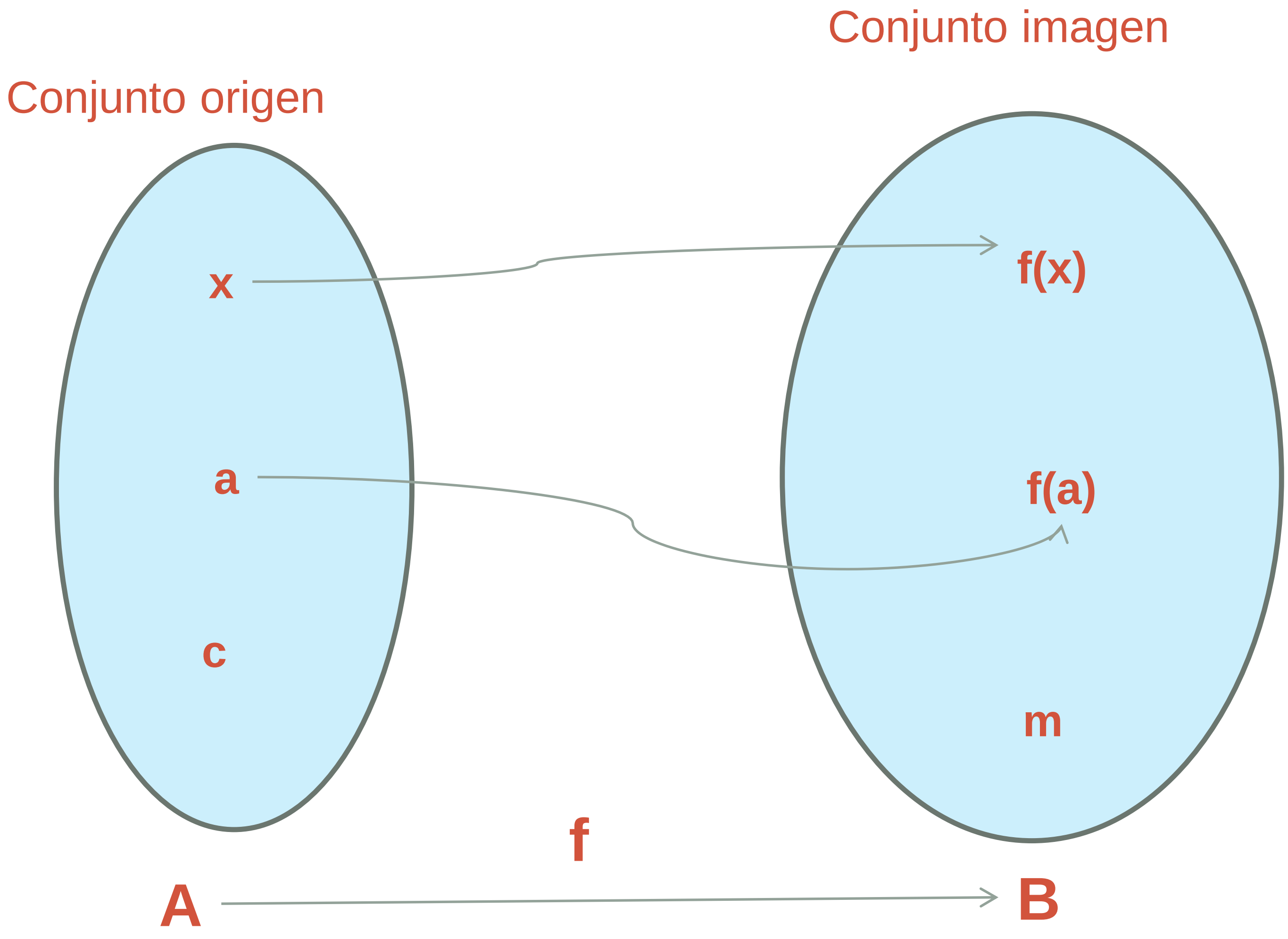
FUNCIONES DE VARIABLE REAL

Definiciones

Definición

- Una función *f* es una correspondencia que asigna a cada elemento *x* en un conjunto *A* exactamente (uno y sólo un) elemento en un conjunto *B*, al que denotaremos por *f(x).*
- *Al conjunto A de llamaremos* **conjunto origen** *y al conjunto B* ***conjunto imagen****.*
- *Pueden existir elementos del conjunto origen que no tengan ninguna imagen*
- *Pueden existir elementos del conjunto imagen que no tengan ningún origen.*

Esquema



Notación

- Se dice que la función es real, de variable real, cuando los conjuntos origen e imagen son los números reales.
- Un símbolo arbitrario que representa los valores posibles del conjunto origen se denominará variable independiente. Utilizaremos en esta presentación normalmente la variable **x**.
- Un símbolo también representará la imagen de la variable independiente, es decir, el elemento del conjunto imagen correspondiente a un elemento del conjunto origen a través de la función. Utilizaremos en esta presentación normalmente la variable **y**.

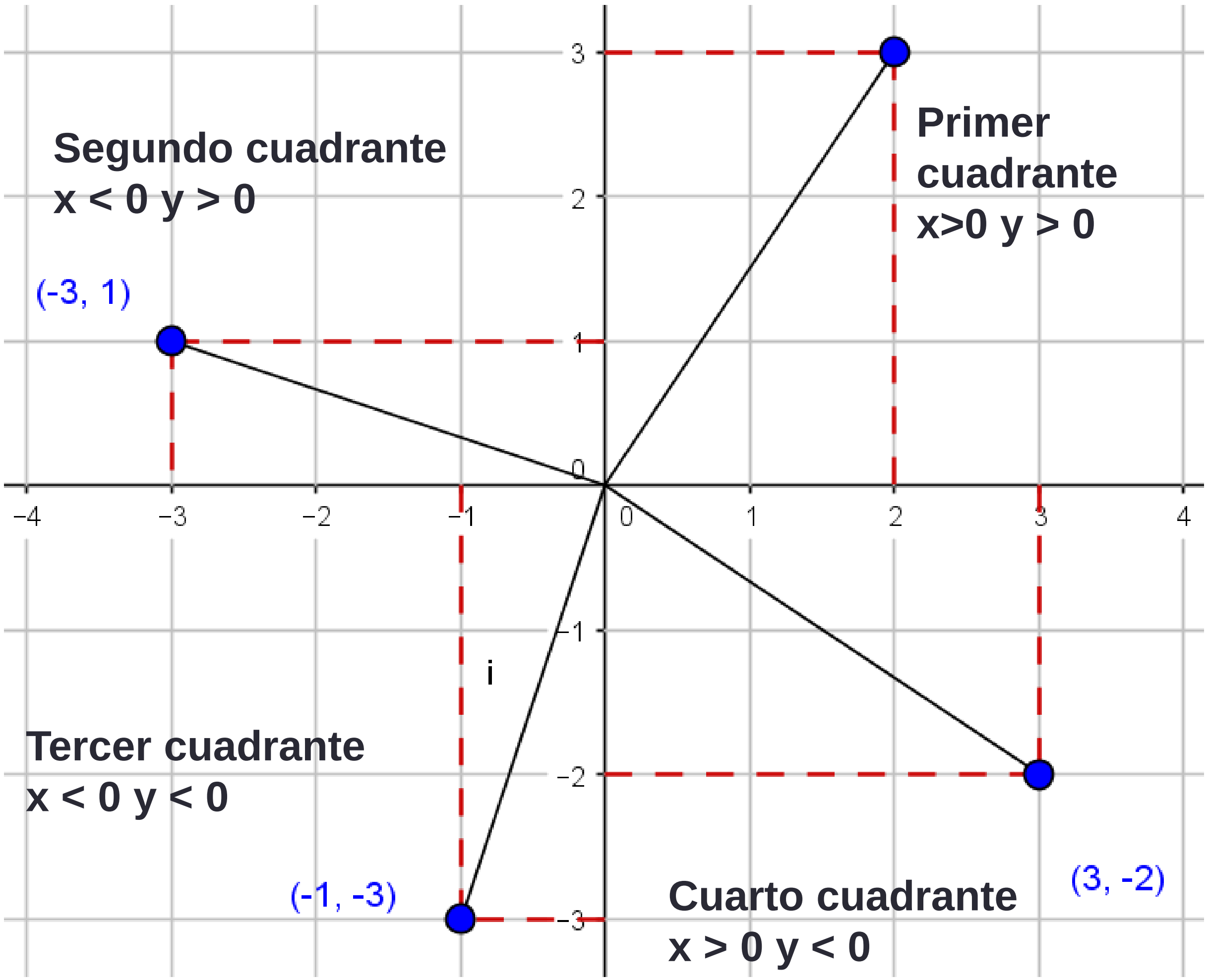
El plano cartesiano

- Se utiliza, entre otras, para representar funciones.
- Está formado por dos rectas perpendiculares, denominadas **ejes**.
- El **eje horizontal** se denomina eje de **abscisas** y el **eje vertical** eje de ordenadas.
- El punto de corte de los ejes se denomina **origen**.
- El plano queda dividido en 4 partes, denominadas **cuadrantes**.

Representación de puntos en el plano

- Cada punto del plano queda representado por un par ordenado (a,b):
  - La primera componente (a) es la distancia al origen de la proyección al eje de abscisas del segmento que une el origen y el punto.
  - La segunda componente (b) es la distancia al origen de la proyección al eje de ordenadas del segmento que une el origen y el punto.
- Cuando se representa una función, en el eje de abscisas se representa la variable independiente y en el eje de ordenadas eje de ordenadas.

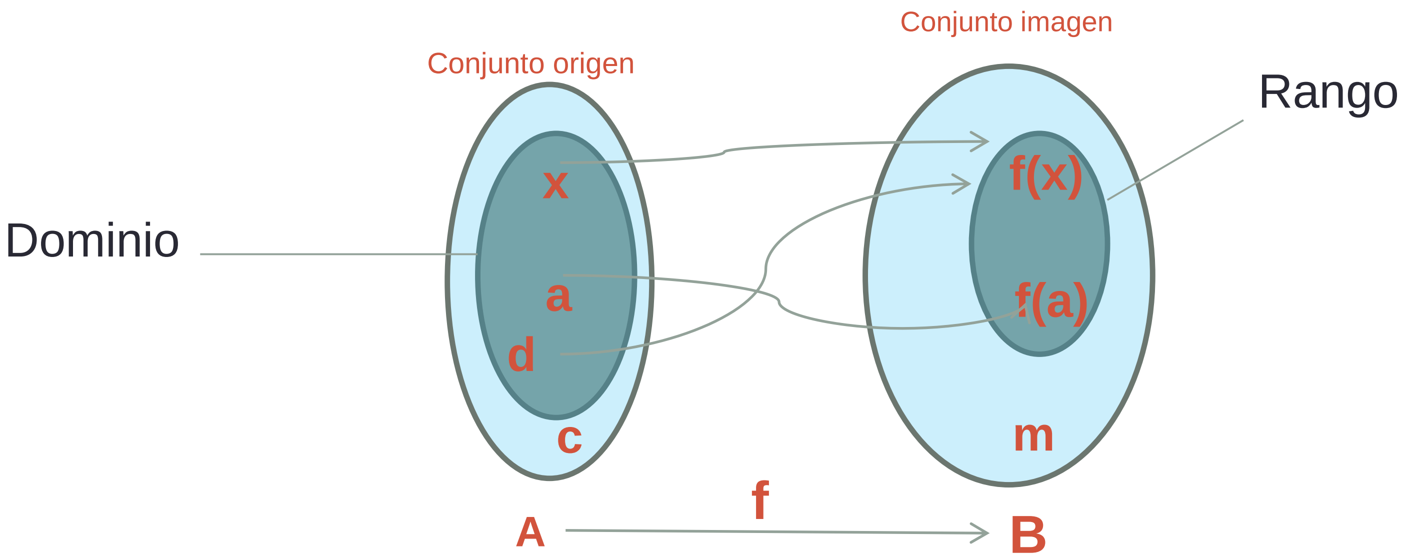
Ejemplo



Segundo cuadrante
x < 0 y > 0
Primer cuadrante
x>0 y > 0
(-3, 1)
Tercer cuadrante
x < 0 y < 0
i
(-1, -3)
Cuarto cuadrante
x > 0 y < 0
(3, -2)
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4

Dominio y rango (o recorrido)

- El **dominio** de una función es el subconjunto del conjunto origen que tiene al menos una imagen, es decir, donde tiene sentido que la función se encuentre definida.
- El **rango** de una función es el subconjunto del conjunto imagen que tiene al menos un elemento origen.

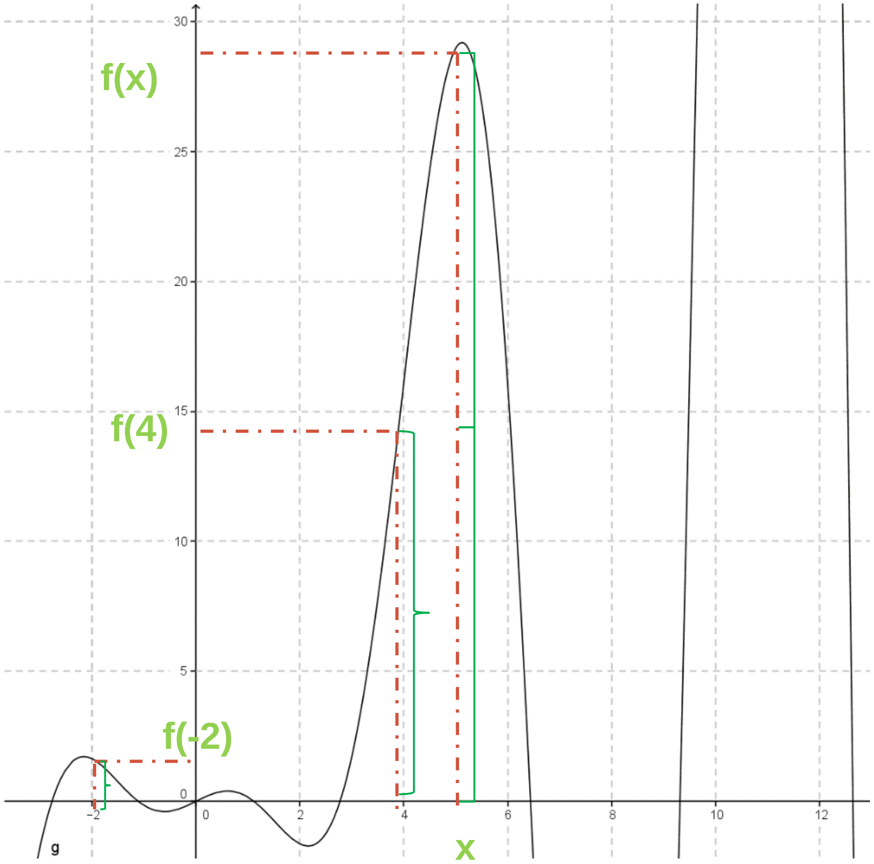


Representación / definición de funciones

- Hay cuatro formas de representar una función:
  - Con lenguaje natural (descripción mediante palabras)
  - Numéricamente (utilizando una tabla de valores)
  - Visualmente (utilizando una gráfica)
  - Algebraicamente (mediante una fórmula explícita)
- Ninguno de los métodos es excluyente, dependiendo de la función, un método será mejor que otro complementándose todos ellos.

Gráficas y funciones

- La gráfica de una función permite observar el comportamiento de una función.
- Permite también conocer el valor de las variables dependientes e independientes



Ejemplos I

- El área de un círculo (definición mediante lenguaje natural) se puede expresar mediante la siguiente fórmula algebraica

$$A(r) = \pi \cdot r^2$$

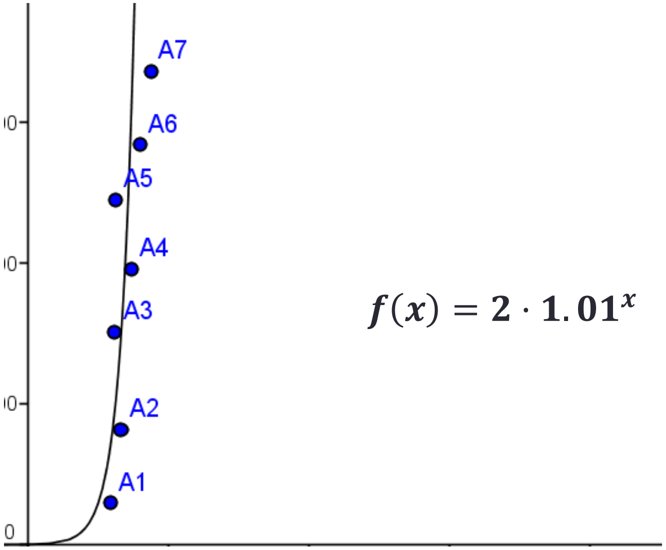
- También es posible recopilar en una tabla diferentes valores del radio y el área que le corresponde al círculo.
- Su gráfica se corresponde con media parábola, pues el radio debe ser siempre positivo, siendo el dominio $\{x \in \mathbb{R} | x > 0\} = (0, +\infty)$, y el recorrido también$(0, +\infty)$ pues las áreas también son positivas.

Ejemplo 2

- Podemos disponer de un conjunto de pares de valores que representan, por ejemplo, el crecimiento de una población bacteriana a lo largo del tiempo.

Como en la realidad, una función puede comenzar por una descripción, posteriormente en una tabla y finalmente modelizado por una función:

Tiempo (minutos)	Población
587.5	296.3
663.5	815.3
612.9	1511.6
739.4	1954.6
625.5	2448.3
802.7	2840.7
878.7	3359.7



$$f(x) = 2 \cdot 1.01^x$$

Ejemplo 3

- No siempre la representación verbal o la gráfica de una función es la mejor forma de representarla. Por ejemplo, el coste del envío de un paquete depende de su peso y es mas conveniente representar la función de forma tabular

Peso (kg)	Euros
0,5 kg	51
1,0 kg	51
1,5 kg	53,45
2,0 kg	53,45
2,5 kg	56,45
3,0 kg	56,45
3,5 kg	57,5
4,0 kg	57,5
4,5 kg	58,45
5,0 kg	58,45

Ejemplos: dominio de una función

- Calculad el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x+3}$

  El cálculo de la raíz cuadrada negativo no tiene sentido por lo que exigiremos que $x + 3 \geq 0$, por tanto, el dominio es, $[-3, +\infty)$

- Calculad el dominio de la función $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$

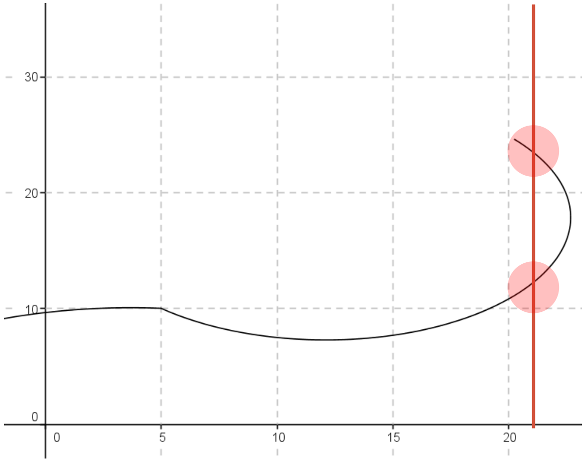
  La división por cero no tiene sentido, por tanto, exigiremos que $x^2 - 4 \neq 0$ lo que ocurre cuando x es distinto de -2 y 2.

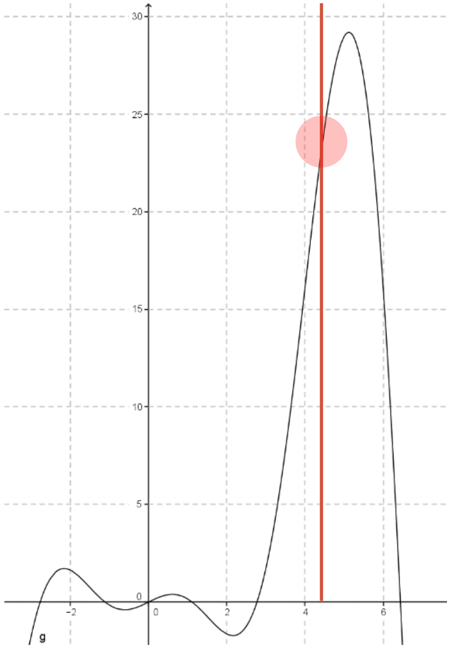
  Por tanto, el dominio es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Prueba de la línea vertical

- Una curva en el plano se corresponde a una gráfica de una función si y sólo sí no existe una línea vertical que interseca a la curva en más de un punto.

Esta gráfica no se corresponde con una función



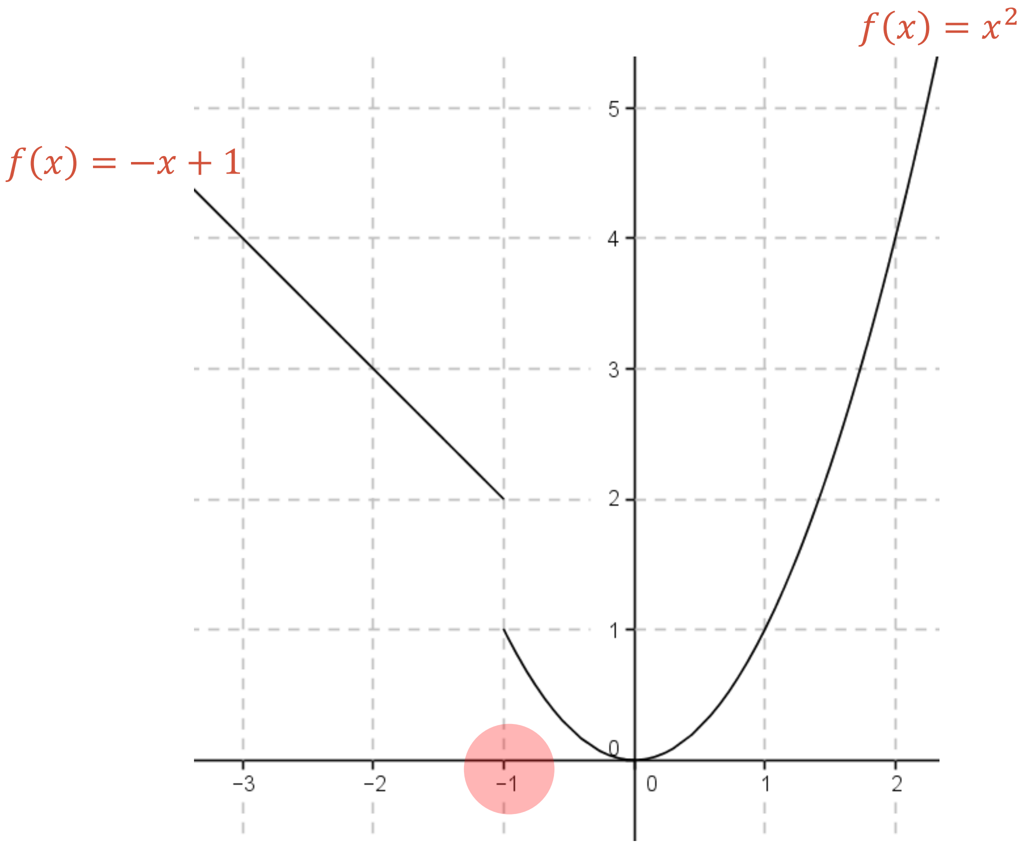


Esta gráfica se corresponde con una función

Funciones definidas a trozos

- Una función se encuentra definida a trozos cuando a distintas partes de su dominio se le asigna una fórmula diferente.

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & si\ x \leq -1 \\ x^2 & si\ x > -1 \end{cases}$$



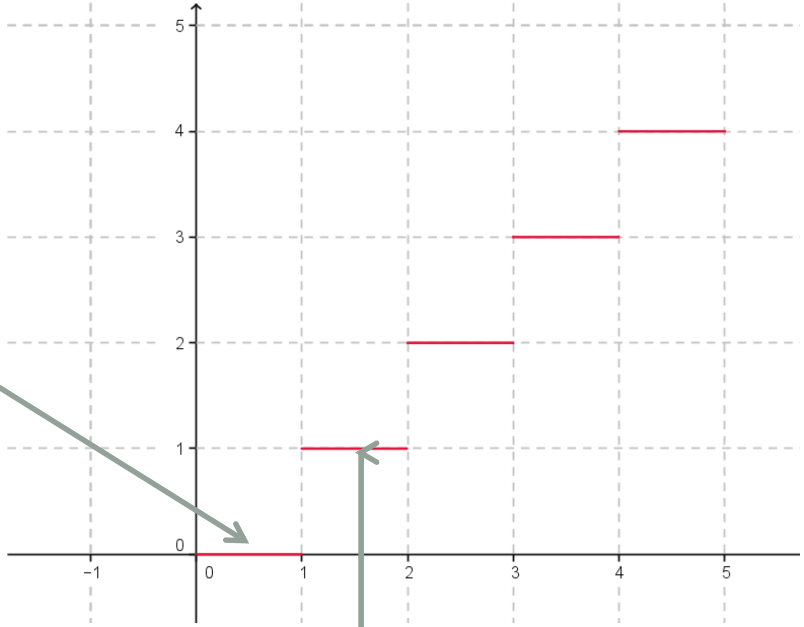
Ejemplo I

- Parte entera de un número: $f(x) = parte\_entera(x)$

Nota:

Los números comprendidos entre 0 y 1 (sin incluir éste último), su parte entera es 0.

Los números comprendidos entre 1 y 2 (sin incluir éste último) su parte entera es 1….



Simetría: función par

- Si una función verifica que $f(-x)=f(x)$ para cualquier valor x de su dominio, entonces se dice que la función ***f* es par**.

- La importancia geométrica de que una función sea par es que su gráfica es simétrica respecto el eje OY.

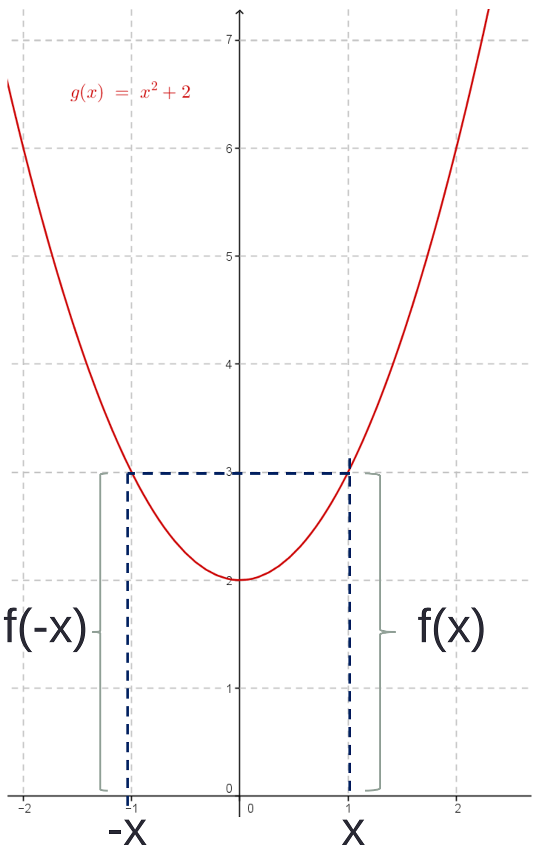
- Por tanto, si somos capaces de dibujar la función para $x>0$, por reflexión, podremos dibujar la función para los valores de x negativos.

Simetría, función impar

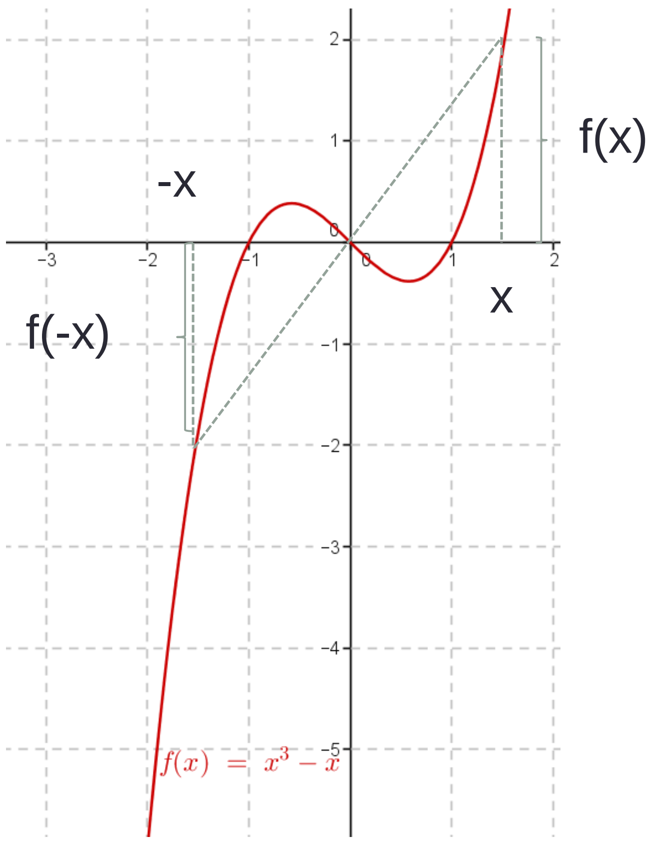
- Si se verifica que $-f(x)=f(-x)$ para cualquier valor x del dominio de la función, se dice que la función **es impar**.
- La importancia geométrica de que una función sea impar es que su gráfica es simétrica respecto el eje origen de coordenadas.
- Por tanto, si somos capaces de dibujar la función para x>0, realizando un giro de 180º con centro el origen de coordenadas seremos capaces de dibujar la función.

Ejemplo I: función par, función impar

La función $f(x) = x^2 + 2$ es par pues,
$f(-x) = (-x)^2 + 2 = x^2 + 2 = f(x)$



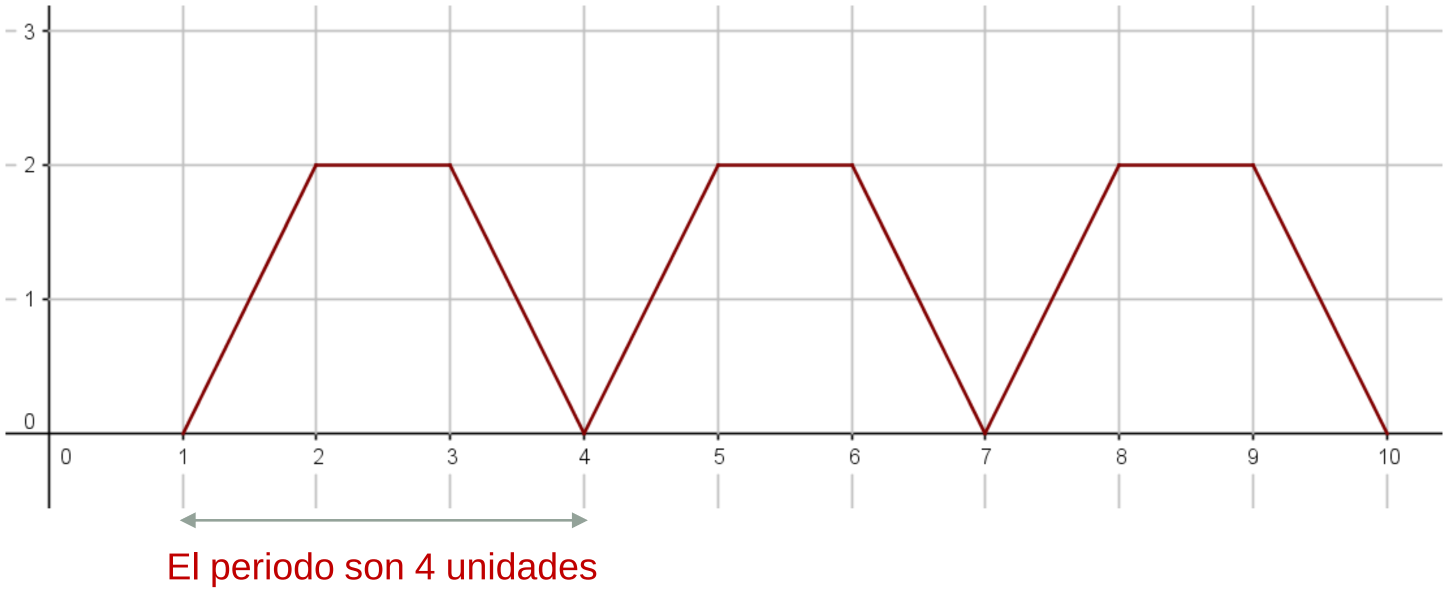
La función $f(x) = x^3 - x$ es impar pues,
$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x)$



Funciones periódicas

Una función se dice periódica si tiene la misma imagen a intervalos regulares de la variable independiente.

Una función **f(x)** es periódica si existe un número **p** tal que pueda hacer **f(x+p) = f(x)** para todas las **x**. Al menor número **p** se le llama período.



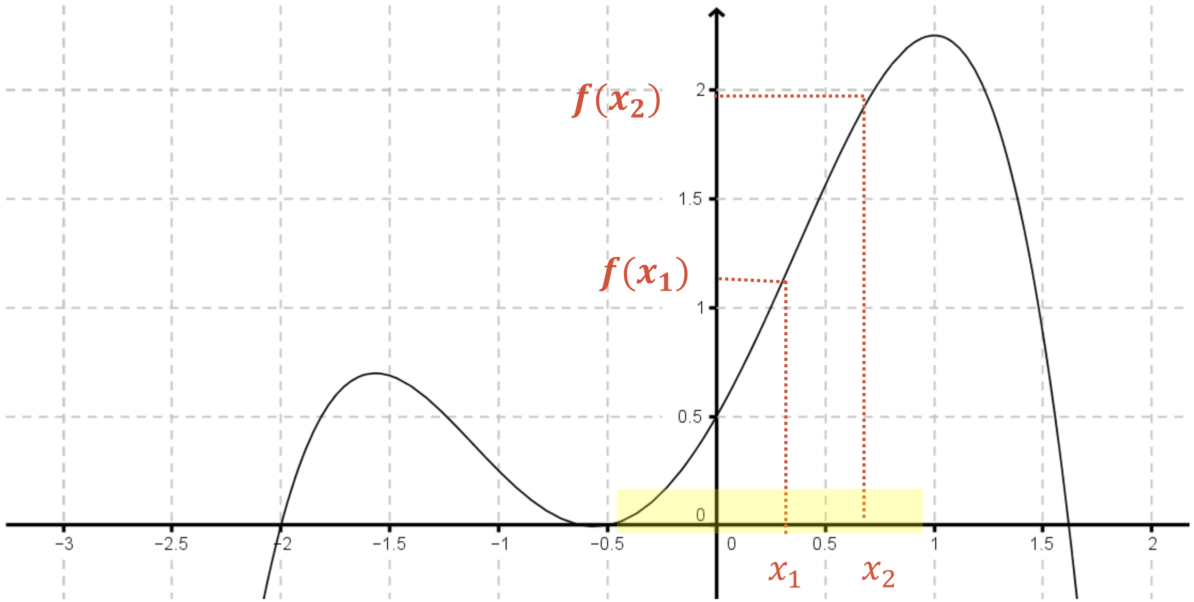
Crecimiento de una función

- Una función ***f*** se dice que **crece** en un intervalo ***I*** si $f(x_1) < f(x_2)$ cualesquiera $x_1 < x_2$ valores que pertenezcan al intervalo ***I*****.**

- Una función ***f*** se dice que **decrece** en un intervalo ***I*** si $f(x_1) > f(x_2)$ cualesquiera $x_1 < x_2$ valores que pertenezcan al intervalo ***I*****.**

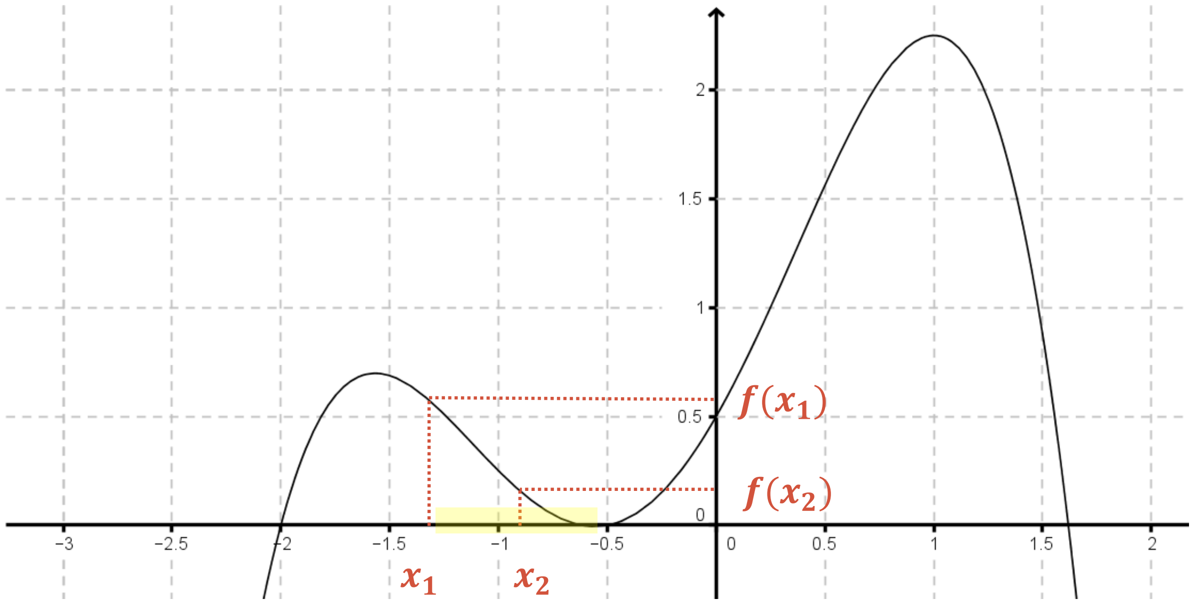
Ejemplo: función creciente en un intervalo

Esta función en el intervalo (-0'5,1) es creciente, pues verifica para cualquier par de puntos que se encuentren en el intervalo que la "**imagen del mayor es mayor que la imagen del menor**"



Ejemplo: función decreciente en un intervalo

Esta función en el intervalo (-1’5,-0’5) es decreciente, pues verifica para cualquier par de puntos que se encuentren en el intervalo que la “**imagen del mayor es menor que la imagen del menor**”



RECTAS

La recta $y = mx$

- Todas las funciones que están definidas algebraicamente por $y = mx$ tienen como gráfica una línea recta y se denomina ***función lineal***.

- El valor m se denomina pendiente de la recta y representa la inclinación de la recta respecto del eje de abscisas. Este valor distingue una función lineal de otra.

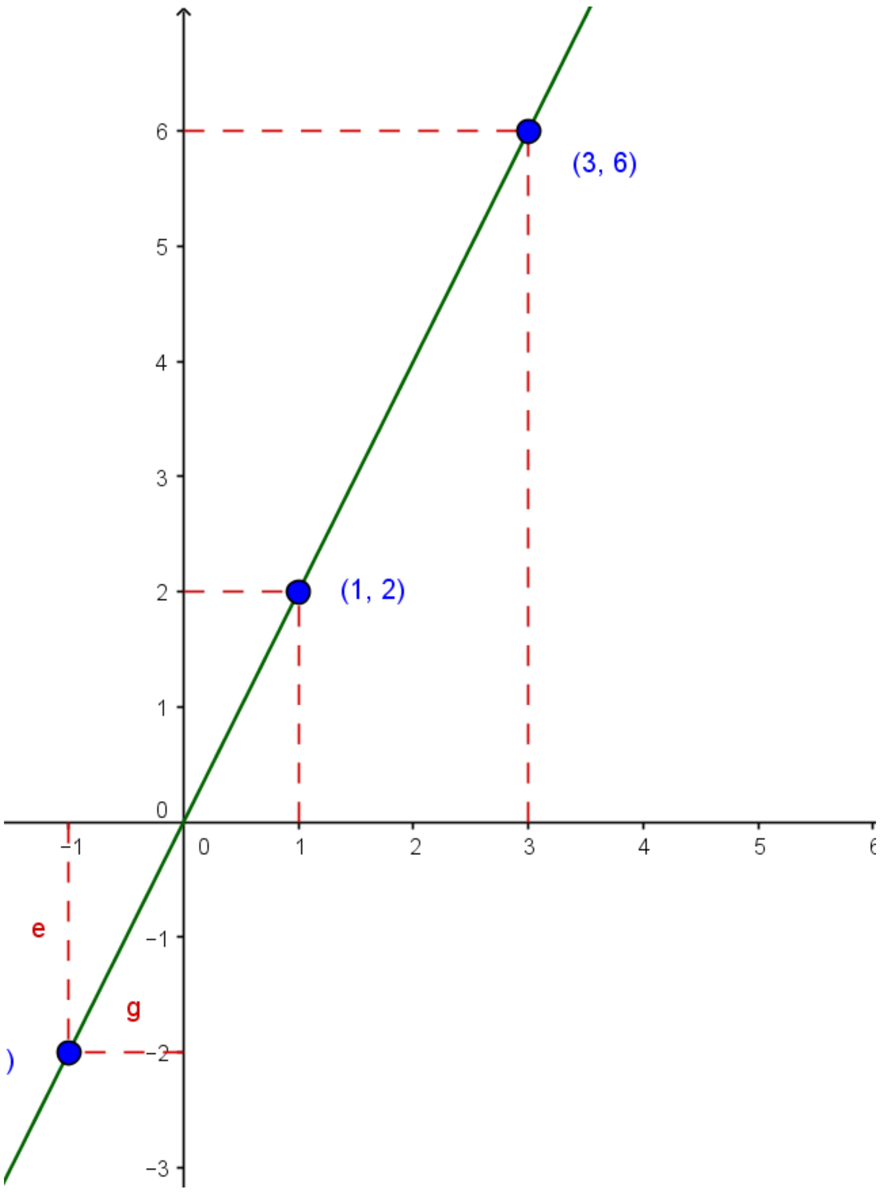
- El valor m se obtiene como cociente de la distancia de dos valores del conjunto imagen (eje de ordenadas) y la distancia de los valores del conjunto origen (eje de abscisas)

Ejemplo

La función $f(x) = 2x$ tiene 2 de pendiente. Por cada unidad que aumenta x, la imagen (y) aumenta el doble

Tabla de valores

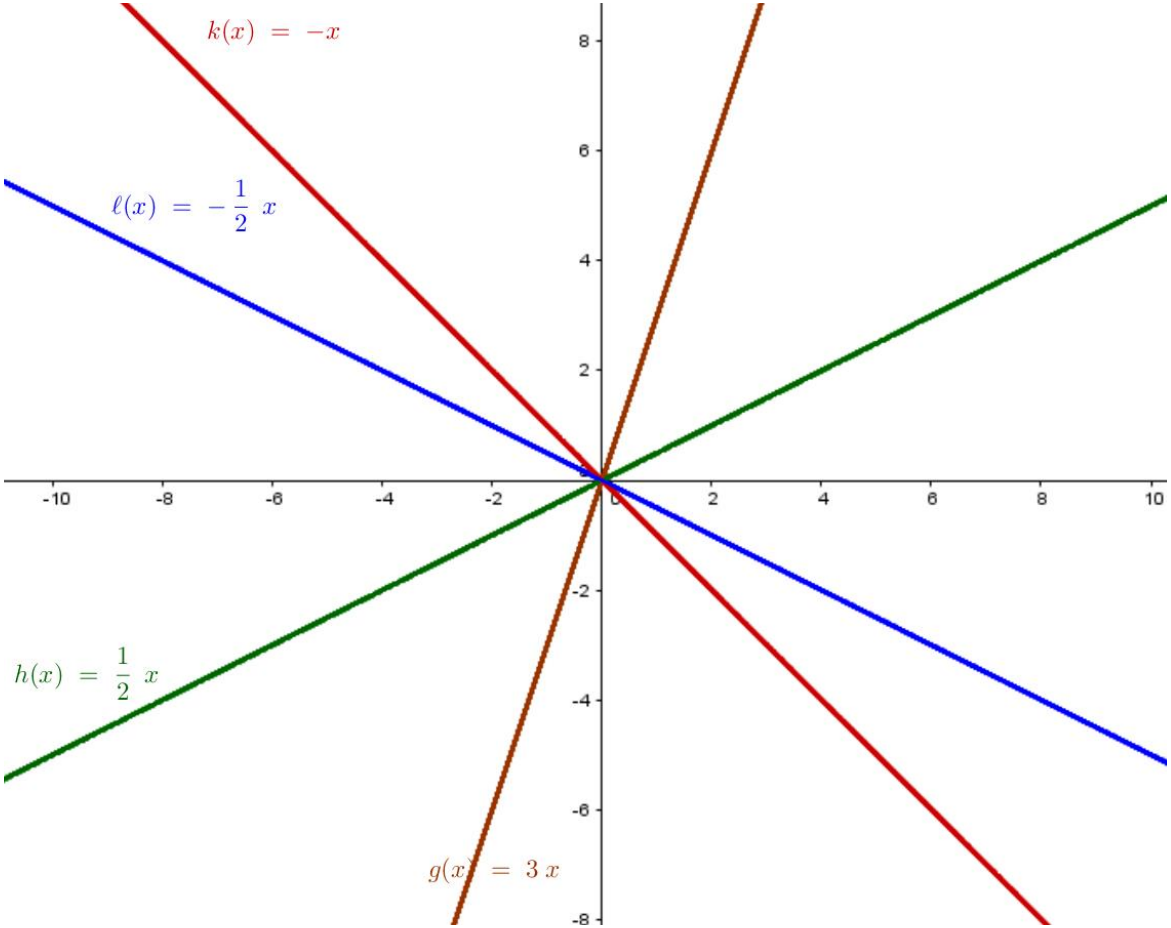
x	f(x)
-1	-2
0	0
1	2
2	4
3	6



Ejemplo

Las rectas a mayor pendiente mayor inclinación

Las rectas que tienen una pendiente negativa son decrecientes.



La recta $y = mx + n$

- Todas las funciones que están definidas algebraicamente por $y = mx + n$ tienen como gráfica una línea recta y se denomina ***función afín***.

- El valor m es la pendiente de la recta.

- El valor n es el valor de la ordenada para $x=0$; se denomina **ordenada en el origen**.

- Si $n=0$ representará la función lineal, si $m=0$ la función es constante, siendo su gráfica una recta horizontal.

Ejemplo

La función $f(x) = 2x + 1$ tiene 2 de pendiente. Por cada unidad que aumenta x, la imagen (y) aumenta el doble

Ordenada en el origen

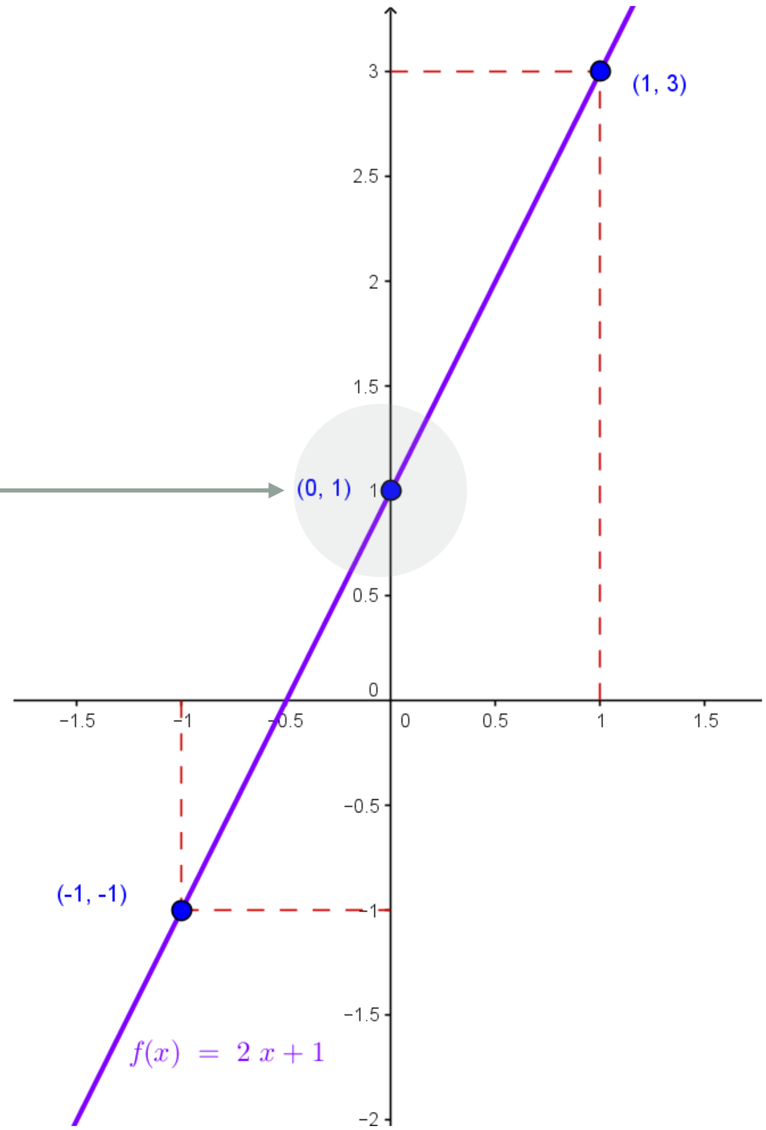
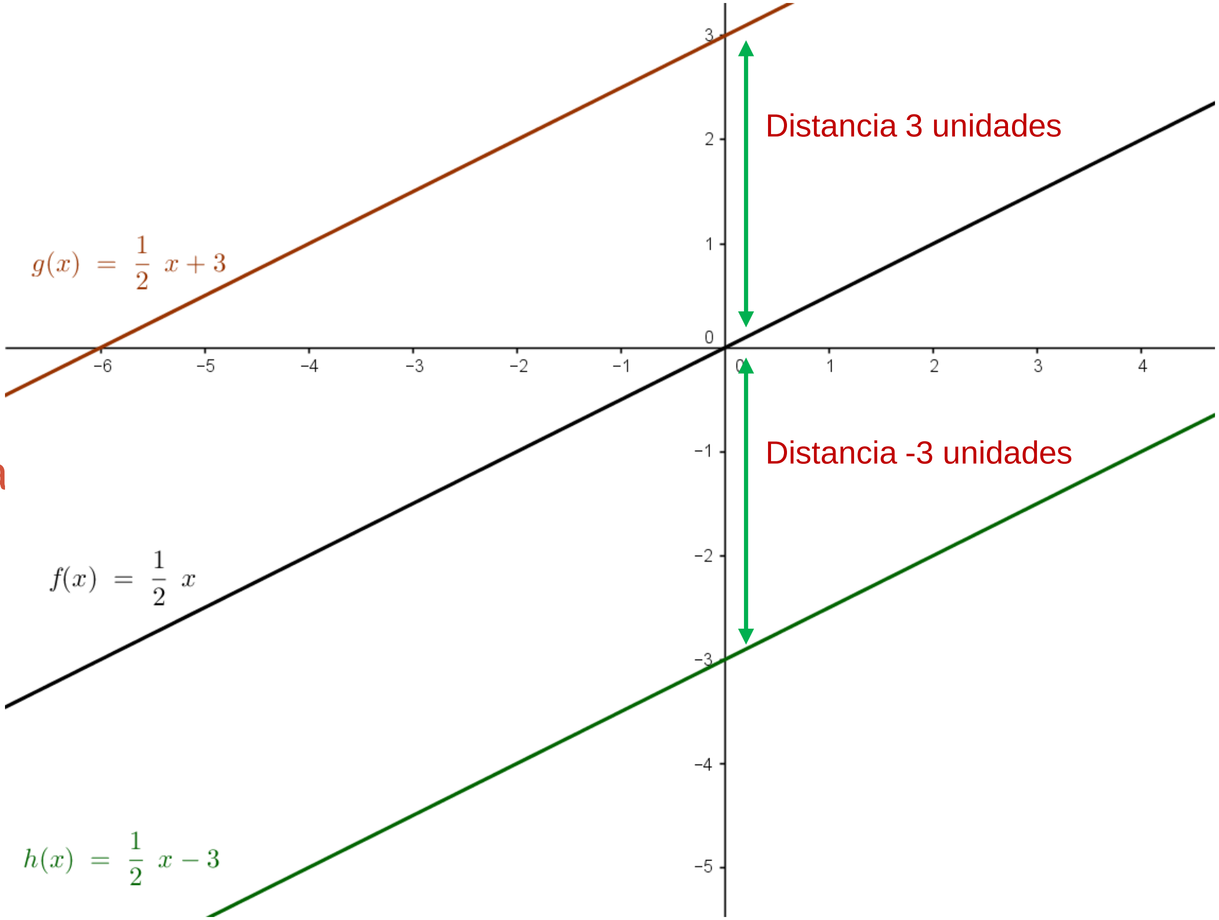


Tabla de valores

x	f(x)
-1	-1
0	1
1	3

Ejemplo

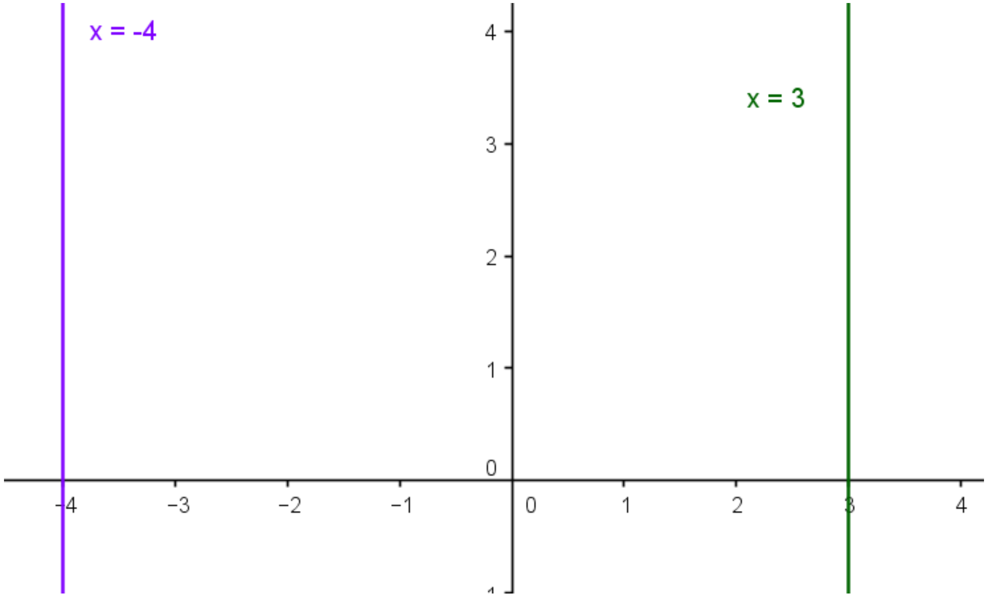
Las tres rectas son paralela pues tienen la misma pendiente.



Rectas que no son funciones

- Las expresiones del tipo ***x = k*** siendo ***k*** una constante se representa como una recta vertical al eje de abscisas que pasa por el punto ***(k,0)***.

- Estas rectas no son funciones, pues un solo valor tiene infinitas imágenes.



LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

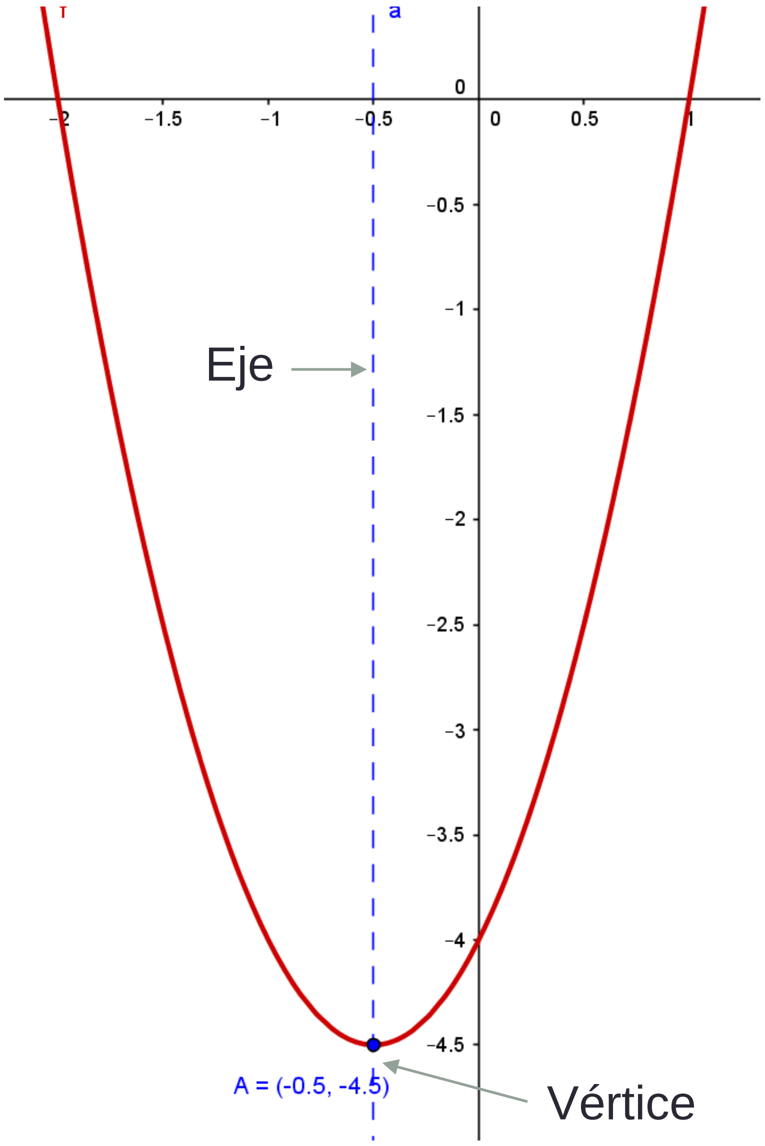
Parábolas

La función cuadrática

- La función cuadrática se encuentra definida por una expresión algebraica que es un polinomio de grado 2.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

- La representación gráfica de estas funciones son parábolas con el eje de la parábola paralelo al eje de ordenadas.



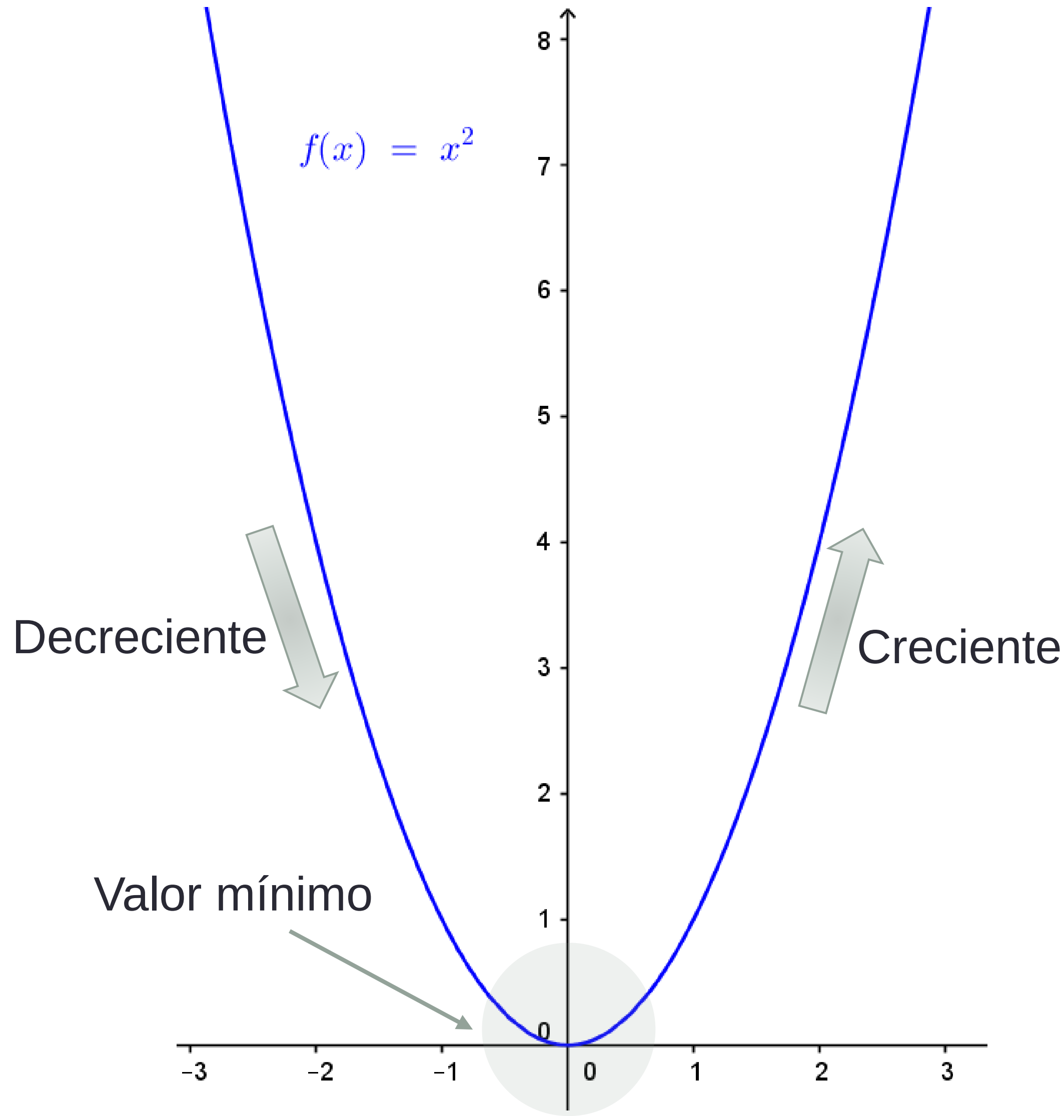
La función $f(x) = x^2$

La función $f(x) = x^2$

- Siempre es positiva
- Es par
- Para valores negativos es decreciente
- Para valores positivos es creciente
- Para x = 0 alcanza su valor mínimo, que es 0.

Tabla de valores

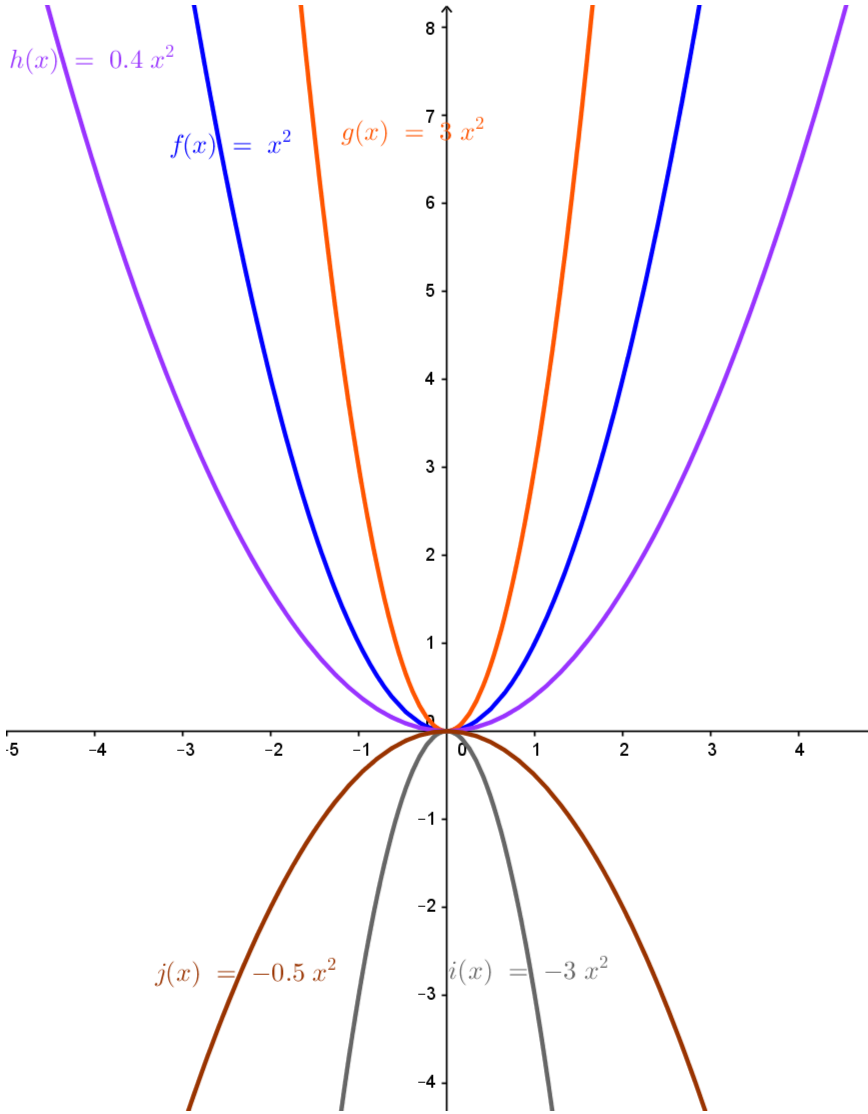
x	f(x)
-3	9
-1,25	1,562
0	0
1	1
2	4



La función *f(x)=kx²*

La función $f(x) = kx^2$ se puede estudiar a partir de $g(x) = x^2$

- Si 0<k<1, la función ***f*** tiene las ramas mas abiertas que ***g***
- Si k > 1, la función ***f*** tiene las ramas mas cerradas que ***g***
- Si k < 0, la función ***f*** invierte las ramas respecto de ***g***
- En todos los casos, el eje de la parábola es el eje de abscisas y el vértice (0,0)

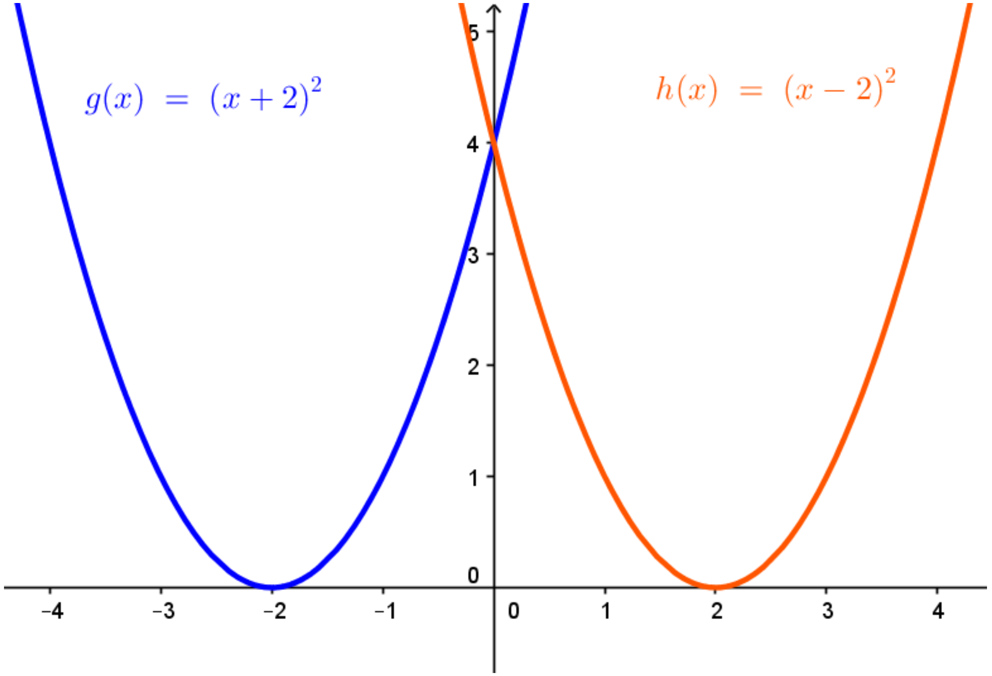


La función $f(x)=(x+k)^2$

La función $f(x) = (x + k)^2$ se puede estudiar a partir de $g(x) = x^2$

- Si k<0, la función ***f*** se desplazará hacia la derecha ***k*** unidades.
- Si k > 0, la función ***f*** se desplazará hacia la izquierda ***k*** unidades.

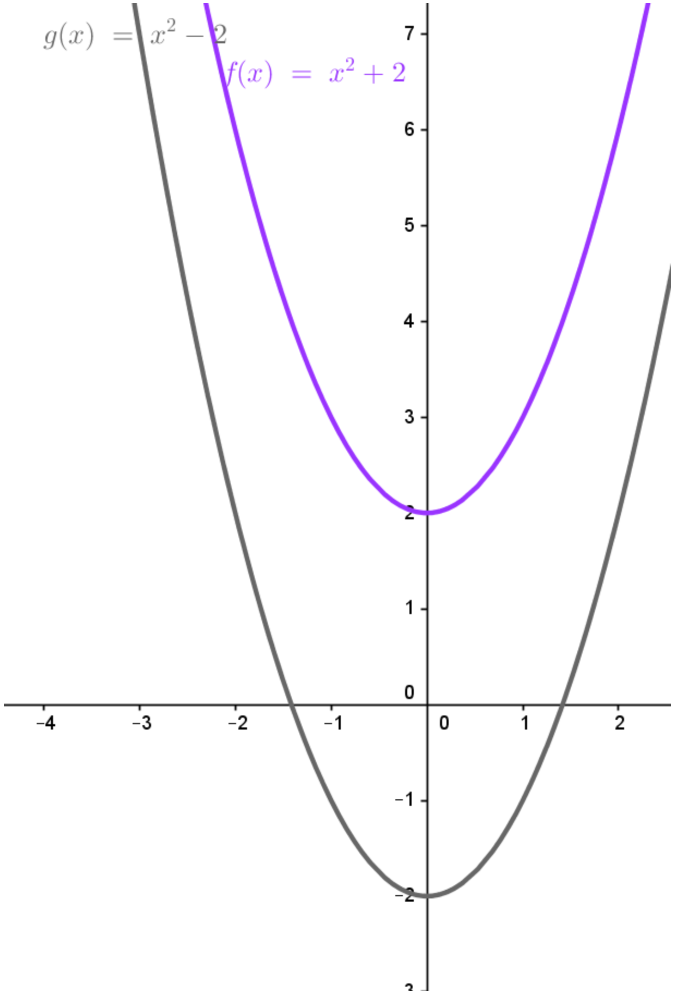
El vértice se desplaza a ***(k,0)*** y el eje de la parábola se traslada a ***x* = *k***



La función *f(x)=x²+k*

La función $f(x) = x^2 + k$ se puede estudiar a partir de $g(x) = x^2$

- Si k<0, la función ***f*** sufrirá un desplazamiento inferior de ***k*** unidades
- Si k > 0, la función ***f*** sufrirá un desplazamiento superior ***k*** unidades.
- El vértice se desplaza a ***(0,k)*** y el eje de la parábola sigue siendo el eje OY



La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$

La función cuadrática completa viene dada por la expresión

$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$

Las propiedades más importantes son:

- Si a > 0 la parábola está abierta hacia arriba
- SI a < 0 la parábola está abierta hacia abajo
- El **vértice** de la parábola es $\boldsymbol{V_p = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)}$
- El **eje** de la parábola es la recta $\boldsymbol{x = -\frac{b}{2a}}$
- Los **puntos de corte** con el eje de abscisas se obtiene resolviendo la ecuación de segundo grado $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$
- El **punto de corte** con el eje de ordenadas es (0,c)

Justificación del cálculo del vértice de una parábola.

$$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a}\right) =}$$

$$\boldsymbol{= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4c - b^2}{4a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4a}{4a}\right)}$$

Desplazamiento horizontal respecto a $f(x)=x^2$

Desplazamiento vertical respecto a $f(x)=x^2$