APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Teoremas y su aplicación

Valor máximo y mínimo

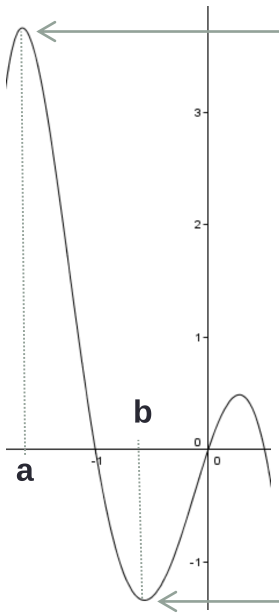
- Una de las aplicaciones mas importantes de las derivadas son los problemas de optimización.
  - ¿Cuál es la forma de determinado elemento para que el coste sea mínimo?
  - ¿Cuál es la inversión mínima que maximiza el beneficio?
- Los anteriores enunciados pueden reducirse a encontrar el máximo o mínimo de una función.

Máximo y mínimo absoluto

Definiciones: *Sea* ***c*** un valor del dominio ***D*** de la función ***f***. Entonces ***f(c)*** es:

El **máximo absoluto** de ***f*** en ***D*** si $f(c) \geq f(x)\ para\ todo\ x\ en\ D$

El **mínimo absoluto** de ***f*** en ***D*** si $f(c) \leq f(x)\ para\ todo\ x\ en\ D$



Máximo absoluto de la función en ***a***

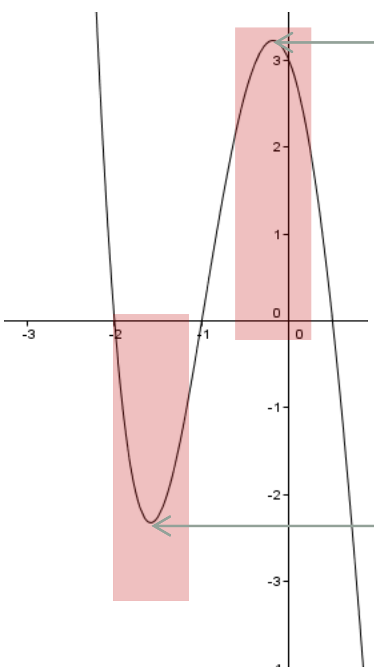
Mínimo absoluto de la función en ***b***

Máximos y mínimos locales

Definiciones: ***f(c)*** es un :

El **máximo local** de ***f*** si $f(c) \geq f(x)\ cuando\ x\ está\ cerca\ de\ c$

El **mínimo local** de ***f*** si $f(c) \leq f(x)\ cuando\ x\ está\ cerca\ de\ c$

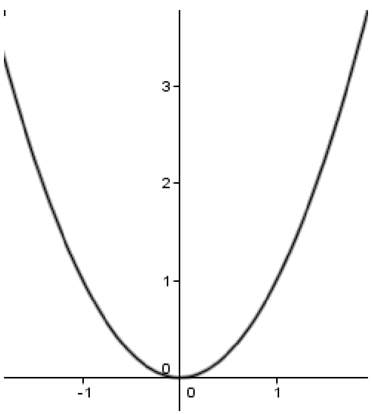


La función alcanza un máximo local

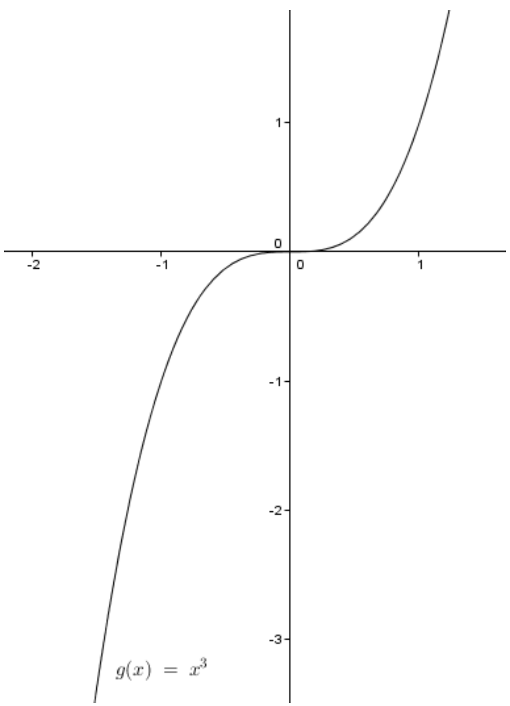
La función alcanza un mínimo local

Ejemplos:

La función $f(x) = x^2$ tiene un mínimo absoluto en *x=0*, pues para cualquier valor distinto de cero, el cuadrado de un número supera al valor 0



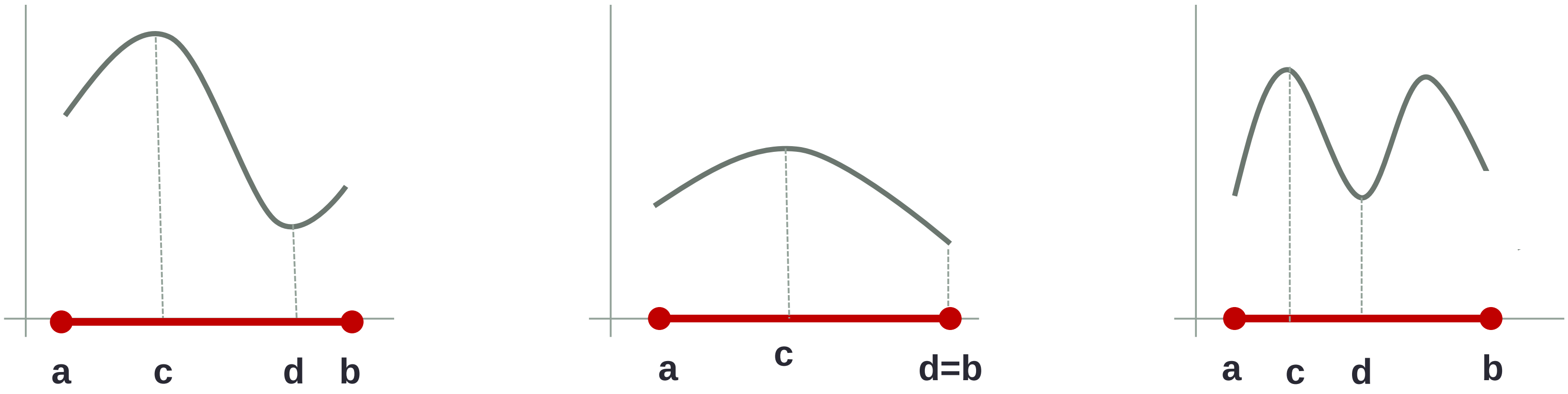
La función $f(x) = x^3$, como puede observarse en su gráfica, no tiene ni mínimo ni máximo absoluto.



Teorema del valor extremo

Si ***f*** es continua en un intervalo cerrado ***[a,b]***, entonces ***f*** alcanza un máximo absoluto en ***f(c***) y un mínimo absoluto en ***f(d***), donde ***c*** y ***d*** son valores del intervalo cerrado ***[a,b]***.

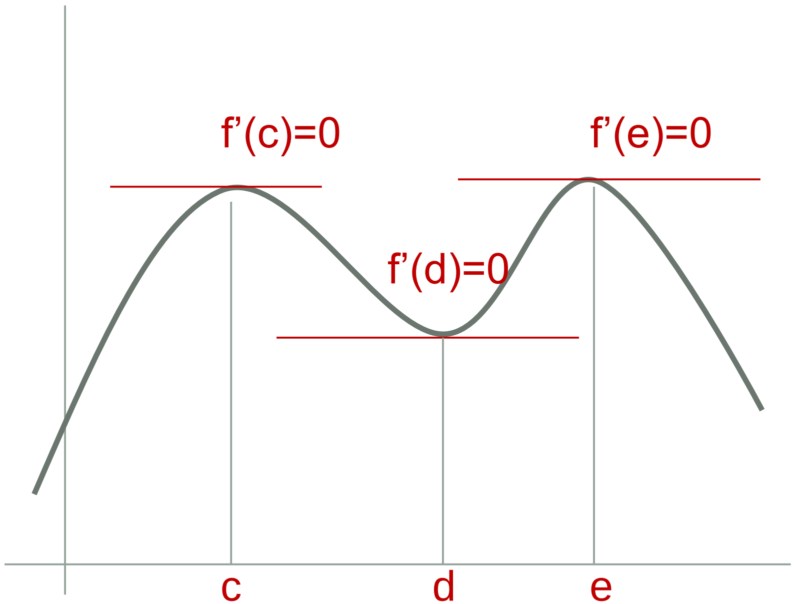
Este teorema proporciona condiciones en las que una función dispone de valores extremos.



Teorema de Fermat (análisis)

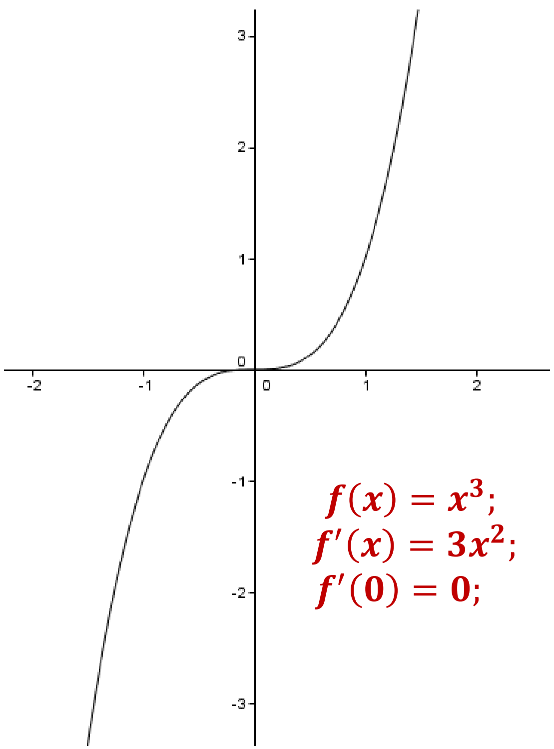
Si ***f*** tiene una mínimo o máximo local en ***c***, y si ***f'(c)*** existe, entonces ***f'(c)=0***.

Este teorema ayuda a localizar los posibles máximos y mínimos locales de una función utilizando su derivada.



Algunos comentarios

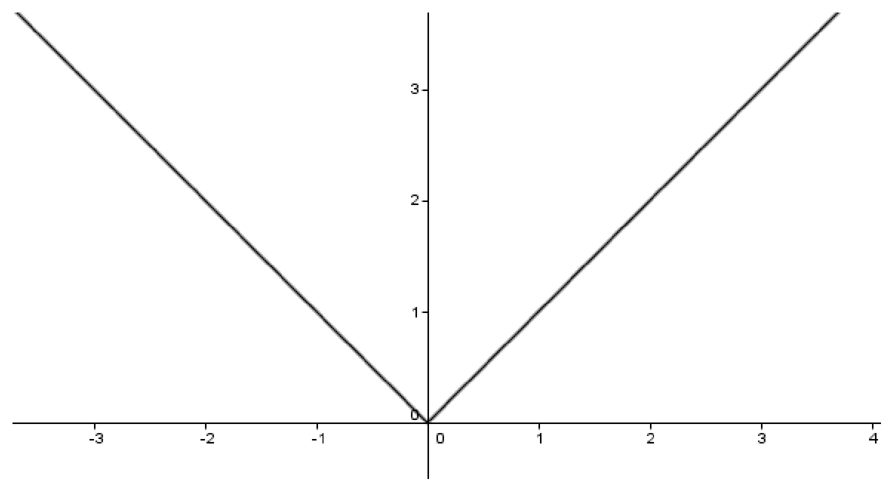
Es posible que una función verifique el teorema de Fermat y no tenga ningún extremo local.



$$f(x) = x^3;$$
$$f'(x) = 3x^2;$$
$$f'(0) = 0;$$

Es posible que una función no sea derivable y presente un valor extremo.

$$f(x) = |x|;$$
$$En\ f(0) = 0\ presenta\ un\ mínimo$$
$$f'(0)\ no\ existe$$



Puntos críticos

Un punto crítico de una función ***f*** es un número ***c*** en el dominio de ***f*** tal que o bien ***f'(c)=0***, o bien, ***f'(c)*** no existe.

Para encontrar los máximos y mínimos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado *[a,b]*:

1. **Encontrar los puntos críticos de la función en el intervalo abierto *(a,b)***
2. **Encontrar los valores de la función en los extremos del intervalo**
3. **Los valores mayores y menores de los pasos 1 y 2 son el máximo y mínimo absoluto, respectivamente**

Ejemplo I

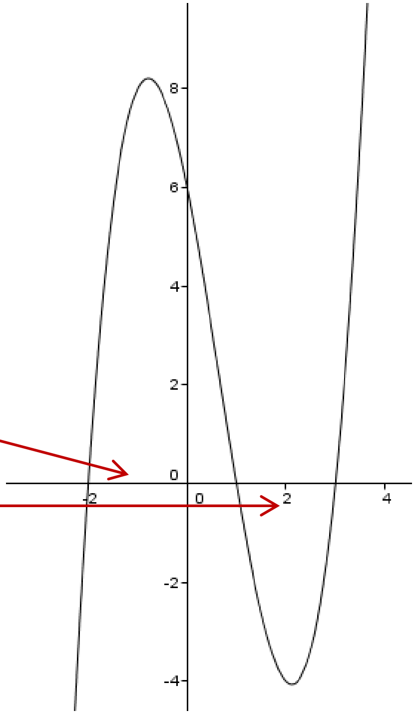
Encuentra los puntos críticos de la función $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$

Se trata de una función continua y derivable en todo su dominio, por tanto, buscamos los valores que anulan su derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 5$$

$$3x^2 - 4x - 5 = 0 \;\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16+60}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{76}}{6}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{19}}{3} \cong \begin{cases} x = 2{,}12 \\ x = -0{,}79 \end{cases}$$



En este caso los puntos críticos proporcionan un máximo y un mínimo relativo

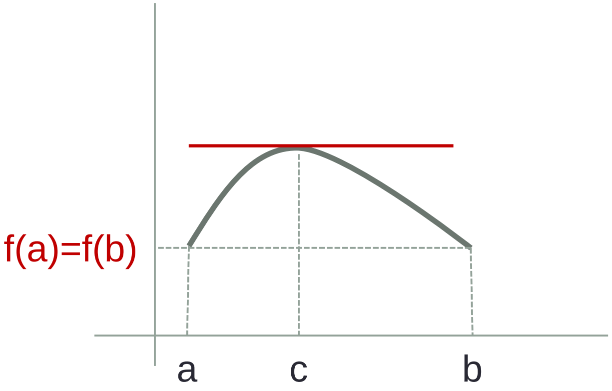
El teorema de Rolle

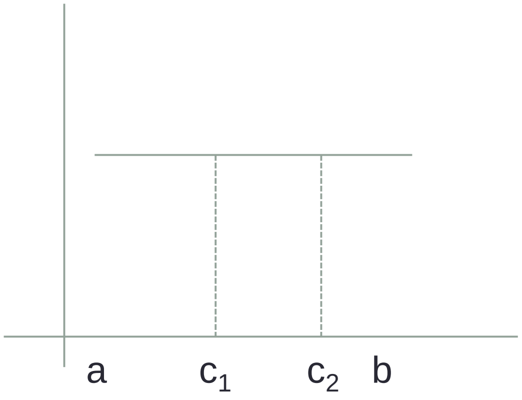
Si ***f*** una función que satisface las siguientes tres hipótesis:

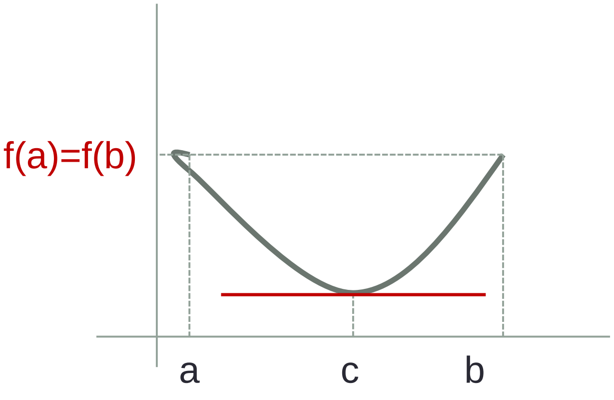
- ***f*** es continua en el intervalo cerrado ***[a,b].***
- ***f*** es derivable en el intervalo abierto ***(a,b).***
- ***f(a)=f(b)***

Entonces existe al menos un valor ***c***, perteneciente al intervalo abierto, tal que ***f'(c)=0***.

Interpretación gráfica del teorema de Rolle.







Teorema del valor medio

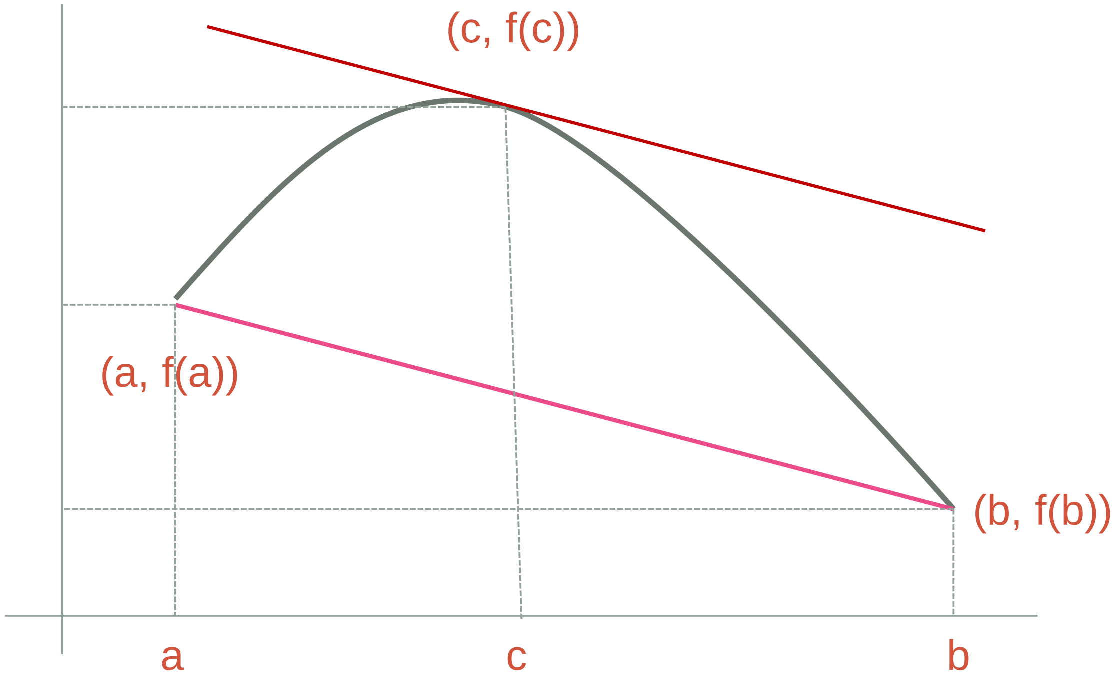
Si ***f*** una función que satisface las siguientes hipótesis:

- ***f*** es continua en el intervalo cerrado ***[a,b].***
- ***f*** es derivable en el intervalo abierto ***(a,b).***

Entonces existe al menos un valor ***c*** perteneciente a ***(a,b),***tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interpretación gráfica del teorema del valor medio.



Ejemplo (Teorema del valor medio)

Supongamos la función polinómica $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ función continua y derivable en cualquier intervalo, tomemos como extremos de dicho intervalo los valores *a = 0* **y** *b = 1.*

El teorema del valor medio implica que existe un valor *c* **en el intervalo tal que:** $f'(c) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} \Rightarrow f'(c) = \frac{0-6}{1-0} = -6$

, por tanto, buscamos un valor tal que *f'(c)=-6*

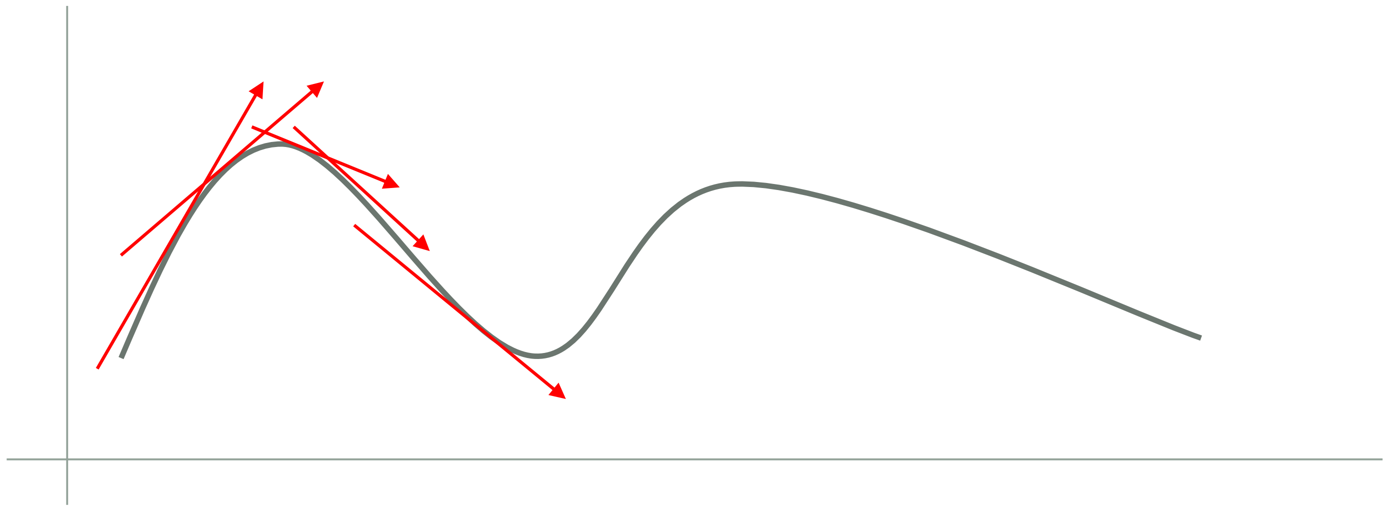
$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 5 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 5 = -6 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

Resolviendo la anterior ecuación de segundo grado, podemos obtener el valor buscado (en este caso dos): *c = 1* **y** *c = 1/3*

Crecimiento de funciones

La derivada, en cada punto de una función, representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función. Por tanto:

- ***Si f'(x) > 0 en un intervalo, entonces, f es creciente en el intervalo***
- ***Si f'(x) < 0 en un intervalo, entonces, f es decreciente en el intervalo***



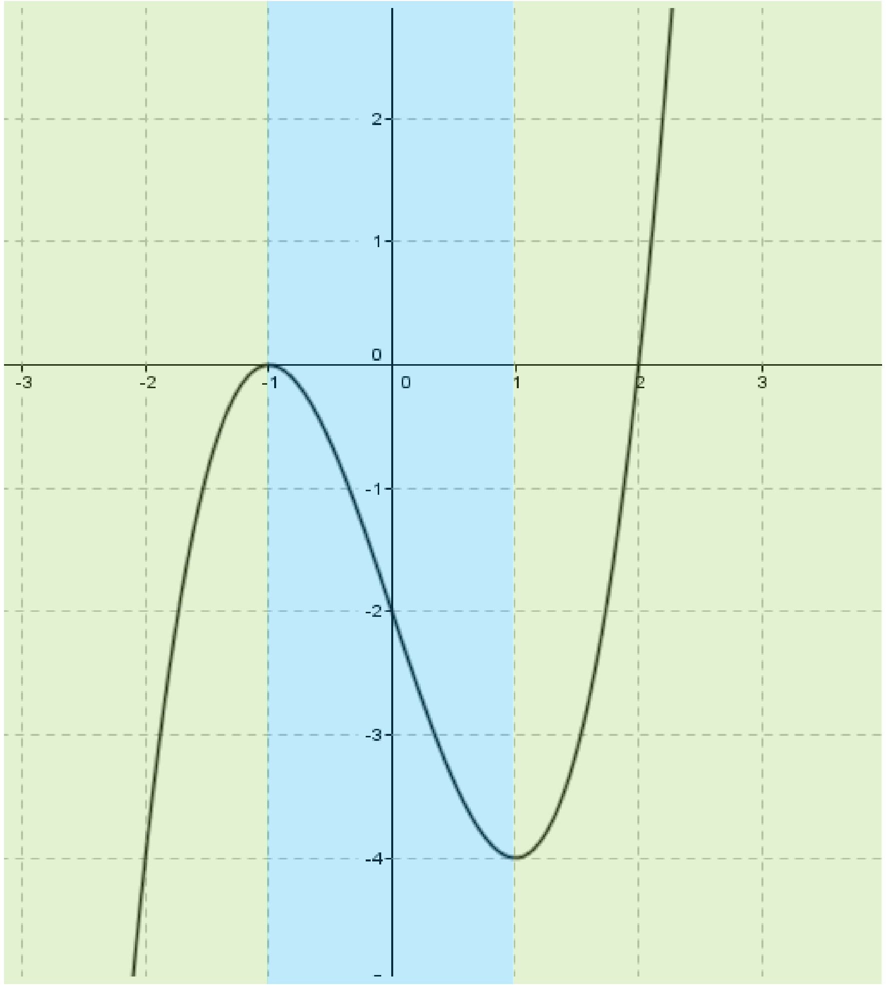
Ejemplo (intervalos de crecimiento)

Para calcular los intervalos donde crece o decrece la función polinómica (continua y derivable en $\mathbb{R}$) $f(x) = x^3 - 3x - 2$:

1. **Calculamos su derivada $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$**
2. **Hemos factorizado para calcular de forma fácil los intervalos donde la derivada es positiva o negativa.**
3. **Realizamos una tabla donde dividimos los intervalos atendiendo a los valores que hacen cero el polinomio**

Intervalo	x-1	x+1	Signo de f'	¿Crece f?
x < -1	-	-	+	f crece en el intervalo
-1 < x < 1	-	+	-	f decrece en el intervalo
x > 1	+	+	+	f crece en el intervalo

Ejemplo (intervalos de crecimiento)



Como habíamos calculado anteriormente, la gráfica confirma el estudio de la derivada.

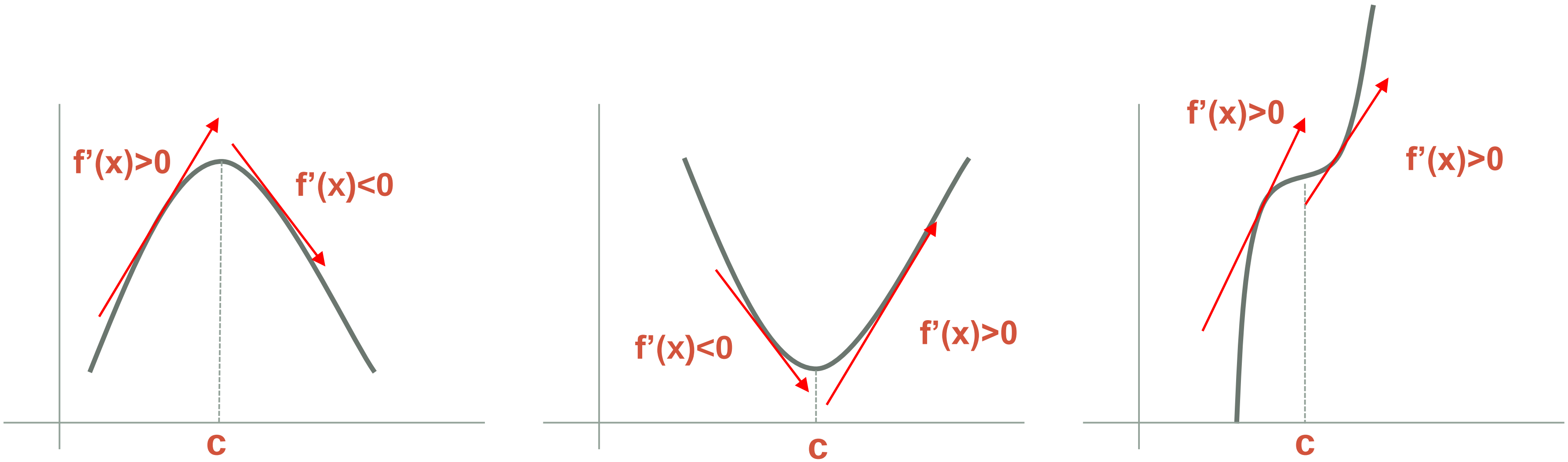
Intervalos de crecimiento

Intervalos de decrecimiento

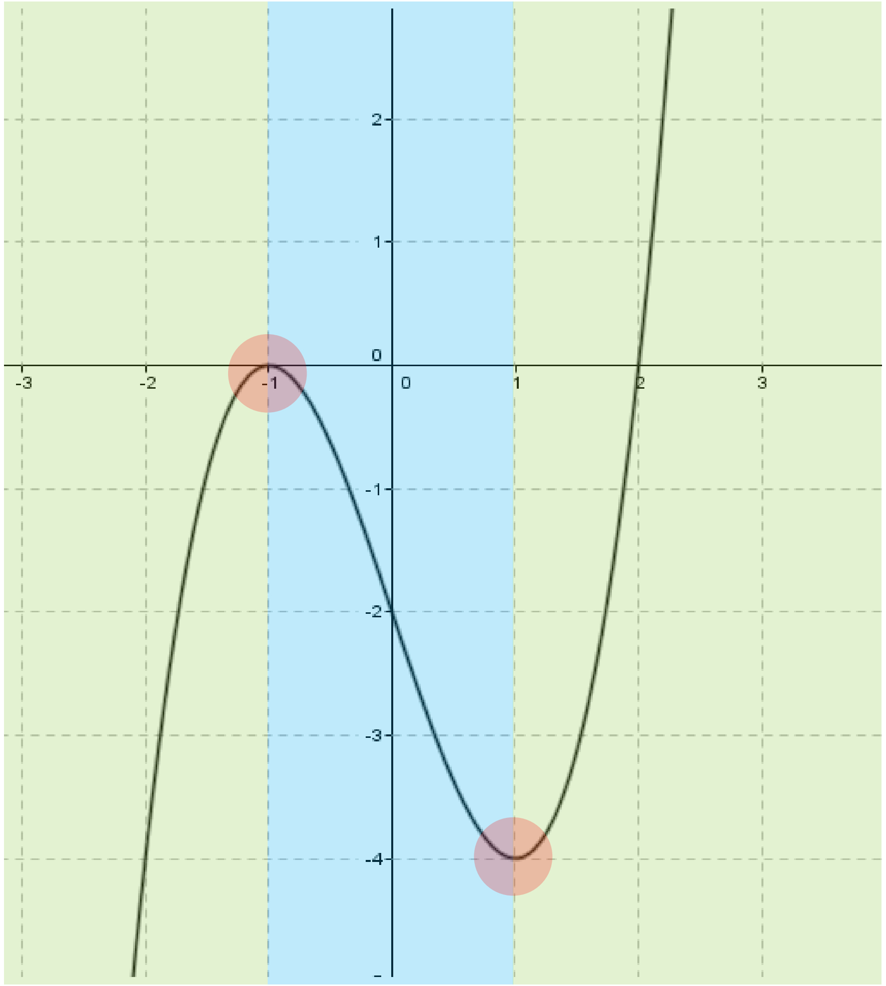
Primera derivada y extremos locales

Si ***c*** es un punto crítico de una función continua ***f*** :

- Si ***f'*** cambia de positivo a negativo en ***c***, entonces ***f*** tiene un máximo local en ***c***.
- Si ***f'*** cambia de negativo a positivo en ***c***, entonces ***f*** tiene un mínimo local en ***c***.
- Si ***f'*** no cambia de signo en ***c***, entonces ***f*** no tiene un máximo local ni un mínimo local en ***c***.



Ejemplo (extremos locales)



$$f(x) = x^3 - 3x - 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

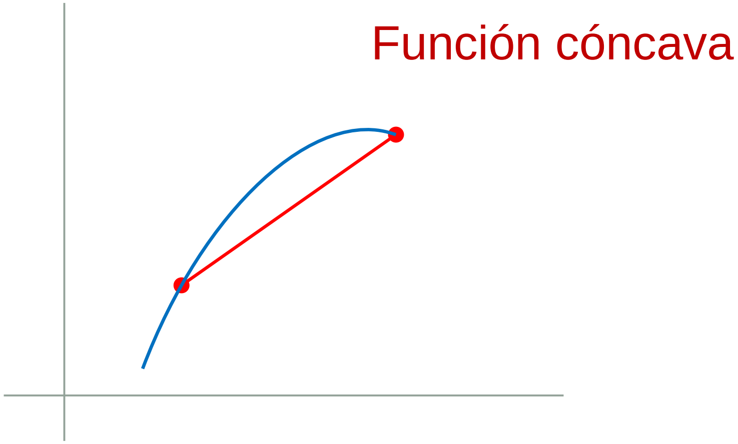
$$3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = +1 \end{cases}$$

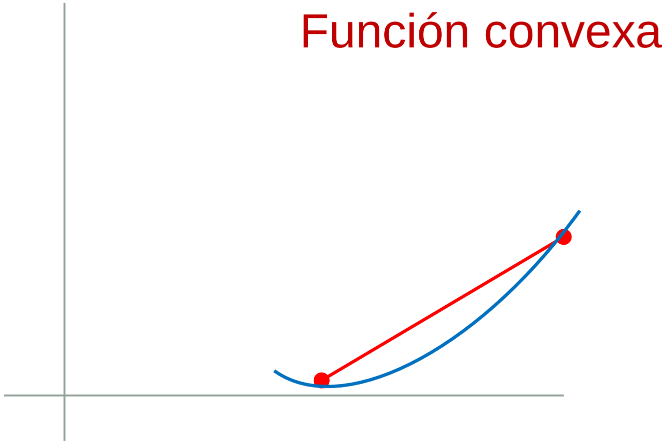
Intervalos de crecimiento

Intervalos de decrecimiento

Concavidad y convexidad

- Una función se dice cóncava si el segmento formado por dos de sus puntos queda por debajo de la gráfica de la función.
- Una función se dice convexa, si el segmento formado por dos de sus puntos queda por encima de la gráfica de la función.





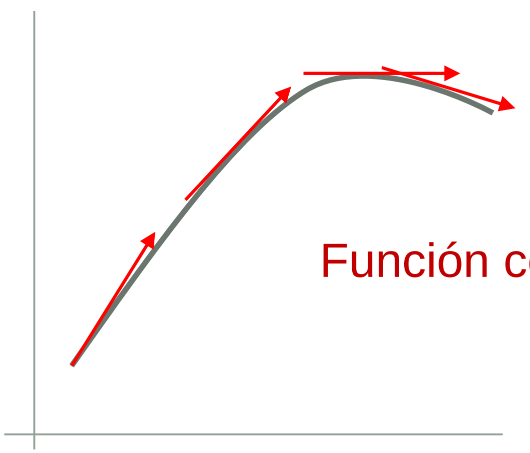
Curvatura y segunda derivada

Si observamos una función cóncava, su derivada decrece, por tanto, la segunda derivada deberá ser menor que 0. En una función convexa, la derivada crece, por tanto, la segunda derivada será positiva.

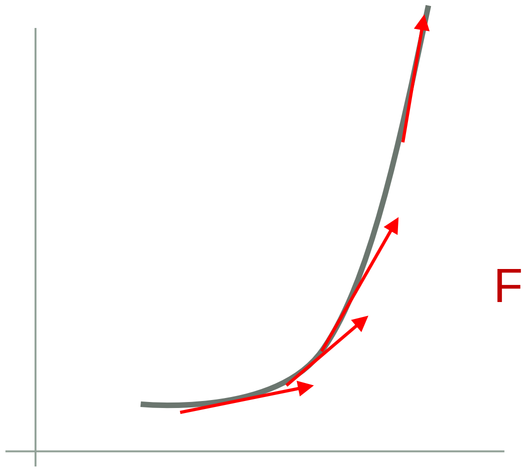
Por tanto:

1. **Si f''(x) >0 en todos los valores de un intervalo *I*, entonces f es convexa.**

2. **Si f''(x) < 0 en todos los valores de un intervalo *I*, entonces f es cóncava.**



Función cóncava



Función convexa

Puntos de inflexión

Un punto de inflexión es un punto de la gráfica de una función, donde la función es continua pero pasa de ser cóncava a convexa o viceversa.

En matemáticas, los puntos de inflexión se caracterizan por ser cero o no existir la segunda derivada de la función.