   c. Halla el valor de la inversión que produce ganancia nula

   d. Razona lo que ocurre con la rentabilidad si la inversión se incrementa indefinida

33. El consumo de luz (en euros) se una vivienda, en función del tiempo transcurrido, nos viene dado por la expresión:

$$f(x) = \frac{1}{5}t^2 + 2t + 10 \;\; si\ 0 \le t \le 12$$

   a. ¿En qué periodo de tiempo aumenta el consumo?¿En cuál disminuye?. Representa gráficamente la función.

   b. ¿En qué instante se produce el consumo máximo y mínimo?

34. El beneficio obtenido por una empresa, en miles de euros, viene dado por la función:

$$f(x)=\begin{cases}-5x^2+40x-60 & si\ 0\leq x\leq 6\\ \dfrac{5x}{2}-15 & si\ 6<x\leq 10\end{cases}$$

a. Representa la función f

b. Calcula el gasto en publicidad a partir del cual la empresa no tiene pérdidas

c. ¿Para qué gastos en publicidad se producen beneficios nulos?

d. Calcula el gasto en publicidad que produce máximo beneficio. ¿Cuál es ese beneficio máximo?

35. El rendimiento (medido de 0 a 10) de cierto producto en función del tiempo de uso (x, en años) viene dado por la siguiente expresión:

$$f(x)=8{,}5+\frac{3X}{1+x^2},\qquad x>0$$

a. ¿Hay intervalos de tiempo en los que el rendimiento crece? ¿y en que decrece? ¿cuáles son?

b. ¿En qué punto se alcanza el rendimiento máximo? ¿cuánto vale?

c. Por mucho que pase el tiempo ¿puede llegar a ser el rendimiento inferior al que el producto tenía cuando era nuevo?

36. En una empresa el coste C(x) de un artículo se calcula a partir de la cantidad x de producto que se pide cada vez que una empresa se queda sin él. Dicho coste viene expresado por la función:

$$C(x)=\frac{200}{x}+\frac{x}{2}+400$$

¿Cuál es la cantidad del producto x que minimiza el coste para la empresa?

37. El beneficio (B) mensual, en miles de euros, de una fábrica de coches que viene dado en función del número de coches (x) fabricados en un mes por la expresión:

$$B(x)=1{,}2x-0{,}001x^3$$

a. ¿Cuántos euros de beneficio mensual obtiene si fabrica 10 coches en ese mes?

b. ¿Cuántos coches tiene que fabricar en un mes para que el beneficio de ese mes sea máximo?

c. ¿Cuál es ese beneficio máximo?

38. Unos grandes almacenes abren a las 10:00 y cierran a las 22:00 horas. Se ha comprobado que el número de visitantes puede representarse, en función de la hora del día, como: $N(t) = t^2 + 36t + 260, con\ 10 \leq t \leq 22$:

    a. ¿Cuántos clientes han pasado por los almacenes a las 12 de la mañana?

    b. ¿A qué hora hay la máxima afluencia de clientes?

    c. ¿Cuál es el máximo número de clientes que se registraron?

    d. ¿Cuántos clientes quedan a la hora de cerrar?

39. Un cohete se desplaza según la función $D(t) = 100t + 2000t^2$, en el que D es la distancia recorrida en kilómetros y t el tiempo en horas:

    a. ¿A qué distancia del punto de salida estará cuando haya transcurrido una hora? ¿y cuando pasen 3 horas?

    b. Sabiendo que la función velocidad se obtiene derivando la función distancia, ¿cuál es la expresión de la función velocidad?

    c. ¿Qué velocidad ha alcanzado cuando han pasado 3 horas?

40. La producción (P) en kilos de una cierta hortaliza en un invernadero depende de la temperatura (t) de éste en grados centígrados y viene dada por la expresión $P(t) = (t+1)^2(32-t)$.

    a. ¿Qué producción se obtiene si la temperatura es de 18 grados?

    b. ¿A qué temperatura se produce la máxima producción?

    c. ¿Cuál es esa máxima producción?

41. Tras la aparición de una enfermedad infecciosa, el número de afectados viene dado por la función $P(t) = 48t^2 - 2t^3$, siendo t el número de días desde que se detectó el primer caso.

    a. ¿Cuántos días transcurrirán hasta que la enfermedad deje de propagarse?

    b. ¿Cuándo aumenta el número de personas afectadas? ¿Cuándo disminuye?

    c. ¿Cuándo se detecta el máximo número de personas afectadas?¿Cuántas son las personas afectadas en ese momento?.

42. ¿En qué punto de la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 + 2x$, la recta tangente es paralela a $y = 3x - 5$.

43. Dada la función definida por $f(x) = \frac{3x^2}{x^2-4}$:

  a. Calcula sus asíntotas

  b. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en *x=0*.

44. Sea la función $f(x) = -x^3 + 3x$

  a. Determina los puntos de corte con los ejes de coordenadas

  b. Represéntala gráficamente

  c. Obtén las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de la función que tienen pendiente cero e indica cuáles son los puntos de tangencia.

45. Calcula los intervalos de monotonía y los extremos relativos de la función:

  a. $f(x) = x^2 - 3x$

  b. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

  c. $f(x) = 3x^2 e^{-4x}$

  d. $f(x) = \frac{1-2x}{x+2}$

  e. $f(x) = 3 - x - \frac{2}{x}$

46. Sea la función definida por $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1$

  a. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = -1.

  b. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento

  c. Calcula los valores donde alcanza los máximos y mínimos relativos

  d. Valor máximo que toma la función en el intervalo [-1,2].

47. Sea la función $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

  a. Indica el dominio de definición de f, sus puntos de corte con los ejes, sus máximos y mínimos, si existen y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

  b. Obtén las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales de f, si las tiene, y representa la gráfica de la función.

48. Halla los valores de *a* y *b* para que la recta tangente a la gráfica de la función:

$f(x) = ax^2 - b$

En el punto (1 , 5) en común con la recta *y=3x+2*

49. Determina los valores de *a* y *b* en la ecuación de la parábola

$f(x) = ax^2 + bx + 2$, sabiendo que tiene en común el punto (1,-2) con la recta *y=-2x* y que dicha recta es tangente a la parábola en ese punto.

50. Dada la función definida por: $f(x) = \frac{3x^2}{x^2-4}$:

a. Calcula sus asíntotas

b. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en x=0.

51. Calcula los intervalos de monotonía y los extremos relativos de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^3 - 3x$

b. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

c. $f(x) = 3x^2e^{-4x}$

d. $f(x) = \frac{1-2x}{x+2}$

e. $f(x) = 3 - x - \frac{2}{x}$

52. Calcula el valor de *a* para que el mínimo de la función

$g(x) = 2x^2 - 8x + a$ sea 3.

53. Determina el valor de *a* en la función $f(x) = -5ax^2 + 700x + 1440$, sabiendo que tiene un extremo relativo para *x=10*.

54. Determina el valor de *a* y *b* en la ecuación de la parábola

$f(x) = ax^2 + bx + 5$ sabiendo que tiene un máximo en el punto (2,9).

55. Determina el valor de *b* y *c* para que la ecuación de la parábola

$f(x) = x^2 + bx + c$ sabiendo que tiene un extremo relativo en el punto (-1,-4). ¿Qué tipo de extremo es?.

56. Sea la función $f(x) = \frac{a}{x} + bx^2$. Calcula los valores de los parámetros *a* y *b* para que f tenga un extremo relativo en (1,3).

57. Considera la función real de variable real $f(x) = \frac{2x+m}{x}$, donde m es un parámetro real.

    a. Calcula el valor de *m* para que la tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa *x=-3* sea paralela a la recta *x-3y+1=0*

    b. Determina el dominio de la función y los intervalos en los que es creciente o decreciente.

    c. Determina las asíntotas

    d. Dibuja un esbozo de la gráfica de la función.

58. Calcula *a* y *b* de manera que $f(x) = alnx + bx^2 + x$ tenga extremos relativos en los puntos de abscisas x=1, x=2, y determina en cada caso si se trata de un máximo o de un mínimo.

59. De una función *f* se sabe que la gráfica de la función derivada *f'*, es la recta de ecuación *y=-2x+4*. Estudia razonadamente la monotonía de la función *f*, a la vista de la gráfica de la derivada.

60. Calcula los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión, si existen, de las siguientes funciones:

    a. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

    b. $f(x) = 1 - 2x^3$

    c. $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

    d. $f(x) = 2x^2 + lnx$

61. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 - 4x + 2$ en su punto de inflexión.

62. Sea la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$

    a. Determina la monotonía y los extremos relativos de f.

    b. Calcula su punto de inflexión.

    c. Teniendo en cuenta los apartados anteriores, represéntala gráficamente.