Divisibilidad

Múltiplos de un número I

- Un número natural ***n*** es un múltiplo de un número natural ***m*** si existe un número natural ***k*** tal que ***n* = *m* · *k***
- El número ***k*** se puede calcular dividiendo ***n*** entre ***m***, siempre que la división sea exacta.

Ejemplos

35 es múltiplo de 7, pues 35 = 7 · 5 (35 dividido entre 7 es 5)

120 es múltiplo de 8, pues 120 = 8 · 15 (120 dividido entre 8 es 15)

133 no es múltiplo de 12 pues no existe un número que multiplicado por 12 de 133 (el resto de dividir 133 entre 12 es 1).

Múltiplos de un número II

- Podemos calcular tantos múltiplos de un número como deseemos, basta con multiplicar el número por cualquier número natural.

14

- $14 \cdot 3 = 42$
- $14 \cdot 10 = 140$
- $14 \cdot 13 = 182$
- $14 \cdot 34 = 476$

6

- $6 \cdot 3 = 18$
- $6 \cdot 5 = 30$
- $6 \cdot 6 = 36$
- $6 \cdot 34 = 204$

Divisor de un número I

- Un número natural ***n*** es un divisor de un número natural ***m*** si existe un número natural ***k*** tal que ***m* = *n* · *k***
- La anterior definición es equivalente a decir que la división de ***m*** entre ***n*** es exacta.

Ejemplos

5 es divisor de 35, pues 35 = 7 · 5 (35 dividido entre 5 es 7)

8 es divisor de 120, pues 120 = 8 · 15 (120 dividido entre 8 es 15)

12 no es divisor de 133 pues no existe un número que multiplicado por 12 de 133 (el resto de dividir 133 entre 12 es 1).

Números primos y compuestos

- Para cualquier número mayor que 1 siempre existen al menos dos divisores: el 1 y el propio número.
- Todos los divisores de un número se encuentran entre 1 y el propio número, por tanto, hay un número finito de divisores.
- Los números que solo tienen como divisores el 1 y el propio número se llaman ***números primos***.
- Los números que tienen mas de 2 divisores se denominan ***números compuestos.***

¿Es un número primo?

El procedimiento elemental para saber si un número es primo consiste en dividir el número entre los números menores o iguales que el número, si no encontramos ningún divisor salvo el 1 y el propio número entonces el número será primo.

Ejemplo

El número 35 no es primo pues el número 5 lo divide.

El número 7 es primo, pues 2, 3, 4, 5 y 6 (candidatos a divisores) no son divisores de 7.

Criba de Erastótenes

La criba de Erastótenes es un algoritmo que permite calcular los números primos desde el número 2 y otro número conocido.

Ejemplo: cálculo de los números primos comprendidos entre 2 y 26

En primer lugar se lista los números comprendidos entre 2 y 26

2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26		

A continuación se tachan los múltiplos del primer número:

2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26		

A continuación se tachan los múltiplos del siguiente número no tachado:

2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26		

El procedimiento finaliza cuando llegamos a un número no tachado cuyo cuadrado supere al número 26. Los números no tachados serán los primos buscados.

Tabla de números primos

Números primos menores que 1000

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281	283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569	571	577	587	593	599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743	751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

Descomposición en producto de factores primos I

Todo número natural se puede expresar como producto de factores primos, esta descomposición es única.

Para descomponer en factores primos un número basta con dividir el número de forma sucesiva por los números primos que lo dividen:

Ejemplo: Descomposición de 60 en factores primos.

Como **60** es par, es divisible entre 2, por tanto: **$60 = 30 \cdot 2$**

Ahora continuamos con el número **30** que sigue siendo para por tanto: **$60 = 15 \cdot 2 \cdot 2$**

Ahora continuamos con el número **15** que no es par, intentamos el siguiente primo conocido el 3, que lo divide, por tanto:

$$60 = 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Descomposición en producto de factores primos II

Es posible realizar el proceso anterior de la siguiente forma:

Ejemplo: Descomposición de 60 en factores primos.

	Cocientes parciales	Factores primos
	60	**2**
60 : 2 = 30 →	**30**	**2**
30 : 2 = 15 →	**15**	**3**
15 : 3 = 5 →	**5**	**5**
	1	

Criterios de divisibilidad I

Los criterios de divisibilidad son reglas que sirven para saber si un número es divisible por otro sin necesidad de realizar la división. A continuación se enumeran los más comunes:

Criterio de divisibilidad por ***2***

Un número es divisible por 2 si acaba en 0 o cifra par.

Criterio de divisibilidad por ***3***

Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es 3 o múltiplo de 3.

Criterio de divisibilidad por ***5***

Un número es divisible por 5 si la última de sus cifras es 5 o es 0.

Criterio de divisibilidad por ***7***

Un número es divisible entre 7 cuando, al separar la última cifra de la derecha, multiplicarla por 2 y restarla del número formado por las cifras restantes la diferencia es igual a 0 o es un múltiplo de 7.

Criterios de divisibilidad II

Criterio de divisibilidad por ***11***

Sumando las cifras (del número) en posición impar por un lado y las de posición par por otro. Se resta el resultado de ambas sumas obtenidas. Si el resultado es cero (0) o un múltiplo de 11, el número es divisible por éste.

Si el número tiene sólo dos cifras y estas son iguales será múltiplo de 11.

Criterio de divisibilidad por ***13***

Un número es divisible entre 13 cuando, al separar la última cifra de la derecha, multiplicarla por 9 y restarla de las cifras restantes la diferencia es igual a 0 o es un múltiplo de 13

Cálculo de todos los divisores de un número

Para calcular todos los divisores de un número primero descompondremos el número en factores primos.

El número de divisores será el producto de los exponentes más uno de cada uno de los factores primos (recordad que si un número no tiene exponente éste es 1).

A continuación se procede a construir un árbol en el que se dispone en la raíz el número 1, en el siguiente nivel cada uno de los factores primos distintos que hubiera ordenados de menor a mayor.

En el siguiente nivel se dispondrán los primos mayores o iguales que hubiera.

Los divisores se construyen entonces multiplicando los número de cada rama, tomando cada vez una profundidad del árbol.

Ejemplo: cálculo de los divisores de un número

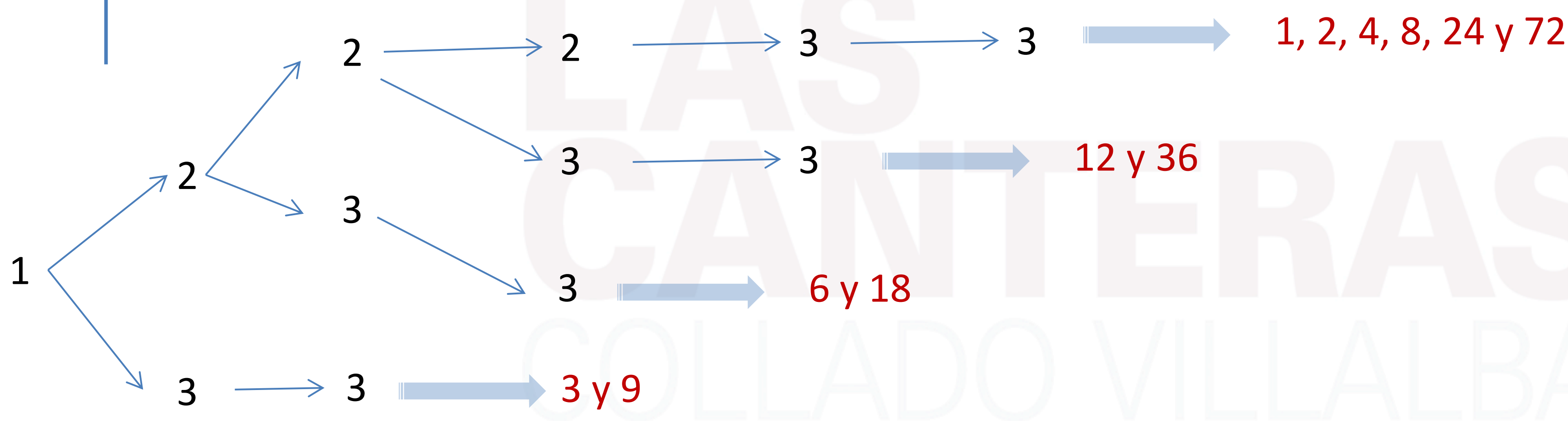
Ejemplo: calculad los divisores de 72:

72	**2**
36	**2**
18	**2**
9	**3**
3	**3**
1	

$72 = 2^3 \cdot 3^2$

El número de divisores de 72 es: (3 + 1)·(2 + 1) = 4 · 3 =12

Los divisores de 72 son: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 8, 12, 18, 24, 36 y 72



Máximo común divisor

Dados dos o mas números naturales, se define el **máximo común divisor (MCD)** como el mayor número que divide a los números anteriores.

El máximo común divisor siempre existe, pues todos los números naturales tienen siempre como común divisor el 1.

Ejemplo: calcularemos el máximo común divisor de 12 y 42. Se expresa de la forma MCD (12, 42).

Los divisores de 12 son 1, 2, 3, 4, 6 y 12

Los divisores de 42 son 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21 y 42.

Por tanto, MCD (12, 42) = 6

Cálculo del MCD por factorización

Para calcular el máximo común divisor de dos o mas números se descompondrá cada uno de ellos en factores primos, expresando el resultado en forma de producto de potencias.

El máximo común divisor estará formado por el producto de las potencias de menor exponente, cuyas bases sean comunes a todos los números.

Si no hubiera ninguna potencia común, el máximo común divisor será 1.

Ejemplo: calcularemos el máximo común divisor de 12 y 42.

Descomponemos en factores primos los números: $12 = 2^2 \cdot 3 \; y \; 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

Tomamos las potencias comunes con menor exponente, esto es:

MCD (12, 42) = 2 · 3 = 6

Cálculo del MCD, algoritmo de Euclides

Para calcular el máximo común divisor de dos números, se dividirá uno entre otro:

> Si la división es exacta, el divisor será el máximo común divisor.
>
> En otro caso, pasamos al inicio de este procedimiento pero ahora el dividendo será el divisor y el divisor el resto de la división.

Ejemplo: calcularemos el máximo común divisor de 12 y 42.

Dividimos 42 entre 12

$$\begin{array}{l|l} 42 & 12 \\ \hline 6 & 3 \end{array}$$

Como el resto es distinto de cero dividimos 12 (el divisor) entre 6 (el resto)

$$\begin{array}{l|l} 12 & 6 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

El resto es cero, por tanto, el máximo común divisor es 6 (el divisor)

Mínimo común múltiplo

Como su propio nombre indica se trata de calcular el menor múltiplo común a dos o más números.

El mínimo común múltiplo siempre existe, pues el número que resulta de multiplicar todos los números es un múltiplo común a todos ellos.

Ejemplo: calcularemos el mínimo común múltiplo de 12 y 42

Los múltiplos de 12 son: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144, 156,168, 180 …

Los múltiplos de 42 son: 42, 84, 126, 168, 210…

Por tanto, el menor de los múltiplos comunes es 84.

Cálculo del mínimo común múltiplo por factorización

Para calcular el mínimo común múltiplo de dos o mas números se descompondrá cada uno de ellos en factores primos, expresando el resultado en forma de producto de potencias.

El mínimo común múltiplo será el producto de las potencias de mayor exponente, cuyas bases sean comunes a todos los números y las potencias de base no común

Si no hubiera ninguna potencia común, el mínimo común múltiplo será el producto de todos los números.

Ejemplo: calcularemos el mínimo común múltiplo de 12 y 42

Descomponemos en factores primos los números: $12 = 2^2 \cdot 3 \; y \; 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

mcm (12 , 42) =$2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$

Cálculo del mcm utilizando el mcd

Si hemos calculado el mcd de varios números, podemos calcular su mcm multiplicando el mcd por el cociente que resulta de dividir todos los números entre el máximo común divisor.

Ejemplo: calcularemos el mínimo común múltiplo de 12 y 42

Sabemos que mcd (12, 42) = 6. Dividimos cada número entre 6:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 6 \\ \hline 0 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 42 & 6 \\ \hline 6 & 7 \end{array}$$

Por tanto, el mcm (12, 42) = mcd(12, 42) · 2 · 7 = 6 ·2 ·7 = 84