Ecuaciones

Definiciones I

Una **ecuación** es una igualdad algebraica que se verifica únicamente para un conjunto determinado de valores de las variables o indeterminadas que forman la ecuación.

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Esta igualdad es una identidad. Se verificar para cualquier valor de **a y b.**

$$2x = 4$$

Esta igualdad es una ecuación. Se verifica únicamente cuando x vale 2.

Una **solución** de una ecuación son aquellos valores que al sustituirlos en la ecuación hacen que la igualdad sea cierta.

Definiciones II

Resolver una **ecuación** es calcular los valores para los que se verifica la igualdad.

Las **incógnitas** de una ecuación son las letras que aparecen en ésta.

Comprobar una ecuación consiste en sustituir las incógnitas por los valores obtenidos en el proceso de resolución de la ecuación.

Una ecuación puede tener una solución, varias o ninguna solución.

Los miembros de una ecuación son cada una de las expresiones que separa el símbolo “=“.

Ecuaciones con una incógnita

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Ecuaciones de grado uno con una incógnita

Una ecuación de primer grado con una incógnita puede expresarse de la forma:

$$ax + b = 0$$

Donde ***a*** y ***b*** son coeficientes de la ecuación, siendo números conocidos.

x es la incógnita, representa el valor buscado.

El único número que verifica la ecuación es $-\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$, es decir, su solución.

Ecuaciones equivalentes

- Dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones.
- Las siguientes reglas permiten obtener una ecuación equivalente:

1. Si a los dos miembros de una ecuación se le suma (o resta) la misma expresión numérica o algebraica, resulta una ecuación equivalente.
2. Si se multiplica (o divide) los dos miembros de una ecuación por un número (distinto de cero), la ecuación resultante es equivalente a la inicial.

Ejemplo

$$3x - 12 = 45$$

Sumando 12 a ambos miembros de la ecuación

$$3x - 12 + 12 = 45+12$$
$$3x = 57$$

Dividiendo entre 3 ambos miembros de la ecuación

$$\frac{3x}{3} = \frac{57}{3}$$
$$x = 19$$

Simplificamos cada miembro

Sugerencias para la resolución de una ecuación de primer grado

1. Quitar los paréntesis
2. Quitar denominadores
3. Suprimir los términos iguales de ambos miembros
4. Transponer los términos numéricos a un miembro y al otro los término no numéricos.
5. Reducir los términos semejantes
6. Despejar la incógnita

Ejemplo I

$$4(x-3)-7(x-4)=6-\mathrm{x}$$

Quitar los paréntesis (hemos aplicado la propiedad distributiva)

$$4x-12-7x+28=6-x$$

Agrupamos términos semejantes en cada miembro de la ecuación

$$-3x+16=6-x$$

Transponer los términos numéricos a un miembro y al otro los término numéricos.

$$-3x+x=6-16$$

Reducir los términos semejantes

$$-2x=-10$$

$$x=\frac{-10}{-2}=5$$

Despejar la incógnita

Ejemplo II

$$\frac{x}{2}+\frac{3x}{4}-\frac{5x}{6}=15$$

Quitar denominadores (hemos multiplicado ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores 12)

$$6x+9x-10x=180$$

Agrupamos términos semejantes en cada miembro de la ecuación

$$5x=180$$

$$x=\frac{180}{5}=36$$

Despejar la incógnita

Ejemplo III

$$\frac{x-1}{1}-\frac{x-2}{2}+\frac{x-3}{3}=0$$

Quitar denominadores (hemos multiplicado ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores 6)

$$6x-6-3x+6+2x-6=0$$

Agrupamos términos semejantes en cada miembro de la ecuación

$$5x-6=0$$

Transponer los términos numéricos a un miembro y al otro los término numéricos.

$$5x=6$$

Despejar la incógnita

$$x=\frac{6}{5}$$

Plantear ecuaciones

En un problema, normalmente intervienen:

1. Los valores conocidos del problema, conocidos como **datos**.
2. Valores desconocidos que hay que obtener. Normalmente, son candidatos a ser **incógnitas**.
3. **Relaciones** entre los datos y las incógnitas, que permitirán escribir las ecuaciones.

Ecuaciones con una incógnita

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Ecuaciones de segundo grado

- Una ecuación de segundo grado siempre puede reducirse a la forma:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

- Cuando la ecuación se encuentra expresada de la anterior forma se dice que está en forma canónica, general o estándar.

Fórmula para la resolución de una ecuación de segundo grado

- Para resolver una ecuación de segundo grado en forma general, podemos utilizar la siguiente fórmula:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \mathbf{x} = \frac{-\mathbf{b} \pm \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}}{2\mathbf{a}}$$

- Se obtienen así a lo más dos valores sumando y restando la raíz cuadrada de $\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}$

Ejemplo I

$$\boldsymbol{x^2 - 5x + 6 = 0}$$

Asociamos los valores a cada uno de los coeficientes de la ecuación general

a = 1 ; b = -5 ; c = 6

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

Aplicamos la fórmula

$$\mathrm{x} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

Operamos y calculamos las soluciones

$$\mathrm{x} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x = \dfrac{5+1}{2} = 3 \\ x = \dfrac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

Ejemplo II

$$x^2 - 4x + 7 = 0$$

Asociamos los valores a cada uno de los coeficientes de la ecuación general

a = 1 ; b = -4 ; c = 7

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Aplicamos la fórmula

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1}$$

Operamos y calculamos las soluciones.

En este caso no hay soluciones reales, pues no existe la raíz de un número negativo.

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 28}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

Ejemplo III

$$\boldsymbol{x^2 + 2x + 1 = 0}$$

Asociamos los valores a cada uno de los coeficientes de la ecuación general

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

a = 1 ; b = 2 ; c = 1

Aplicamos la fórmula

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Operamos y calculamos las soluciones. En este caso sólo hay una solución, pues la raíz es 0.

Número de soluciones

- La expresión radical $\sqrt{\mathbf{b^2 - 4ac}}$ determina el número de soluciones de la ecuación de segundo grado:

    - Dos soluciones si $\mathbf{b^2 - 4ac > 0}$
    - Una solución si $\mathbf{b^2 - 4ac = 0}$
    - Sin solución real si $\mathbf{b^2 - 4ac < 0}$

La expresión $\mathbf{b^2 - 4ac}$ es denominada **discriminante**, pues determina el número de soluciones de la ecuación.

Resolución de ecuaciones incompletas

Se pueden resolver las ecuaciones incompletas sin utilizar la fórmula general.

- Si b = 0, $\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$ despejamos **x** y calculamos las soluciones.
- Si c = 0, $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$ factorizamos la expresión. Una de las soluciones siempre es $\mathbf{0}$

Ejemplo

$$x^2 - 9 = 0$$

En este caso b = 0. Por tanto, despejamos x

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9} = \begin{cases} x = \ \ 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x = 0$$

En este caso c = 0. Por tanto, factorizamos

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2 = 0; x = -2 \end{cases}$$

Ecuaciones con una incógnita

ECUACIONES BICUADRADAS

Ecuaciones bicuadradas

Una ecuación de cuarto grado que carece de los términos de grado impar se llaman bicuadradas.

$$\boldsymbol{ax^4 + bx^2 + c = 0, a > 0}$$

Esta ecuación puede expresarse como:

$$\boldsymbol{a\left(x^2\right)^2 + bx^2 + c = 0, a > 0}$$

Puede realizarse el siguiente cambio $\boldsymbol{t = x^2}$ y obtendremos la siguiente ecuación:

$$\boldsymbol{at^2 + bt + c = 0}$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, posteriormente podemos extraer la raíz cuadrada de las soluciones para calcular $\boldsymbol{x}$.

Ejemplo I

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$ Haciendo el siguiente cambio $t = x^2$

$$t^2 - 13t + 36 = 0$$ Resolvemos la ecuación de segundo grado

$$t = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} t = 9 \\ t = 4 \end{cases}$$

Cuando *t = 9*, entonces $t = x^2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$

Cuando *t = 4*, entonces $t = x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

Soluciones de la ecuación

Ejemplo II

$$8x^6 - 63x^3 - 8 = 0$$ ← Haciendo el siguiente cambio $t = x^3$

$$8t^2 - 63t - 8 = 0$$ ← Resolvemos la ecuación de segundo grado

$$t = \frac{63 \pm \sqrt{(-63)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-8)}}{2 \cdot 8} = \frac{63 \pm \sqrt{4225}}{16} = \frac{63 \pm 65}{16} = \begin{cases} t = 8 \\ t = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

Cuando *t = 8*, entonces $t = x^3 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = \boxed{2}$

Soluciones de la ecuación

Cuando *t = 4*, entonces $t = x^3 \Rightarrow x^3 = -\frac{1}{8} \Rightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = \boxed{-\frac{1}{2}}$

Ecuaciones de grado superior

Reducción a ecuaciones de primer y segundo grado

Un método elemental

Supondremos que la ecuación a resolver tiene la forma ***P(x)=0***, donde ***P*** es un polinomio de grado mayor o igual que 3.

Resolveremos la ecuación mediante métodos elementales **factorizando** el polinomio, pero para este fin, el polinomio deberá tener al menos una **raíz entera**.

Calculando la raíz, podremos expresar la ecuación como un producto y utilizar el argumento: "***un producto es cero cuando al menos uno de los factores es cero***".

Por último, resolveremos dos o mas ecuaciones de menor grado al original.

Ejemplo I

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

Sabemos que las posibles raíces enteras del polinomio son los divisores de su término independiente, por tanto, son candidatos los valores: **±1 y ±2**.

Para **x= 1** se obtiene 1+2-1-2=0, por tanto es raíz.

Podemos expresar la ecuación como:

$$(x-1)\left(x^2+3x+2\right)=0$$

Ahora, basta con resolver la ecuación $x^2 + 3x + 2 = 0$ para obtener las restantes soluciones.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}$$

Las soluciones de esta ecuación son x = 1; x = -2; x = -1

Ejemplo II

$$x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x = 0$$

En este caso, podemos sacar factor común x. Por tanto, 0 será una de las soluciones de esta ecuación.

$$(x^3 + 3x^2 - x - 3)x = 0$$

Ahora, deberemos factorizar el polinomio de grado 3, sabiendo que sus posibles raíces enteras son **±1 y ±3** (divisores del término independiente). Para x = 1

$$1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1 - 3 = 0$$

Ahora, queda la ecuación $(x^2 + 4x + 3)(x - 1)x = 0$ para obtener las restantes soluciones, resolvemos la ecuación de segundo grado

$$\mathrm{x} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}$$

ECUACIONES IRRACIONALES

Definición

Las ecuaciones irracionales, también conocidas como ecuaciones radicales, se caracterizan por tener la incógnita en alguno de sus términos bajo el signo de raíz.

Daremos solución aquí a las ecuaciones con radicales cuadráticos.

Ejemplos

$$\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x} = 3$$

$$x - \sqrt{x} = 1$$

Método de resolución

El objetivo consiste en transformar la ecuación irracional en polinómica. Para conseguirlo:

1. Aislamos uno de los radicales en uno de los miembros, el resto los trasponemos al otro miembro aún cuando sean radicales
2. Se elevan al cuadrado los dos miembros
3. Si existiera algún radical, se repite el procedimiento
4. Se resuelve la ecuación polinómica así obtenida
5. Se comprueban cuáles de las raíces obtenidas verifican la ecuación original.

Ejemplo I

$$\sqrt{x-5}=3$$

En este caso, el radical se encuentra aislado en un miembro, por tanto, elevamos al cuadrado ambos miembros.

$$\left(\sqrt{x-5}\right)^2=3^2$$

$x-5=9$ Obtenemos una ecuación de primer grado que resolvemos

$x=14$

Por último, comprobamos si es solución de la ecuación original

$$\sqrt{14-5}=\sqrt{9}=3$$

Por tanto, 14 es solución de la ecuación.

Ejemplo II

$$\sqrt{x+21}-\sqrt{x}=1$$

Aislamos uno de los radicales y elevamos los dos miembros de la ecuación.

$$\sqrt{x+21}=1+\sqrt{x}\ ;\ \left(\sqrt{x+21}\right)^2=\left(1+\sqrt{x}\right)^2;\ x+21=1+x+2\sqrt{x}$$

Como aún queda un radical, procedemos a aislarlo de nuevo y elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación.

$$x+21=1+x+2\sqrt{x}\ \ ;\ \ 10=\sqrt{x}\ \ ;\ \ 100=x$$

Por último, comprobamos si es solución de la ecuación original

$$\sqrt{100+21}-\sqrt{100}=11\ -10=1$$

Por tanto, 100 es solución de la ecuación.

SISTEMAS DE ECUACIONES

Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de dos ecuaciones lineales de primer grado con dos incógnitas se encuentran formados por las ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Donde los términos independientes y los coeficientes de las incógnitas son números reales.

La solución al sistema será un par de números tales que verifican las ecuaciones al sustituir las incógnitas en cada una de ellas.

Solución de un sistema

Resolver un sistema es encontrar todas sus soluciones. Podemos clasificar los sistemas dependiendo de sus soluciones como:

- Sistemas
  - Compatibles (tienen solución)
    - Determinados (una solución)
    - Indeterminados (mas de una solución)
  - Incompatibles (no tienen solución)

Ejemplos

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Sistema compatible determinado, su solución única es *x = 2* ; *y = -1*

$$\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Sistema compatible indeterminado. Toda solución de la primera ecuación es solución de la segunda ecuación

Sistema incompatible. No tiene solución

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Sistemas equivalentes

- Dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones.
- Las siguientes reglas permiten obtener un sistema equivalente:

1. Si a los dos miembros de una ecuación se le suma (o resta) la misma expresión numérica o algebraica.
2. Si se multiplica (o divide) los dos miembros de una ecuación por un número (distinto de cero).
3. Si una ecuación de un sistema es sustituida por la suma o resta de la misma con otra ecuación del sistema.
4. Si en un sistema, una ecuación se expresa en función de las restantes, puede suprimirse, obteniéndose un sistema equivalente.

Métodos de resolución de sistemas

Sustitución

Despejamos una incógnita en una ecuación y sustituimos la incógnita de la otra ecuación por el valor despejado

Igualación

Despejamos la misma incógnita en las dos ecuaciónes e igualamos los valores obtenidos. Resolviendo una ecuación con una incógnita

Reducción

Obtenemos un sistema equivalente sumando o restando ecuaciones equivalentes intentando eliminar incógnitas.

Método de sustitución: ejemplo

$$\begin{cases} x - 2y = -5 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$$

Despejando x de la primera ecuación, obtenemos un sistema equivalente.

$$\begin{cases} x = -5 + 2y \\ 3x + y = 6 \end{cases}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación el valor de ***x***, obtenemos una ecuación con una incógnita que ya sabemos resolver

$$3(-5 + 2y) + y = 6; -15 + 6y + y = 6\,; 7y = 21; \boxed{y = 3}$$

Sustituyendo en la ecuación despejada.

$$x = -5 + 2 \cdot 3;\ x = -5 + 6; \boxed{x = 1}$$

Método de igualación: ejemplo

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Despejamos la misma variable en ambas ecuaciones

$$\begin{cases} x = 4 - 3y \\ x = \dfrac{1 + y}{2} \end{cases}$$

Igualamos la ecuaciones despejadas, quedando una ecuación con una incógnita que ya sabemos resolver

$$4 - 3y = \frac{1 + y}{2}\,; 8 - 6y = 1 + y\,; -7y = -7; \boxed{y = 1}$$

Sustituyendo en una de las ecuaciones despejadas obtenemos el valor para la otra variable

$$x = 4 - 3y; x = 4 - 3 \cdot 1; \boxed{x = 1}$$

Método de reducción: ejemplo

$$\begin{cases} 4x + y = -3 \\ -3x + y = 11 \end{cases}$$

Multiplicando las ecuaciones originales por un número, obtenemos como coeficientes de una de las incógnitas números opuestos.

$$\begin{cases} 4x + y = -3 \\ 3x - y = -11 \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro ambas ecuaciones, obtenemos una única ecuación con una incógnita, que ya sabemos resolver.

$$7x = -14\,;\, \boxed{\mathrm{x} = -2}$$

El valor de la otra incógnita se obtiene sustituyendo en cualquiera de las dos ecuaciones originales.

$$4(-2) + y = -3\,; -8 + y = -3\,; \boxed{y = 5}$$

Sistemas no lineales

- Cuando el grado de una de la incógnitas de una ecuación de un sistema es mayor que uno, el sistema no es lineal
- Cuando la relación entre las incógnitas no es una suma (o resta) el sistema no es lineal.

$$\begin{cases} 2x \cdot y = -5 \\ 3x + 5y = 6 \end{cases}$$

Este sistema no es lineal pues en la primera ecuación la operación que une las dos incógnitas es el producto

$$\begin{cases} x^2 + 2y = -5 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$$

Este sistema no es lineal pues en la primera ecuación la incógnita x tiene grado 2.

La resolución de estos sistemas se hace siempre por sustitución salvo en casos particulares donde se utilice algún método particular.

Ejemplo I

$\begin{cases} 8x = y^2 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$ $\textit{despejando y de la segunda ecuación } y = 2x - 8 \textit{ sustituimos}$

$$8x = (2x-8)^2 \quad ; \quad 8x = 4x^2 - 32x + 64 \ ; 4x^2 - 40x + 64 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$\mathrm{x} = \frac{40 \pm \sqrt{(-40)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 64}}{2 \cdot 4} = \frac{40 \pm 24}{8} = \begin{cases} x = 8 \\ x = 2 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones son:

a) x = 8 e y = 8
b) x = 2 e y = -4

Por cada valor de x obtenemos el valor correspondiente a y, sustituyendo el valor de x en la expresión donde se encuentra despejada la incógnita y.

Ejemplo II

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$$

Despejando la incógnita x en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera ecuación queda:

$$x = \frac{3}{y} \qquad \left(\frac{3}{y}\right)^2 + y^2 = 10$$

Operando y simplificando la ecuación resultante, queda una ecuación bicuadrada:

$$9 + y^4 = 10y^2 \ ; \ y^4 - 10y^2 + 9 = 0$$

Operando y simplificando la ecuación resultante, queda una ecuación bicuadrada, que resolvemos haciendo el correspondiente cambio de variable ***t = x²***:

$$t^2 - 10t + 9 = 0$$

$$t = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} t = 9 \\ t = 1 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio y sustituyendo en la incógnita despejada las soluciones son:

x = 3 ; y = 1
x = -3 ; y = -1
x = 1 ; y = 3
x = -1 ; y = -3