LÍMITE Y CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Límites y continuidad de funciones

Definición de límite de una función en ***a*** (informal)

Supongamos que *f(x)* se encuentra definida en un entorno del número ***a*** (es posible que la función no se encuentre definida en ***a***, pero si en un intervalo que lo contiene). Entonces, escribimos:

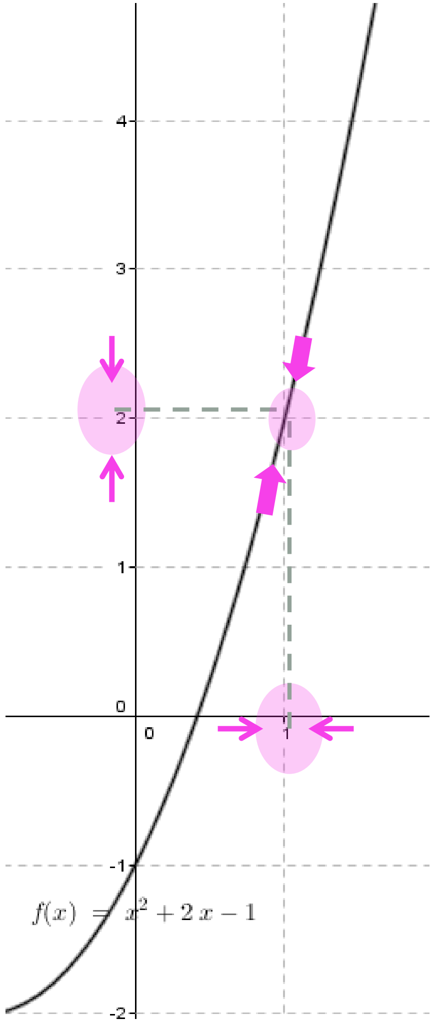
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y se lee *"el límite de f(x) cuando, x se aproxima a* ***a****, es igual a* ***L".***

Si podemos hacer los valores de f(x) arbitrariamente cercanos a ***L,*** tomando valores de x suficientemente cercanos a ***a***

Ejemplo

$f(x) = x^2 + 2x - 1 \; en \; x = 1$



$$\lim_{\boldsymbol{x \to 1}} \boldsymbol{x^2 + 2x - 1 = 2}$$

x	f(x)
0,9	1,61
0,99	1,9601
0,999	1,996001
0,9999	1,99960001
0,99999	1,99996
0,999999	1,999996
0,9999999	1,9999996
0,99999999	1,99999996

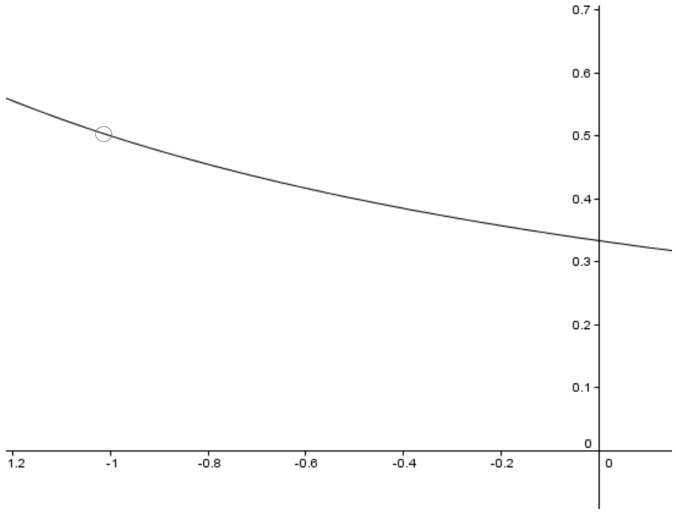
Valores cercanos a ***x=1*** por la izquierda

x	f(x)
1,1	2,41
1,01	2,0401
1,001	2,004001
1,0001	2,00040001
1,00001	2,00004
1,000001	2,000004
1,0000001	2,0000004

Valores cercanos a ***x=1*** por la derecha

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+2)^2-1}$$



La función no se encuentra definida para x=-1 (no pertenece al dominio de la función por hacer 0 el denominador)
Sin embargo, estudiando la tabla de valores el límite es 0,5

x	f(x)	x	f(x)
-0,9	0,47619048	-1,1	0,52631579
-0,99	0,49751244	-1,01	0,50251256
-0,999	0,49975012	-1,001	0,50025013
-0,9999	0,499975	-1,0001	0,500025
-0,99999	0,4999975	-1,00001	0,5000025
-0,999999	0,49999975	-1,000001	0,50000025
-0,9999999	0,49999998	-1,0000001	0,50000003

Límites laterales (definición informal)

Notaremos por $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

y diremos que el límite por la izquierda de ***a es L,*** si podemos hacer los valores de *f(x)* tan cercanos a ***L*** tomando valores de *x* cercanos a ***a***, pero dichos valores siendo menores que ***a***.

Notaremos por $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

y diremos que el límite por la derecha de ***a es L,*** si podemos hacer los valores de *f(x)* tan cercanos a ***L*** tomando valores de *x* cercanos a ***a***, pero dichos valores siendo mayores que ***a***.

Relación entre el límite y los límites laterales

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ **Sí y sólo sí** $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ **y** $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$

Ejemplo (límites laterales)

$$f(x) = \begin{cases} -1, si\ x < 0 \\ +1, si\ x > 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x \to 0^+} f(x) = +1}$$

Existen los límites laterales, pero no el límite en x = 0

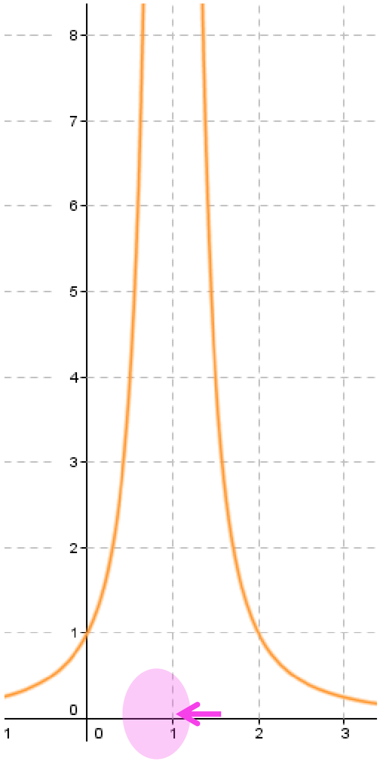
Límites infinitos (definición informal)

Sea ***f*** una función definida a ambos lados de ***a***, excepto posiblemente en ***a***. Entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Significa que los valores de ***f(x)*** pueden ser arbitrariamente grandes, es decir, tan grandes como deseemos, tomando un valor ***x*** suficientemente cerca de ***a***, pero no igual a ***a***.

Ejemplo: $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$



x	F(x)
1,01	10000
1,001	1000000
1,0001	100000000
1,00001	10000000000
1,000001	1000000000164,530
1,0000001	99999999883226,600
1,00000001	10000000121549400,000

Para valores cercanos al valor 1 por la derecha los valores de la imagen se hacen tan grandes como queramos

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

Cálculo de límites utilizando las propiedades de los límites I

Supongamos que *k* es una constante y que existen los siguientes límites: $\lim_{x \to a} f(x)$ $\lim_{x \to a} g(x)$

Entonces:

$$\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a}(f(x) - g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} K \cdot f(x) = K \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

$$\lim_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a}(f(x) / g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) / \lim_{x \to a} g(x) \; si \; \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

Cálculo de límites utilizando las propiedades de los límites II

De las anteriores propiedades se obtienen las siguientes

$$\lim_{x \to a} (f(x))^n = (\lim_{x \to a} (f(x)))^n \qquad \lim_{x \to a} x = a \qquad \lim_{x \to a} c = c$$

Propiedad de substitución directa

Si *f* es una función polinómica o racional y *a* pertenece al dominio de *f*, entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Si *f(x)* = *g(x)* cuando *x es* distinto de a y supuesto que el límite existe, entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$$

Ejemplos I

Cálculo del límite de una función polinómica

$$\lim_{x\to 2} 2x^2 - 5 = \lim_{x\to 2} 2x^2 - \lim_{x\to 2} 5 = 2 \cdot 2^2 - 5 = 3$$

Cálculo del límite de una función racional (el valor de *x* pertenece al dominio de la función)

$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^3+1}{x^2+1} = \frac{\lim_{x\to -1} 2x^3 + 1}{\lim_{x\to -1} x^2 + 1} = \frac{2(-1)^3+1}{(-1)^2+1} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Cálculo del límite de una función racional cuando se anula el numerador y el denominador

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

Ejemplos II

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+4}+2}{\sqrt{x^2+4}+2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

En este cálculo de límite se ha procedido a multiplicar el numerador y el denominador del cociente de fracciones, para poder simplificar. Posteriormente al evaluar, se ha obtenido el valor del límite.

CONTINUIDAD

Definición

- Una función *f* es continua en *x* = *a* si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

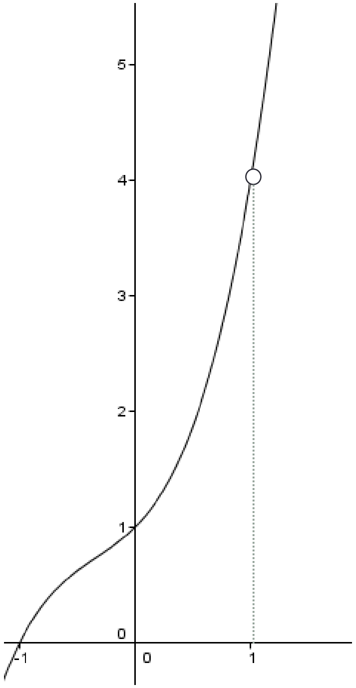
Es importante hacer notar que la anterior definición implica lo siguiente:

*f se encuentra definida en **a**, es decir, **a*** pertenece al dominio de *f.*

Qué existe $\lim_{x \to a} f(x)$

Qué $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Ejemplos I



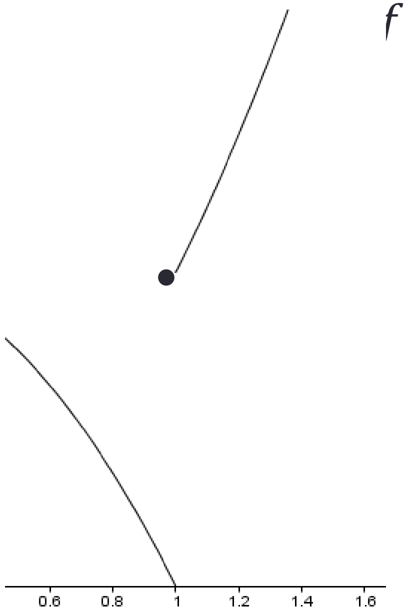
$$g(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1}$$

g no se *encuentra definida en **1**, es decir, **1*** no pertenece al dominio de *g, por tanto,* esta función es discontinua en ***1***, aún cuando el límite de esta función existe para *x = 1*

Este tipo de discontinuidad se denomina evitable, pues redefiniendo la función en el valor x=1 obtendríamos una función continua

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x^3 + x^2 + x + 1) = 4$$

Ejemplo II



$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & x < 1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

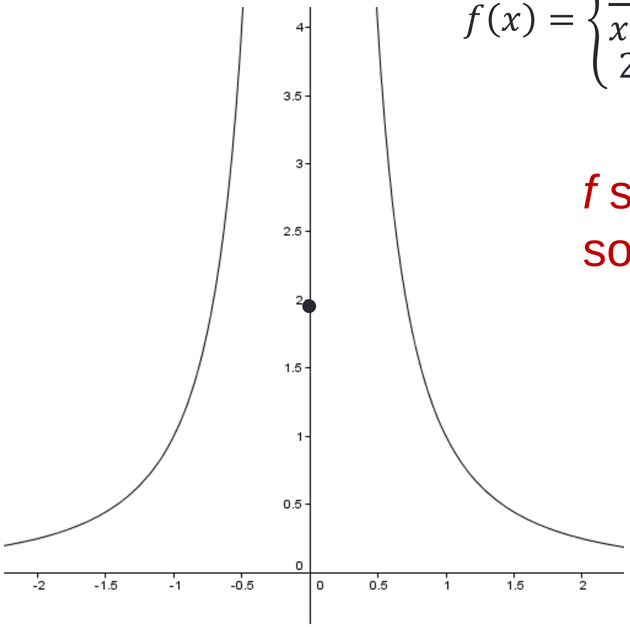
f se encuentra definida en ***1****, es decir,* ***1*** pertenece al dominio de *f,* sin embargo, esta función es discontinua en *1*, pues el límite no existe (los límites laterales son distintos)

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(-x^2 + 1\right) = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 = 1$$

Este tipo de discontinuidad se denomina "de salto", pues la función cambia bruscamente su imagen en un valor

Ejemplo III



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

f se *encuentra definida en* ***0****,* pero los límites laterales son infinito.

Este tipo de discontinuidad se denomina de tipo infinito.

Definición de continuidad en un intervalo

- Una función es continua en un intervalo abierto si es continua en cada uno de los puntos del intervalo.
- Si f y g son dos funciones continuas en ***a*** y ***K*** es una constante, entonces las siguientes funciones son también continuas:

  f + g

  f - g

  f · g

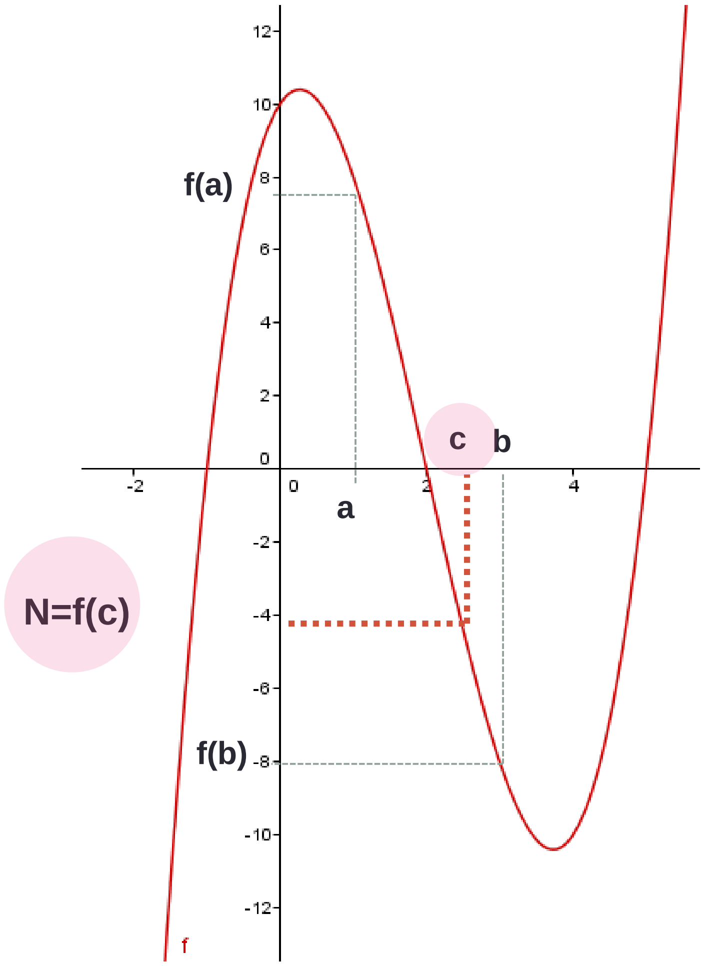
  K·f

  f / g si g(a) distinto de 0.

Teoremas (funciones continuas)

- Cualquier polinomio es continuo en el conjunto de los números reales.
- Cualquier función racional es continua en cualquier punto en la que se encuentre definida, es decir, es continua en su dominio.
- La función raíz es continua en cualquier punto de su dominio.
- Si una función g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces la composición de funciones $f(g(x))$ es continua en a.

Teorema del valor intermedio



Supongamos que *f* es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea *N* cualquier número entre los valores *f(a)* y *f(b)*, con $f(a) \neq f(b)$, entonces existe un número *c* en (a, b) tal que *f(c)=N.*