FUNCIONES DE VARIABLE REAL

Funciones elementales

Modelos matemáticos

Un modelo matemático es una descripción matemática de un fenómeno del mundo real.
El objetivo del modelo es comprender el fenómeno para posteriormente hacer predicciones sobre su comportamiento futuro.
Un buen modelo debe simplificar suficientemente la realidad, pero representativo, de tal forma que proporcione conclusiones certeras.

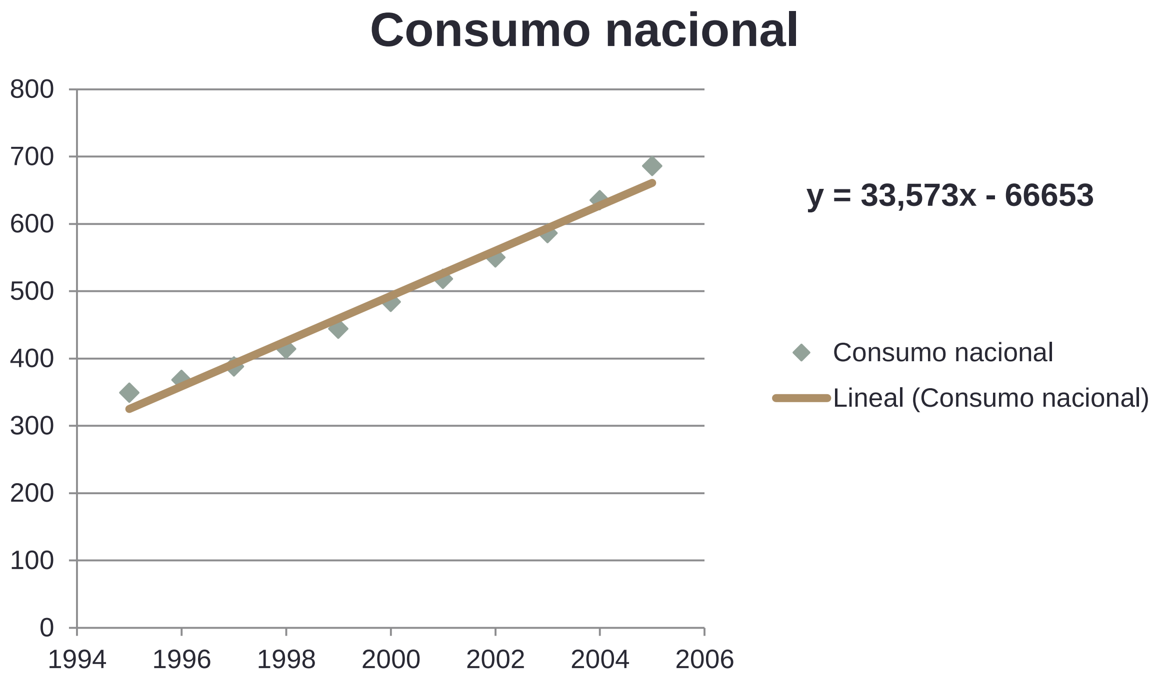
Modelos lineales

- Diremos que ***y*** es una función lineal de ***x***, cuando la gráfica de la función sea una recta.
- Se utiliza la fórmula $y = f(x) = mx + n$, donde ***m*** representa la pendiente de la recta y ***n*** el valor de la ordenada cuando ***x*** vale cero.
- Si m > 0 la recta crecerá, si m< 0 la recta será decreciente.
- Cuanto mayor es el valor absoluto de la pendiente más "inclinada" se encontrará la recta.
- La principal característica de una función lineal es que crece a un ritmo constante.

Ejemplo de modelo lineal.

- Si consideramos la evolución del consumo nacional, durante los años 1995 a 2005, presentes en la tabla:

Año	Consumo nacional
1995	349
1996	368
1997	388
1998	414
1999	444
2000	484
2001	518
2002	550
2003	586
2004	635
2005	686



Funciones polinómicas

Una función es polinómica si tiene la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde *n* es un número entero no negativo.

$a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$ son constantes, denominadas coeficientes del polinomio.

El dominio de una función polinómica es $(-\infty, +\infty)$

Si el polinomio tiene grado 1, la función se corresponde con una función lineal, si tiene grado dos con la función cuadrática cuya representación gráfica se corresponde con una parábola.

Ejemplo: La función cuadrática

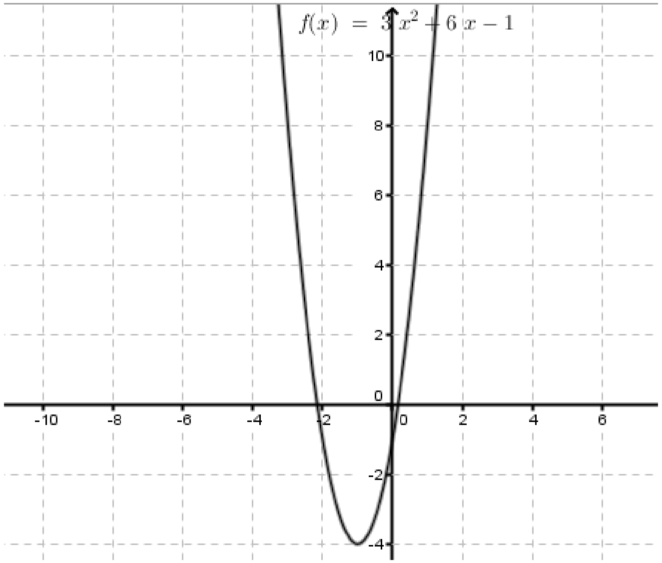
- La función cuadrática tiene asociado un polinomio de grado 2.

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

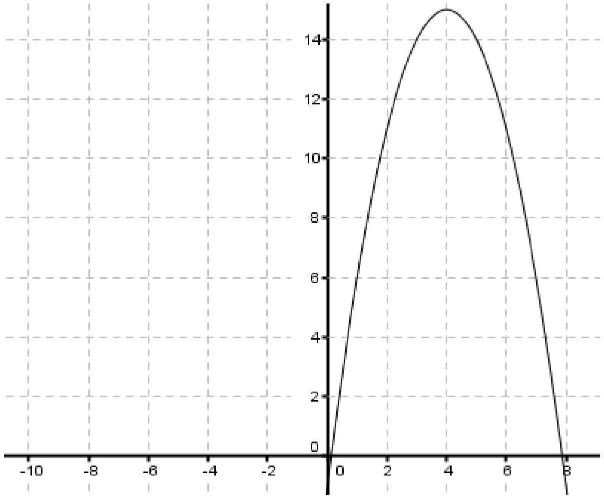
- Su representación gráfica es una parábola, con sus ramas hacia arriba si su coeficiente principal es positivo y ramas hacia abajo si su coeficiente principal es negativo.

- El vértice de la parábola puede calcularse a partir de los coeficientes del polinomio $x = -\frac{a_2}{a_1}$ e $yf = \left(-\frac{a_2}{a_1}\right)$

Gráfica de la función cuadrática



$f(x) = 3x^2 - 6x - 1$

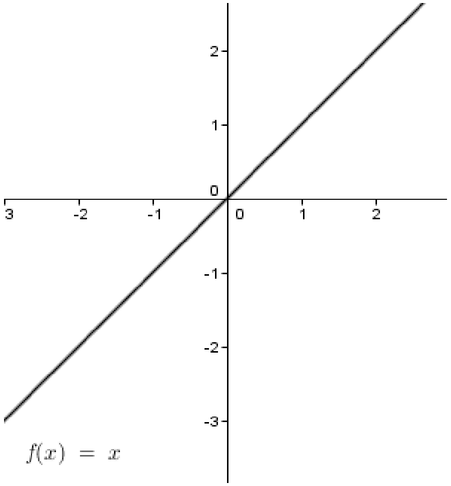


$f(x) = -x^2 + 8x - 1$

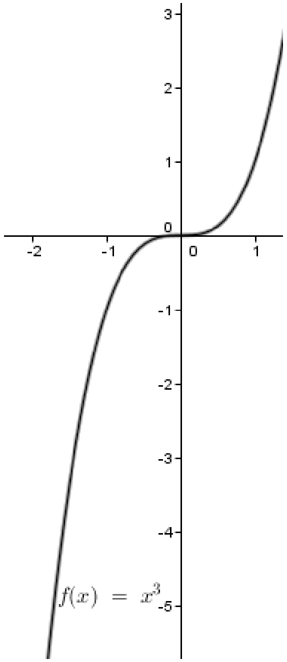
La función potencial $f(x) = x^n$

- La función potencial tiene la forma $f(x) = x^n$, si ***n*** es un número entero positivo.
- La forma de la gráfica de este tipo de funciones depende de si el exponente es par o impar.
- Para n = 1 la gráfica de la función se corresponde con una recta, que coincide con la bisectriz del primer y tercer cuadrante.
- Para n = 2, la gráfica se corresponde con una parábola de vértice el origen de coordenadas

Gráficas de la función potencial I

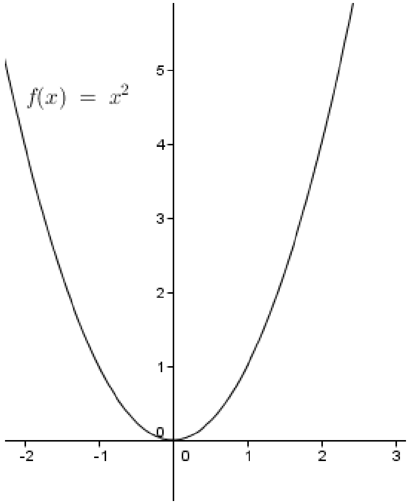


$f(x) = x$

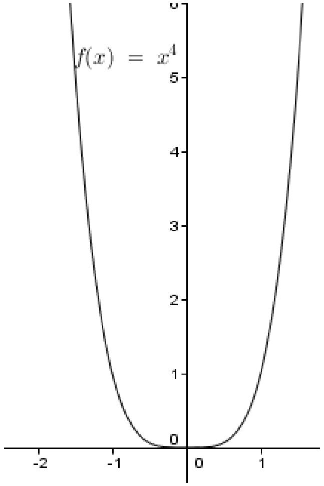


$f(x) = x^3$

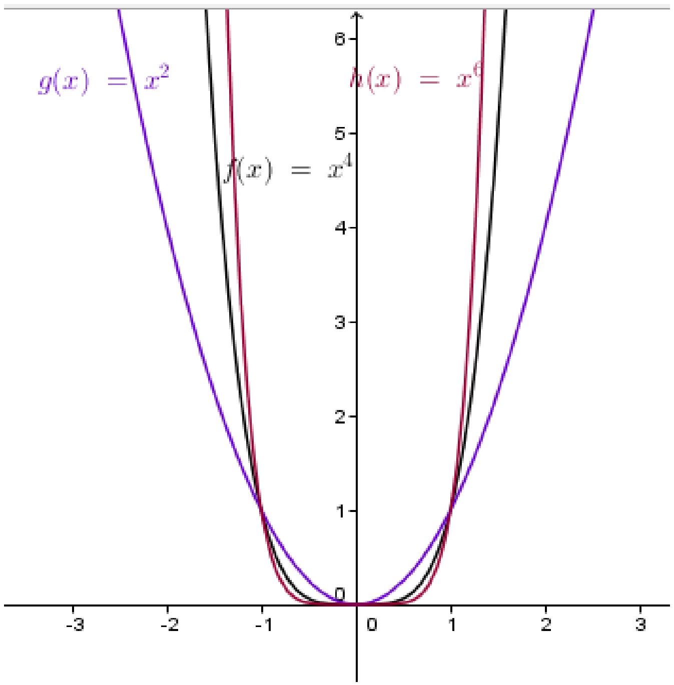
$f(x) = x^2$



$f(x) = x^4$

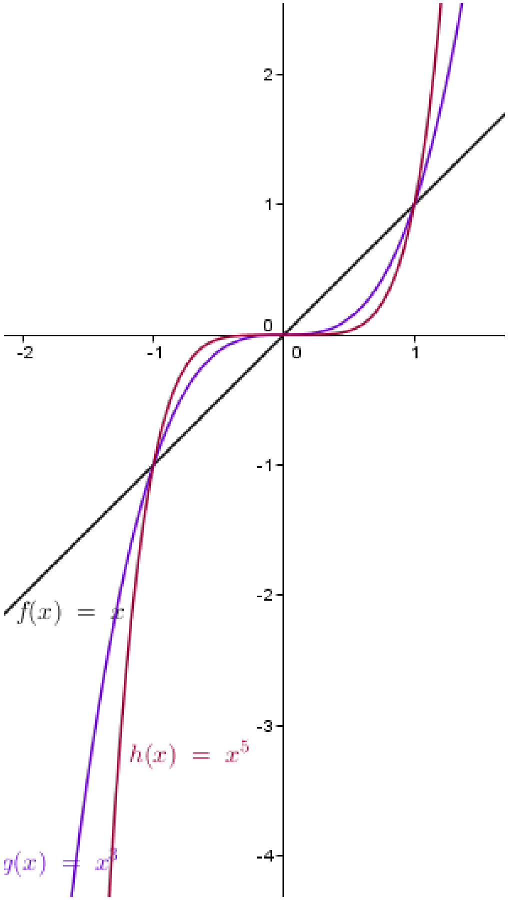


Gráficas de la función potencial II



Familia de funciones potenciales con exponente par

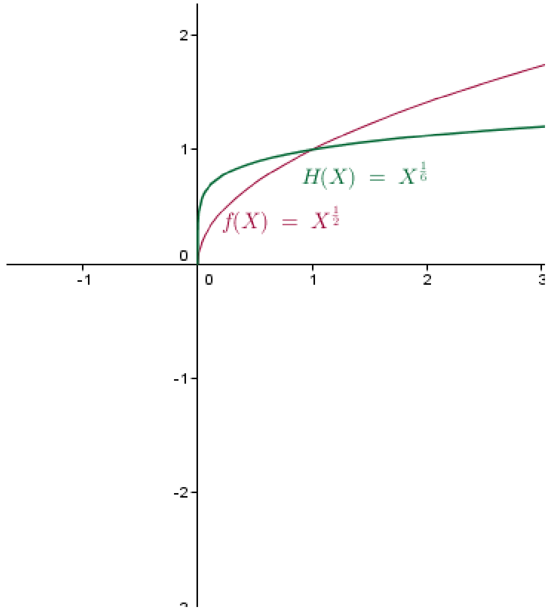
Familia de funciones potenciales con exponente impar



La función raíz $f(x) = x^{1/n}$

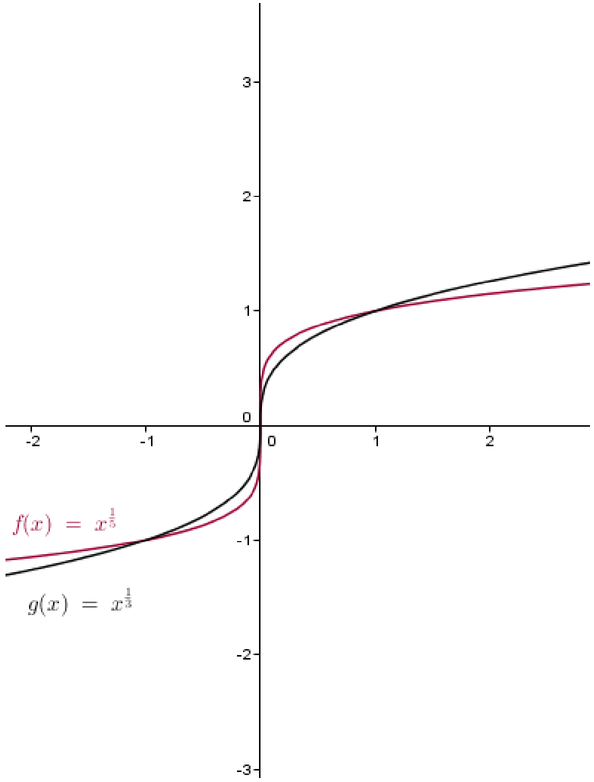
- La función $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$, donde n es un entero positivo, representa la raíz n-ésima de un número.
- Cuando *n=2*, tenemos la raíz cuadrada, cuyo gráfico es la mitad superior de la parábola $\mathrm{x} = y^2$. El dominio de esta función comprende el cero y todos los reales positivos.
- Cuando *n=3*, tenemos la función raíz cúbica, cuyo dominio son todos los números reales (la raíz cúbica de un número existe siempre).
- De forma similar a como ocurre con la función potencial, la representación de la función raíz es similar entre aquellas que tienen exponente impar y par.

Gráficas de la función raíz



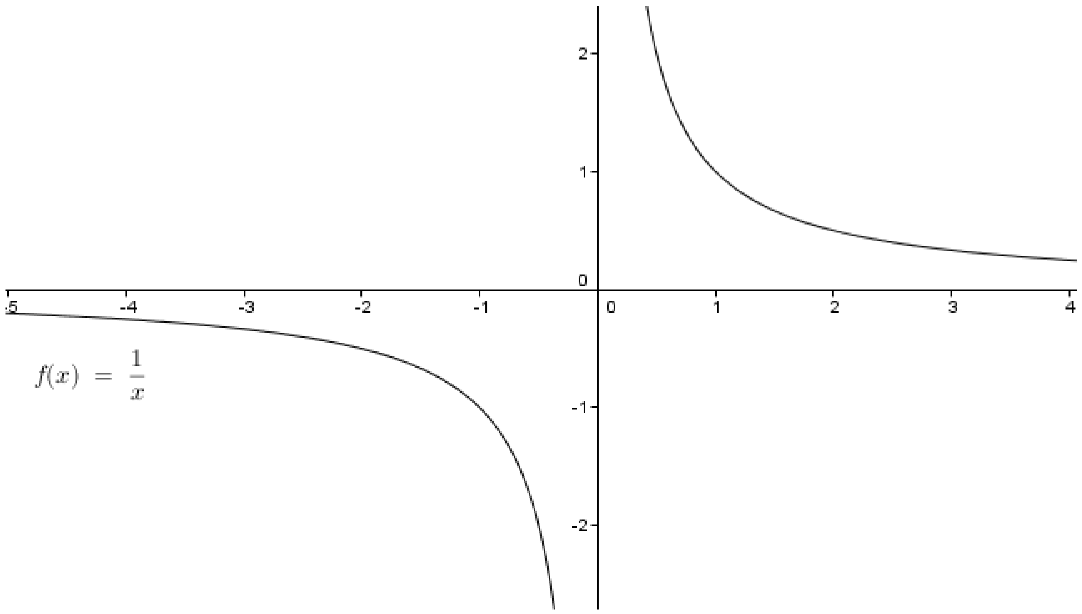
Familia de la función raíz con exponente par

Familia de la función raíz con exponente impar



La función $f(x) = \frac{1}{x}$

- Su representación es una hipérbola equilátera y su dominio es todos los números reales salvo el cero.



Funciones racionales

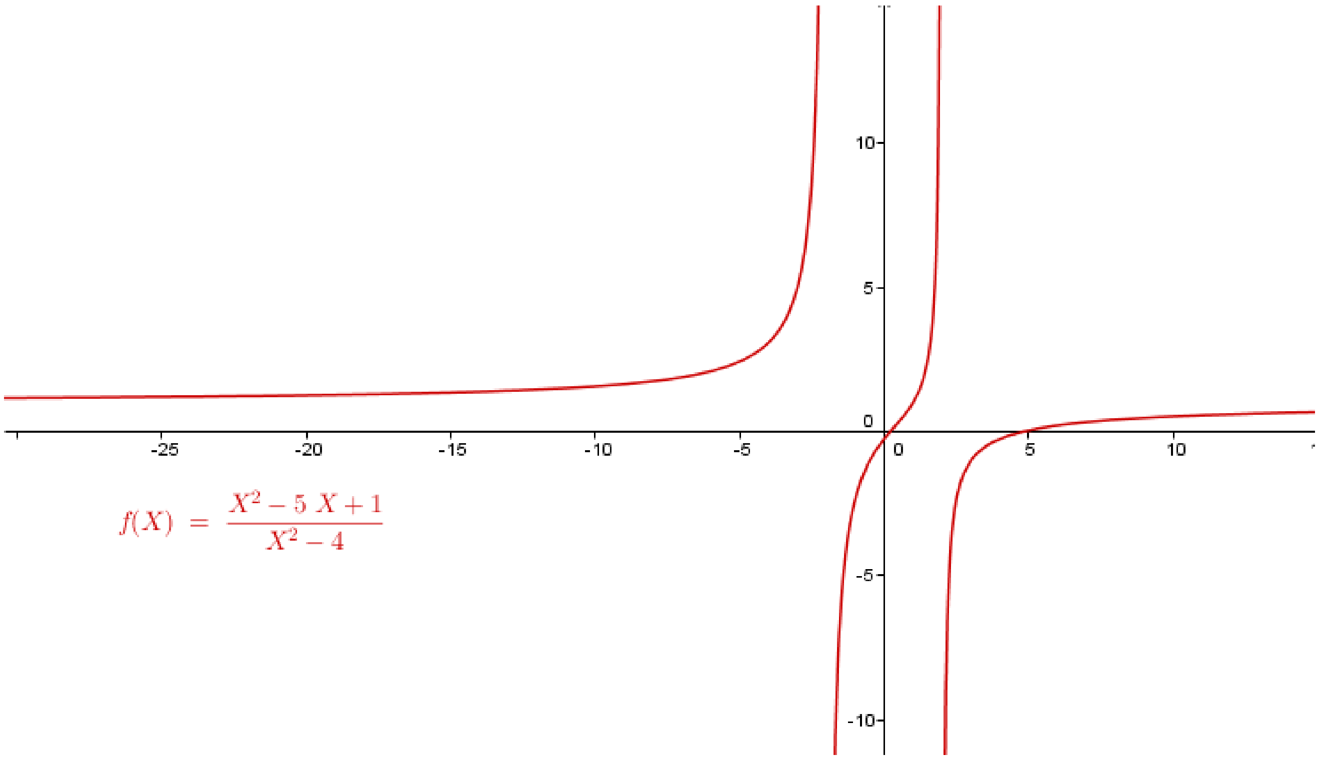
- Una función racional es un cociente entre dos polinomios.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

- El dominio de la función serán todos los números reales salvo las raíces del polinomio denominador.

- Por ejemplo, la función $f(x) = \frac{x^2-5x+1}{x^2-4}$, no se encontrará definida para los valores *2* y *-2*, raíces del polinomio denominador.

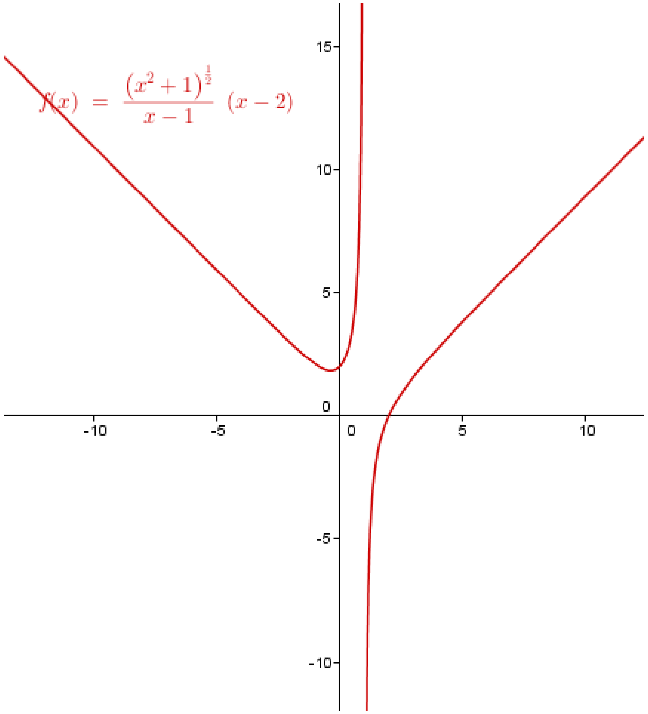
Ejemplo de función racional

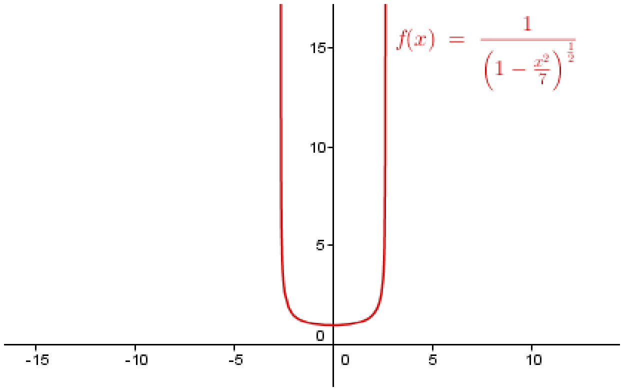


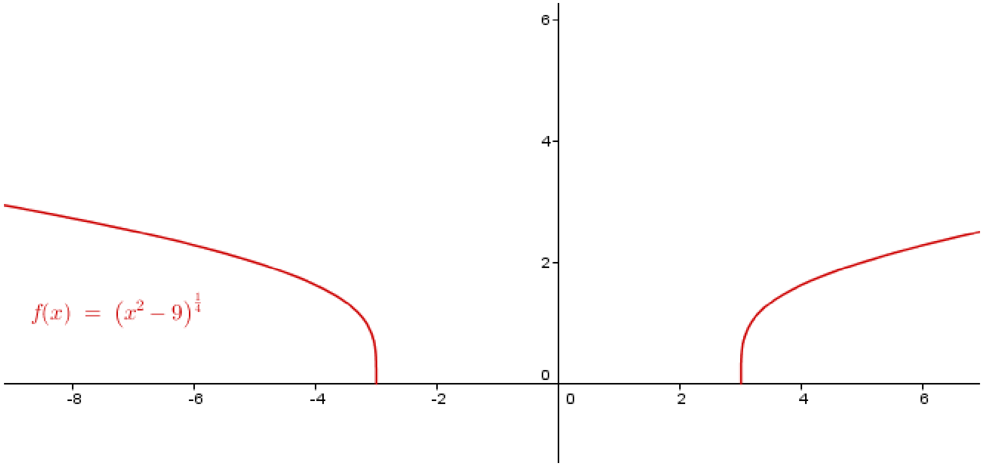
Funciones algebraicas

- Una función se denomina algebraica cuando se encuentra construida utilizando operaciones algebraicas (sumas, productos, potencias, raíces etc.).
- Todas las funciones racionales también son algebraicas.
- Sus gráficas no siguen un patrón uniforme.

Ejemplo de funciones algebraicas



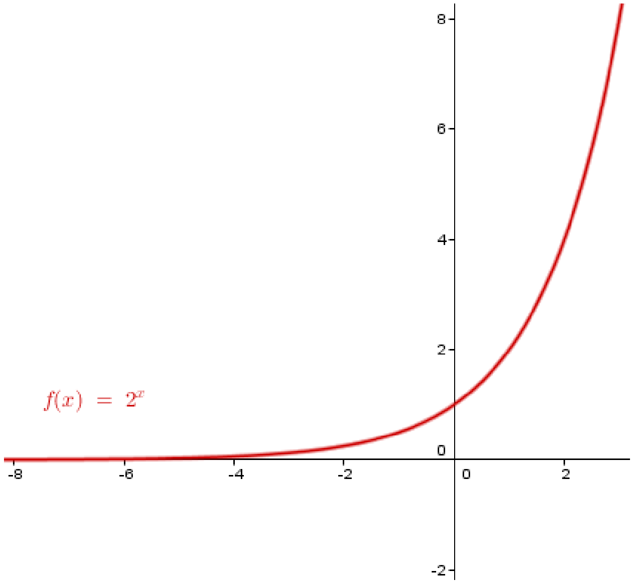




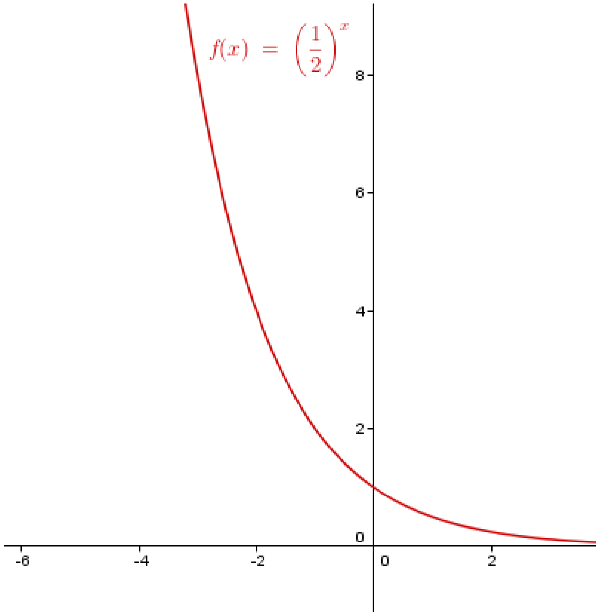
Funciones exponenciales

- Una función exponencial tiene la forma $f(x) = a^x$ donde *a* es una constante positiva.
- Este tipo de función tiene por dominio todos los números reales y por rango los números reales positivos.
- Si $0 < a < 1$ la función es decreciente para todos los números reales
- Si $a > 1$, la función es creciente para todos los números reales.

Ejemplo de funciones exponenciales



$$f(x) = 2^x$$

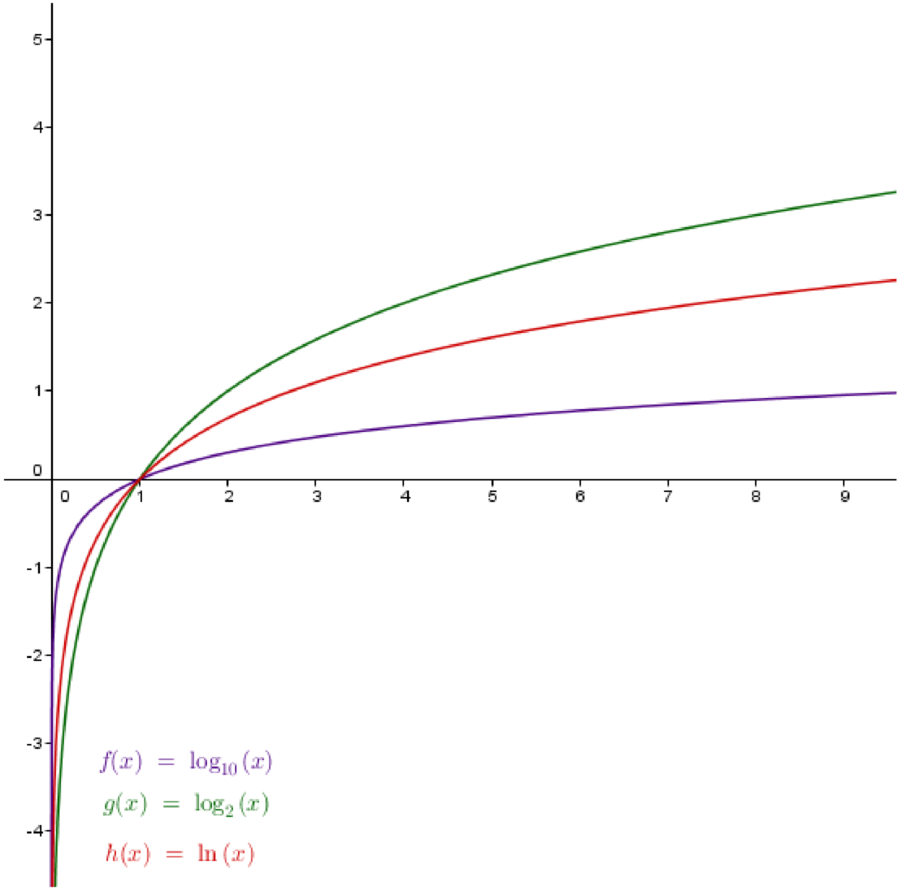


$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Función logarítmica

- La función logarítmica $f(x) = log_a x$, donde la base *a* es una constante positiva, es la función inversa de la función exponencial.
- Esta función tiene por dominio todos los números reales mayores que cero.
- El rango de esta función son todos los números reales.
- Todas las funciones logarítmicas pasan por el punto (1,0), al ser 1 cualquier número elevado a 0.

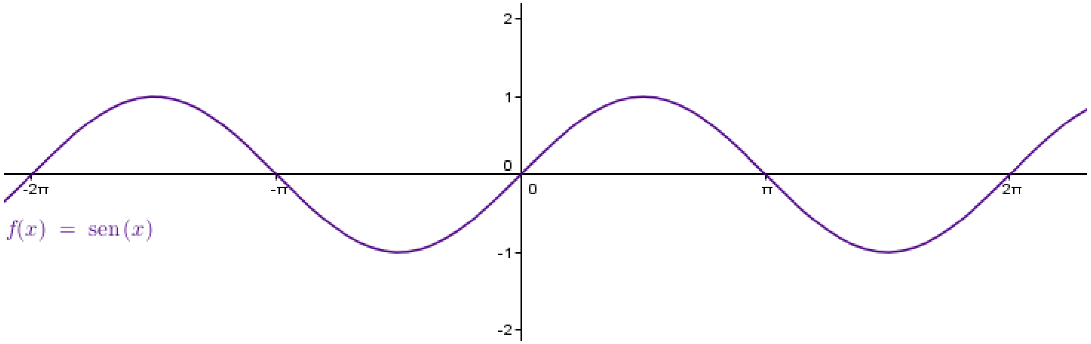
Función logarítmica, ejemplos

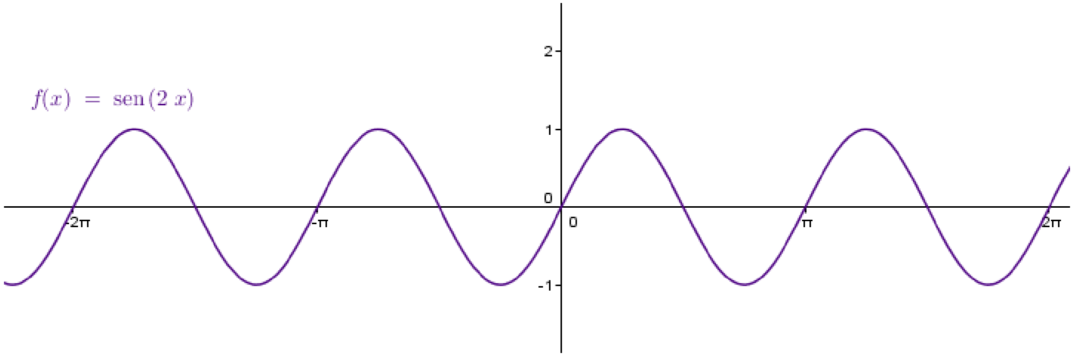


Funciones trigonométricas: la función seno

- La función seno es periódica, siendo el periodo 2π.
- El valor máximo es 1 y lo alcanza en $x = \frac{\pi}{2}$
- El valor mínimo es -1 y lo alcanza en $x = \frac{3\pi}{2}$
- El recorrido es $[-1,1]$ y el dominio todo el conjunto de los números reales
- Se trata de una función impar $sen(-x) = -sen(x)$

Ejemplos: función seno

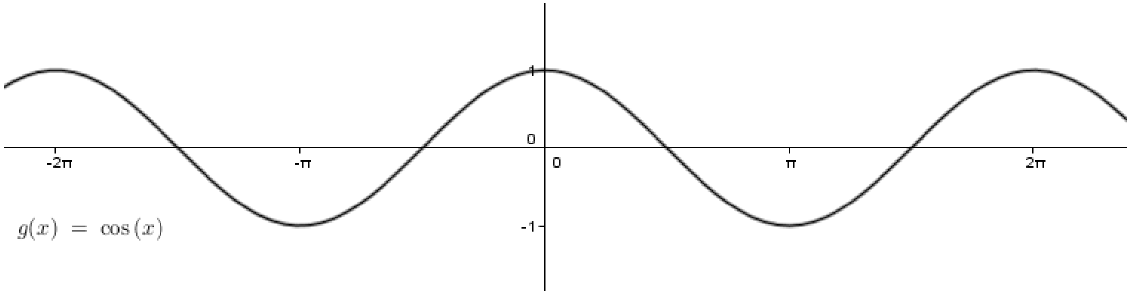


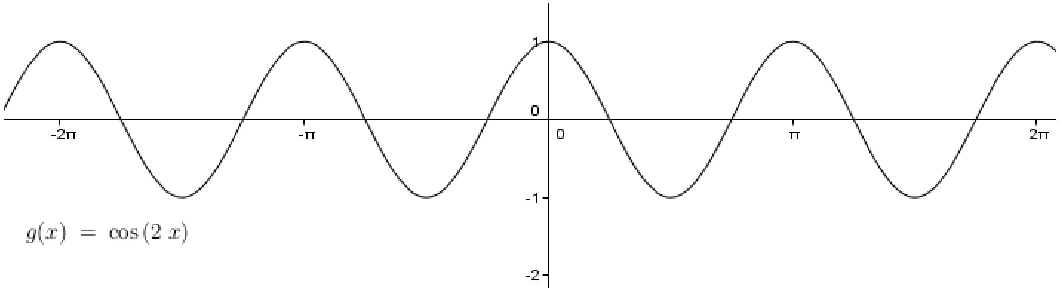


Funciones trigonométricas: la función coseno

- La función coseno es periódica, siendo el periodo 2π.
- El valor máximo es 1 y lo alcanza en $x = 0 \; o \; x = 2\pi$
- El valor mínimo es -1 y lo alcanza en $x = \pi$
- El recorrido es $[-1,1]$ y el dominio todo el conjunto de los números reales
- Se trata de una función par $\cos(-x) = cos(x)$

Ejemplos: función coseno





Funciones trigonométricas: la función tangente

- La función tangente es periódica, siendo el periodo π.
- La función tangente no está acotada, siendo su rango todos los números reales
- La función no se encuentra definida en los puntos del tipo

$$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$$

- Se trata de una función impar $\mathrm{tg}(-x) = -tg(x)$

Ejemplos: función tangente