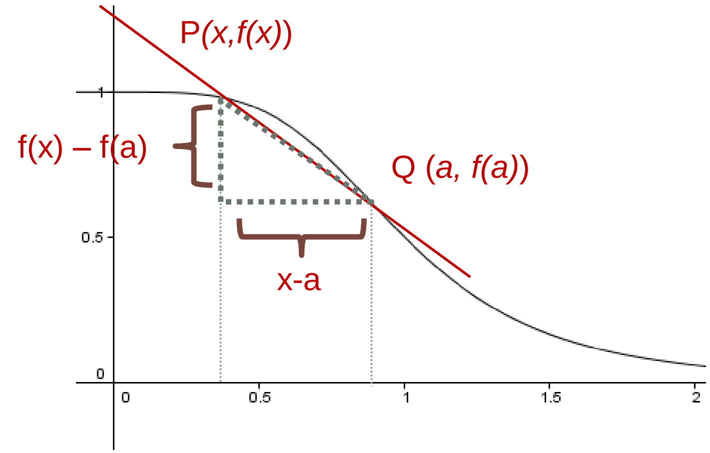
DERIVADAS

Conceptos y definiciones

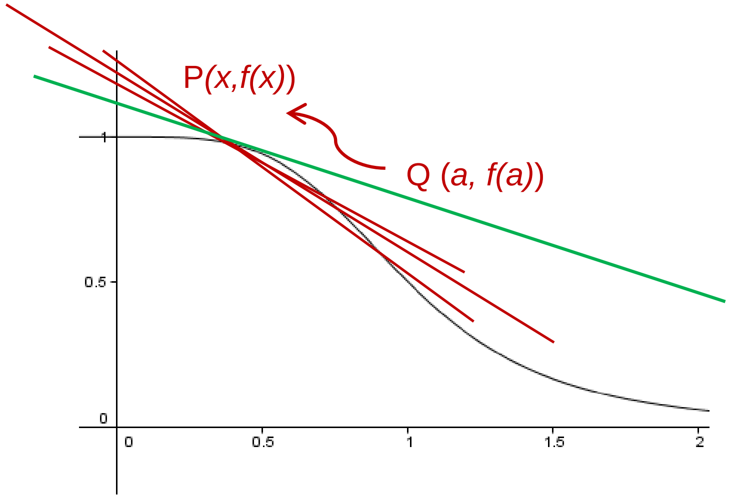
Tangente

Si deseáramos realizar el cálculo de la recta tangente a una curva en un punto ***P***, podríamos calcular previamente la pendiente de la recta que pasa por ***P*** y ***Q***, siendo ***Q*** un punto suficientemente cercano a ***P***.



$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si ***Q*** se acerca a ***P*** lo suficiente, la pendiente de las sucesivas rectas secantes e acercarán a la pendiente de la recta tangente.



Recta tangente

La línea tangente a la curva *y=f(x)*, en el punto, *P(a,f(a))* es la recta que pasando por *P* tiene por pendiente:

$$\boldsymbol{m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Supuesto que el límite existe.

También puede expresarse mediante el siguiente límite equivalente:

$$\boldsymbol{m = \lim_{x \to h} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Ejemplo: Cálculo de la ecuación de la recta tangente en un punto

$f(x) = x^2 - 1$ en *x=1*.

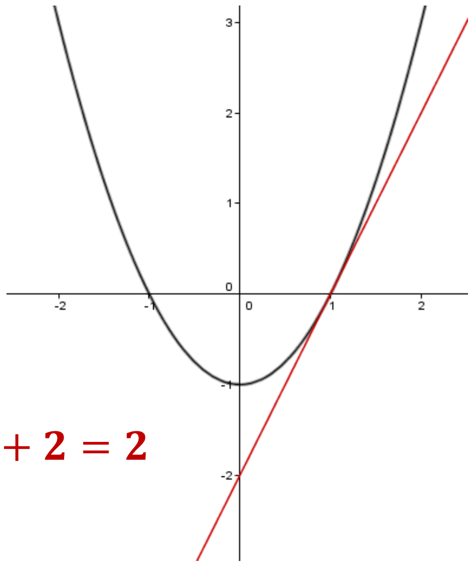
Solución

Calculamos la pendiente:

$$f(1+h) = (1+h)^2 - 1 = h^2 + 2h + 1 - 1 = h^2 + 2h$$

$$f(1) = (1)^2 - 1 = 0$$

$$m = \lim_{x\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{h^2 + 2h - 0}{h} = \lim_{x\to 0} \frac{h(h+2)}{h} = \lim_{x\to 0} h + 2 = 2$$



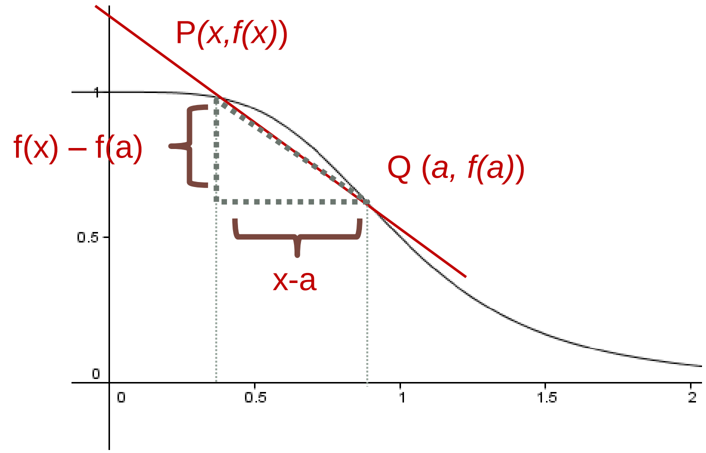
Como la recta debe pasar por el punto ***(1,f(1))*** y tener pendiente **m**, por tanto:

$$y = 2x + n;\, como\ elpunto\ 0\ pertenece\ a\ la\ recta\ 0 = 2 \cdot 1 + n \ \Rightarrow n = -2$$

La recta tangente es ***y = 2x - 2***

Tasa de variación

- La pendiente de las rectas secantes y tangentes pueden también interpretarse como una tasa de variación, es decir, la cantidad que varía la variable dependiente, respecto de la cantidad que varía la variable independiente.



Tasa de variación $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

- Si se considera el límite de la tasa de variación, dispondremos de la tasa de variación instantánea.

Tasa de variación instantánea $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

Ejemplo: tasa de variación

Si suponemos que una función *f(x)* representa el coste en la fabricación de *x* unidades de producto.

Las unidades que tendrá la derivada será el cociente entre el coste y el número de unidades producidas, esto es, el coste de una unidad respecto a las unidades fabricadas.

Incremento del coste

$$\mathbf{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Incremento de la producción

Función derivable. Derivada de una función

- Se dice que una función es derivable en ***a***, si f'(a) existe.

- Se dice que una función es derivable en un intervalo abierto ***(a,b)*** si es derivable en cada uno de los puntos del intervalo.

- La función cuyo valor en cada punto *x* es la derivada de una función ***f*** se denomina **función derivada** de *f*, denotada por *f'*.

- El proceso de encontrar la derivada de una función se denomina **diferenciación.**

¿Por qué no existe la derivada en un punto?

- Es evidente, que si la función no es continua en un punto, tampoco será derivable, pues el límite no existirá.

- Pueden existir funciones que siendo continuas en un punto no sean derivables. Este hecho es debido a que la pendiente cambia bruscamente en un entorno de tales puntos, no existiendo el límite que sirve para calcular la derivada.

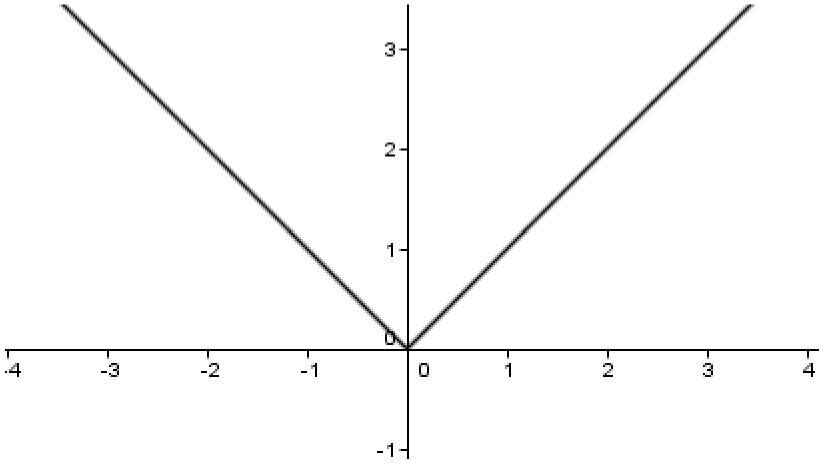
- Por tanto, los cambios bruscos en la pendiente de la gráfica de la función provocará que ésta no sea derivable.

Ejemplo: la derivada de una función en un punto no existe

- Estudiemos la derivada de función $f(x) = |x|$ en x=0.
- Calculemos los límites laterales que definen la derivada.

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$$



Ambos límites son distintos por tanto, el límite que define a la derivada en x=0, no existe.

Reglas de derivación I

Función constante:

$$f(x) = K \;\Rightarrow f'(x) = 0$$

Ejemplo: $\boldsymbol{f(x) = 3 \;\Rightarrow f'(x) = 0}$

Función potencial:

$$f(x) = x^n \;\Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

$\boldsymbol{Ejemplo}$: $\boldsymbol{f(x) = x^4 \;\Rightarrow f'(x) = 4x^3}$

Si *f* es una función derivable y *k* es una constante:

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

Ejemplo: $\boldsymbol{f(x) = x^2 \;\; y \;\; k = 3 \;\Rightarrow \left(3 \cdot f(x)\right)' = \left(3 \cdot x^2\right)' = 3 \cdot \left(x^2\right)' = 3 \cdot 2x = 6x}$

Reglas de derivación II

Si *f* y *g* son funciones derivables, entonces:

La derivada de una suma es la suma de las derivadas:

$$(f+g)' = f' + g'$$

Ejemplo: $\boldsymbol{f(x) = x^5 \;\; y \;\; g(x) = x^3 \;\; \Rightarrow (f(x) + g(x))' = (f(x))' + \left(g(x)\right)' = 5x^4 + 3x^2}$

La derivada de un producto:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Ejemplo: $\boldsymbol{f(x) = x^5 \;\; y \;\; g(x) = x^3 \;\; \Rightarrow (f(x) \cdot g(x))' = (f(x))' \cdot g(x) + f(x)\left(g(x)\right)' =}$
$\boldsymbol{5x^4 \cdot x^3 + x^5 \cdot 3x^2 = 5x^7 + 3x^7 = 8x^7}$

Reglas de derivación III

Si *f* y *g* son funciones derivables, entonces:

La derivada de un cociente:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Ejemplo: $\boldsymbol{f(x) = x^3 + 4 \;\; y \;\; g(x) = x^2 + x}$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{3x^2(x^2 + x) - (x^3 + 4)(2x + 1)}{(x^2 + x)^2}$$

Derivada de las funciones trigonométricas

Derivada del seno: $\left(\boldsymbol{sen(x)}\right)' = \boldsymbol{cos x}$

Derivada del coseno: $\left(\boldsymbol{cos(x)}\right)' = -\boldsymbol{sen x}$

Derivada de la tangente: $\left(\boldsymbol{tg(x)}\right)' = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{cos^2 x}}$

Derivada de la función exponencial y logarítmica

Derivada de la función exponencial:

$(\boldsymbol{a^x})' = \boldsymbol{a^x} \cdot \boldsymbol{lna}$

Caso particular: $(\boldsymbol{e^x})' = \boldsymbol{e^x}$

Derivada de la función logarítmica:

$(\boldsymbol{log_b x})' = \dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{xlnb}}$

Caso particular: $(\boldsymbol{Lnx})' = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}}$

Regla de la cadena

Si ***g*** es derivable en ***x*** y ***f*** es derivable en ***g(x)***, entonces la composición de funciones ***F=f(g(x))***, es derivable en ***x*** y ***F’*** se puede calcular mediante el siguiente producto:

$$\boldsymbol{F'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g(x)}$$

Ejemplo I: regla de la cadena

Sea la función: $\boldsymbol{F(x) = \sqrt{x^2+1}}$

Podemos expresar ***F*** como composición de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{f(u) = \sqrt{u}}$ y $\boldsymbol{g(x) = x^2+1}$ entonces:

$\boldsymbol{f'(u) = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}}$ ***y*** $\boldsymbol{g'(x) = 2x}$ ***.*** Por tanto, utilizando la regla de la cadena:

$$\boldsymbol{F'(x) = f'\big(g(x)\big).\,g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}$$

Ejemplo II: regla de la cadena

Sea la función $\boldsymbol{F(x) = \left(x^2 - x\right)^3}$

Podemos expresar ***F*** como composición de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{f(u) = u^3}$ y $\boldsymbol{g(x) = x^2 - x}$ entonces:

$\boldsymbol{f'(u) = 3u^2}$ y $\boldsymbol{g'(x) = 2x - 1}$ ***.*** Por tanto, utilizando la regla de la cadena:

$$\boldsymbol{F'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = 3\left(x^2 - x\right)^2 \cdot (2x - 1)}$$

Ejemplo III: regla de la cadena

Sea la función $\boldsymbol{F(x) = e^{3x^2}}$

Podemos expresar ***F*** como composición de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{f(x) = e^u}$ y $\boldsymbol{g(x) = 3x^2}$ entonces:

$\boldsymbol{f'(x) = e^u}$ y $\boldsymbol{g'(x) = 6x}$ **.** Por tanto, utilizando la regla de la cadena:

$$\boldsymbol{F'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = e^{3x^2} \cdot 6x}$$