# OPERACIONES CON LOGARITMOS

Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

# Definición de logaritmo

El logaritmo en base ***b*** (*b > 0*) de un número ***N*** es el exponente ***X*** al que hay que elevar la base para obtener dicho número

$$log_b N = x \Leftrightarrow b^x = N$$

Logaritmo en base "b" del número N

Base del logaritmo

# Primeros ejemplos: aplicación de la definición

$$log_3 9 = 2 \textbf{ pues } 3^2 = 9$$

$$log_5 125 = 3 \textbf{ pues } 5^3 = 125$$

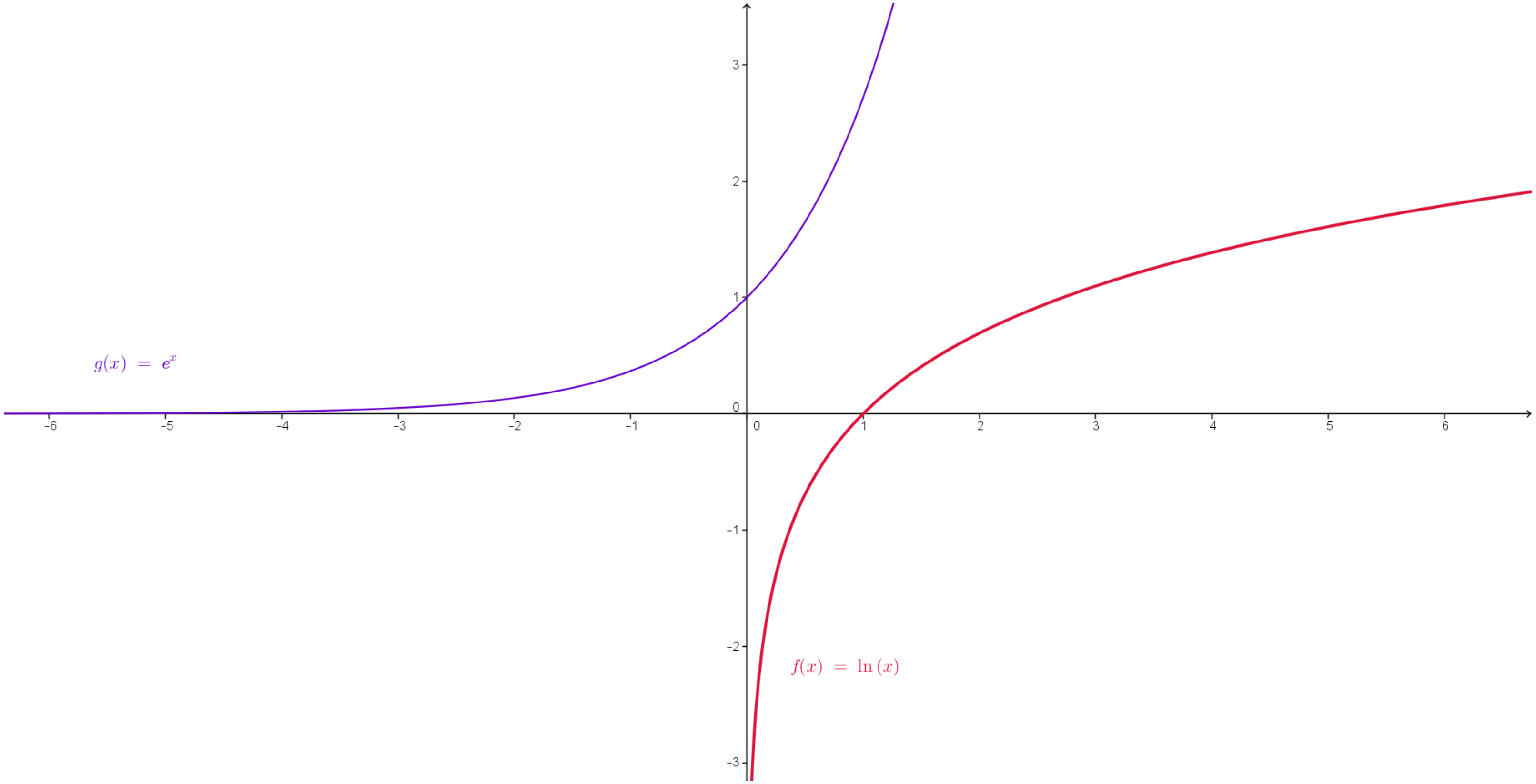
$$log_7 7 = 1 \textbf{ pues } 7^1 = 7$$

$$log_2 1 = 0 \textbf{ pues } 2^0 = 1$$

$$log_2 \frac{1}{8} = -3 \textbf{ pues } 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

# Logaritmos y potencias

Cómo hemos podido comprobar, los logaritmos y las potencias tienen relación, de hecho la función logarítmica y la función exponencial son inversa una de la otra.



# Algunas consideraciones importantes

- El logaritmo de un número menor o igual a cero no existe.
- El logaritmo de 1 siempre es 0, independientemente de la base
- Si no se indica la base de un logaritmo, se trata de un logaritmo decimal (base 10)
- El logaritmo neperiano tiene por base el número real **e**. El logaritmo neperiano se indicará cómo **ln**.

# Propiedades de los logaritmos

$$log_b 1 = 0$$

$$log_b(x \cdot y) = log_b x + log_b y$$

$$log_b\left(\frac{x}{y}\right) = log_b x - log_b y$$

$$log_b(x^n) = n \cdot log_b x$$

$$log_b(x) = \frac{log_a x}{log_a b}$$

Cambio de base de un logaritmo

# Ejemplos de aplicación de las propiedades I

$$log_6 \frac{1}{36} = log_6 1 - log_6 36 = 0 - log_6 6^2 = -2 log_6 6 = -2$$

**Logaritmo de una potencia**

**Logaritmo de un cociente**

$$log_4 \frac{1}{\sqrt[5]{64}} = log_4 1 - log_4 \sqrt[5]{4^4} = 0 - log_4 4^{\frac{4}{5}} = -\frac{4}{5} log_4 4 = -\frac{4}{5}$$

**Logaritmo de una potencia**

**Interpretamos una raíz como potencia**

**Logaritmo de un cociente**

# Ejemplos de aplicación de las propiedades II

$$log\sqrt{20} + log\sqrt{5} = log\left(\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}\right) = log\sqrt{100} = log10 = 1$$

Suma de logaritmos

Logaritmo de la base

$$ln\frac{\sqrt{e}}{e} = ln\sqrt{e} - lne = lne^{\frac{1}{2}} - lne = \frac{1}{2}lne - lne = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Logaritmo de un cociente

Logaritmo de la base

Logaritmo de una potencia

# Expresión de un logaritmo en función del valor de un logaritmo conocido

Supongamos que 0,301 es el valor aproximado de log2 y queremos calcular log(16/5).

La estrategia consiste en manipular el número de tal forma que lo podamos expresar como producto, división o potencia del logaritmo conocido y de potencias de la base.

$$log\frac{16}{5} = log\frac{32}{10} = log32 - log10 = log2^5 - 1 = 5log2 - 1 = 5 \cdot 0{,}301 - 1 = -0{,}505$$

**Sustituimos el valor, obteniendo el valor aproximado**

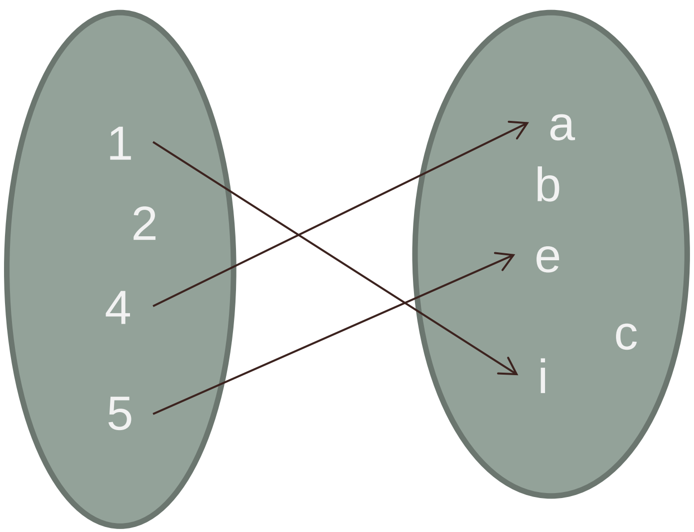
**Aplicamos la propiedad una potencia**

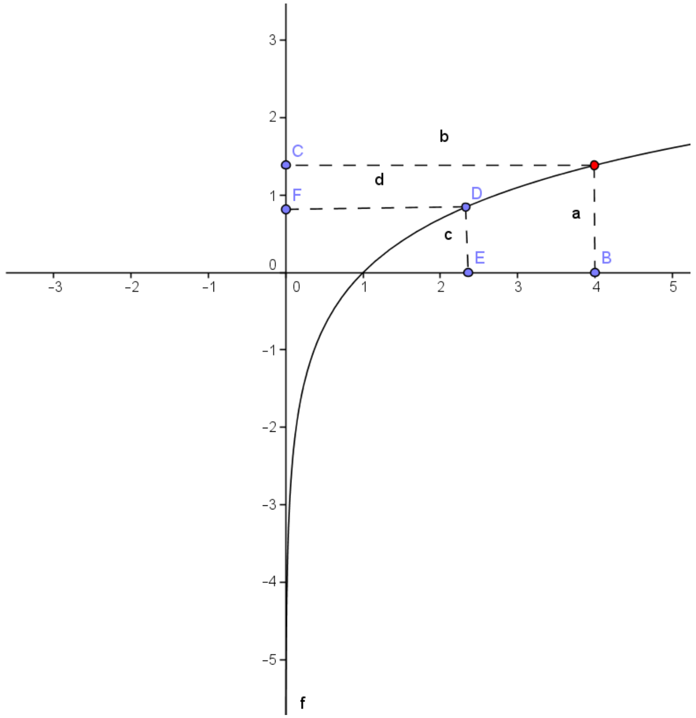
**Aplicamos la propiedad del logaritmo de un cociente**

**Expresamos la fracción como potencias de 2 y de 10 (el logaritmo conocido y la base)**

# La función logaritmo es inyectiva

- Se dice que una función es **inyectiva** cuando a distintos elementos del conjunto origen le corresponden distintas imáges.
- Esta propiedad de la función permite reducir en un gran número de ocasiones el cálculo con logaritmos en un cálculo sin logaritmos.



# Aplicación

Ante problemas similares al siguiente podemos aprovechar la anterior propiedad. Hemos de procurar que en ambos miembros de la igualdad aparezca la función logaritmo:

Enunciado:

Obtener x en la expresión $logx = 2(loga + 3logb) - \frac{1}{2}(2logc + logd)$

Solución:

$$2(loga + 3logb) - \frac{1}{2}(2logc + logd) = 2log(a \cdot b^3) - \frac{1}{2}log(c^2 \cdot d)$$

$$= log(a \cdot b^3)^2 - log(c^2 \cdot d)^{\frac{1}{2}} = log\left(\frac{(a \cdot b^3)^2}{(c^2 \cdot d)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

Por tanto x = $\left(\frac{(a \cdot b^3)^2}{(c^2 \cdot d)^{\frac{1}{2}}}\right)$ al ser $\log x = \log\left(\frac{(a \cdot b^3)^2}{(c^2 \cdot d)^{\frac{1}{2}}}\right)$

# Ejemplos 1

Calcula $log_{\frac{1}{100}}100 = x$ utilizando la definición de logaritmo

$$\left(\frac{1}{100}\right)^x = 100 \Leftrightarrow 10^{-2x} = 10^2 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = -1$$

Calcula $log_{0,25}x = 2$ utilizando la definición de logaritmo

$$(0,25)^x = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = 2 \Leftrightarrow 2^{-2x} = 2 \Leftrightarrow -2x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Calcula $log_x 0,01 = 2$ utilizando la definición de logaritmo

$$(x)^2 = 0,01 \Leftrightarrow x^2 = 10^{-2} \Leftrightarrow x^2 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{10}$$

# Ejemplos 2

Calcula $log_3\sqrt{\frac{243}{3}}$ utilizando las propiedades de los logaritmos

$$log_3\sqrt{\frac{243}{3}} = log_3\left(\frac{243}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}log_3\frac{243}{3} = \frac{1}{2}(log_3 243 - log_3 3) = \frac{1}{2}(log_3 3^5 - log_3 3)\frac{243}{3} = \frac{1}{2}(5log_3 3 - log_3 3) = \frac{4}{2} = 2$$

Calcula $\log\sqrt{20} + log\sqrt{5}$ utilizando las propiedades de los logaritmos

$$log\sqrt{20} + log\sqrt{5} = log20^{\frac{1}{2}} + log5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}log20 + \frac{1}{2}log5 = \frac{1}{2}(log20 + log5) = \frac{1}{2}log100 = \frac{2}{2} = 1$$

$\log x = 1 + 2\log a$

# Ejemplos 3

Expresar en función de ***log2*** y ***log3*** $log162$ $log162 = log2 \cdot 3^4 = log2 + 4\log 3$

Expresar en función de ***ln2*** $ln\frac{4}{\sqrt{e}} = ln4 - ln\sqrt{e} = ln2^2 - lne^{1/2} = 2ln2 - \frac{1}{2}lne = 2ln2 - \frac{1}{2}$

Justificar la siguiente igualdad $\frac{log6+log2}{log9+log8-log6} = 1$

$$\frac{log6 + log2}{log9 + log8 - log6} = \frac{log(6 \cdot 2)}{log(9 \cdot 8) - log6} = \frac{log12}{log\frac{72}{6}} = \frac{log12}{log12} = 1$$

Obtened x en la siguiente igualdad

$$\log \mathrm{x} = 1 + \log \mathrm{a} \Leftrightarrow \log x = log10 + \log a \Leftrightarrow \log x = log10a \Leftrightarrow x = 10a$$

# ECUACIONES LOGARÍTMICAS

# Ecuación logarítmica: método de resolución

Cuando en una ecuación aparecen uno o varios logaritmos, se denomina ecuación logarítmica.

El procedimiento general para poder resolver este tipo de ecuaciones consiste:

- Aplicar las propiedades de los logaritmos y expresar cada uno de los miembros de la ecuación como un único logaritmo
- Posteriormente, cómo la función logaritmo es inyectiva, será posible obtener una ecuación que no tenga logaritmos.
- Por ultimo, habrá que comprobar que los resultados de esta ecuación nos proporcionan valores válidos para la ecuación original.

# Ejemplo 1

Resolved la siguiente ecuación logarítmica $2logx - log(x+6) = 3log2$

**Aplicamos la propiedad de la potencia**

$$2logx - log(x+6) = 3log2$$
$$\log x^2 - \log(x+6) = \log 2^3$$
$$\log \frac{x^2}{x+6} = \log 2^3$$

**Aplicamos la propiedad de la diferencia de logaritmos**

**Los miembros de la ecuación son logaritmos, por tanto pasamos a resolver una ecuación de segundo grado**

$$\frac{x^2}{x+6} = 2^3\ ;\ x^2 = 8(x+6)\ ;\ x^2 = 8x + 48\ ;\ \ x^2 - 8x - 48 = 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{256}}{2} = \begin{cases} x = 12 \\ x = -4 \end{cases}$$

**La solución que aceptamos es x=12, la otra solución no es válida al no existir el logaritmo de un número negativo**

# Ejemplo 2

Resolved la siguiente ecuación logarítmica $log(x^2 + 3x + 36) = 1 + log(x + 3)$

$$log(x^2 + 3x + 36) = 1 + log(x + 3)$$

$$log(x^2 + 3x + 36) = \log 10 + log(x + 3)$$

$$log(x^2 + 3x + 36) = log(10x + 30)$$

**Expresamos los términos numéricos en forma de logaritmo. Así 1 pasa a expresarse como el logaritmo de 10.**

**Los miembros de la ecuación son logaritmos, por tanto pasamos a resolver una ecuación de segundo grado**

$$x^2 + 3x + 36 = 10x + 30$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} x = 6 \\ x = 1 \end{cases}$$

**Aceptamos ambas soluciones**

# Ejemplo 3

Resolved la siguiente ecuación logarítmica $2log^2x + 7logx - 9 = 0$

$$2log^2x + 7logx - 9 = 0$$

Aplicamos el cambio de variable **t = log x** , de esta forma obtenemos una ecuación de segundo grado que resolvemos

$$2t^2 + 7t - 9 = 0$$

$$t = \frac{-7 \pm 11}{4} = \begin{cases} t = 1 \\ t = -\dfrac{9}{2} \end{cases}$$

Para cada uno de los valores obtenidos deshacemos el cambio

$$Si\ t = 1; logx = 1; x = 10$$

$$Si\ t = -\frac{9}{2}; logx = -\frac{9}{2}; x = 10^{-\frac{9}{2}}$$

# ECUACIONES EXPONENCIALES

# Ecuaciones exponenciales: método de resolución

Cuando en una ecuación aparecen uno o varias potencias en cuyo exponente aparecen incógnitas, se denomina ecuación exponencial.

El procedimiento general para poder resolver este tipo de ecuaciones consiste:

- Aplicar las propiedades de las potencias y expresar cada uno de los miembros de la ecuación como una única potencia
- Posteriormente, cómo la función exponencial es inyectiva, será posible igualar los exponentes.
- Por ultimo, habrá que comprobar que los resultados de esta ecuación nos proporcionan valores válidos para la ecuación original.
- En otras ocasiones, se habrá de realizar un cambio de variable.

# Ejemplo 1

Resolver la ecuación $2 \cdot 3^x - 3^{2x} + 3 = 0$

Realizaremos el cambio de variable $t = 3^x$ pues podemos expresar $3^{2x} = (3^x)^2 = t^2$

La ecuación original queda $2t - t^2 + 3 = 0$, una ecuación de segundo grado que resolveremos:

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{-2} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} t = 3 \\ t = -1 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio:

Si $t = 3; entonces\ 3^x = 3;\ \ por\ tanto\ x = 1$ solución de esta ecuación

Si $t = -1; entonces\ 3^x = -1$ este resultado no aporta ninguna solución pues la base es positiva.

# Ejemplo 2

Resolver la ecuación exponencial $5^{x-1} = 2 + \frac{3}{5^{x-2}}$

Realizaremos el cambio de variable $t = 5^{x-2}$ pues podemos expresar $5^{x-1} = 5 \cdot 5^{x-2} = 5t$ utilizando las propiedades de las potencias

La ecuación original queda $5t = 2 + \frac{3}{t}$ que da lugar a la ecuación de segundo grado multiplicando por *t* ambos miembros de la ecuación:

$$5t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 5 \cdot (-3)}}{10} = \frac{2 \pm 8}{10} = \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{6}{10} \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio:

Si $t = 1; entonces\ 5^{x-2} = 1;\ \ por\ tanto\ x - 2 = 0; x = 2$ solución de esta ecuación

Si $t = -\frac{6}{10}; entonces\ 5^{x-2} = -\frac{6}{10}$ este resultado no aporta ninguna solución pues la base es positiva.

# SISTEMAS DE ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

# Método de resolución

En este tipo de sistemas se aplican las ideas que se han aplicado en el método de resolución de una ecuación.

En definitiva se trata de convertir el sistema de ecuaciones en un sistema que sepamos resolver.

# Ejemplo 1

Resolver el sistema $\begin{cases} 2logx - 3logy = 7 \\ logx + logy = 1 \end{cases}$

Realizando el cambio *n= logx y m=logy, quedará el sistema lineal*

$\begin{cases} 2n - 3m = 7 \\ n + m = 1 \end{cases}$ que resolveremos por reducción sustituyendo la segunda ecuación

por el resultado de sumar la primera ecuación y la segunda multiplicada por 3:

$\begin{cases} 2n - 3m = 7 \\ 5n = 1 \end{cases}$ despejando $\begin{cases} m = -1 \\ n = 2 \end{cases}$.

Ahora deshacemos los cambio: $logx = 2\,;\, x = 100$ y $logy = -1\,;\, y = 0{,}1$

# Ejemplo 2

Resolved el sistema $\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ logx - logy = 1 \end{cases}$

Vamos a transformar la segunda ecuación, en otra equivalente, en la que no

aparezcan logaritmos utilizando las propiedades de los logaritmos:

$log\left(\frac{x}{y}\right) = log10,$ *por tanto* $\frac{x}{y} = 10.$ Por tanto se trata der resolver el sistema:
$\begin{cases} x^2 - y^2 = 11 \\ \frac{x}{y} = 10 \end{cases}$, sustituyendo en la primera ecuación el valor de x $x = 10y$, queda

$100y^2 - y^2 = 11; 99y^2 = 11;\ y^2 = \frac{1}{9}$ por tanto $\begin{cases} \boxed{y = \frac{1}{3}} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$, rechazamos el valor

negativo al no existir el logaritmo de un número negativo. El valor de x lo calculamo sustituyendo $\boxed{x = 10 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3}}$

# Ejemplo 3

Resolved el sistema $\begin{cases} 2^x + 2^y = 10 \\ 2^{x-y} = 4 \end{cases}$

Realizando el cambio $n = 2^x$ ; $m = 2^y$ *quedará el sistema* $\begin{cases} n + m = 10 \\ \dfrac{n}{m} = 4 \end{cases}$ que

resolveremos por sustitución en la primera ecuación del valor despejado en la

segunda ecuación: $n = 4m$ por tanto $5m = 10; m = 2\ y\ n = 8$

Ahora deshacemos los cambio: $8 = 2^x$ $, por\ tanto, x = 2\ \ y\ 2 = 2^y, por\ tanto\ y = 1$