Números naturales

IES LAS CANTERAS
COLLADO VILLALBA

El sistema de numeración decimal

- Permite escribir cualquier cantidad con diez símbolos, $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.
- Se trata de un sistema de numeración posicional, pues el lugar que ocupe un dígito modifica la cantidad o valor que expresa el número.
- En este tipo de numeración las cantidades se agrupan de 10 en 10.

IES LAS CANTERAS COLLADO VILLALBA

Ejemplos

Número	Centenas de millar	Decenas demillar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
1023	0	0	1	0	2	3
12.407		1	2	4	0	7
123.465	1	2	3	4	6	5
70089	0	7	0	0	8	9
34	0	0	0	0	3	4

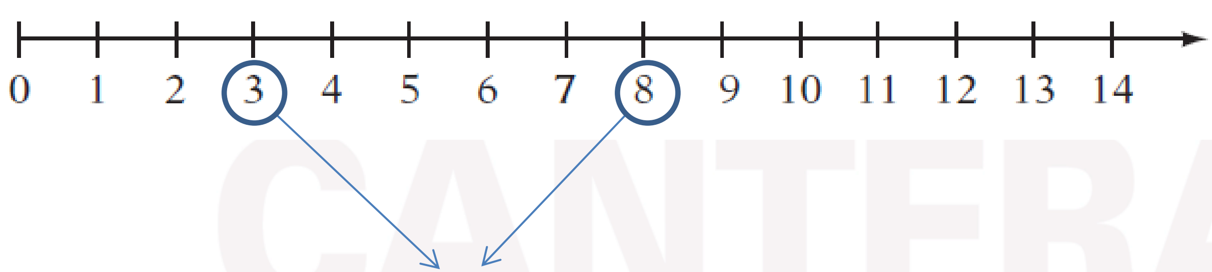
IES LAS CANTERAS COLLADO VILLALBA

Ordenación de números naturales

Los números naturales pueden representarse utilizando la recta numérica. Cada número se encuentra a una distancia del número 0 como indica su valor.

Que la recta numérica tenga su extremo derecho terminado en punta indica que no existe el “mayor número entero”.

Un número natural ***a*** es mayor que otro ***b***, cuando el primero se encuentra a la derecha del segundo, y lo representaremos como ***a* > *b***, o bien, ***b* > *a***.

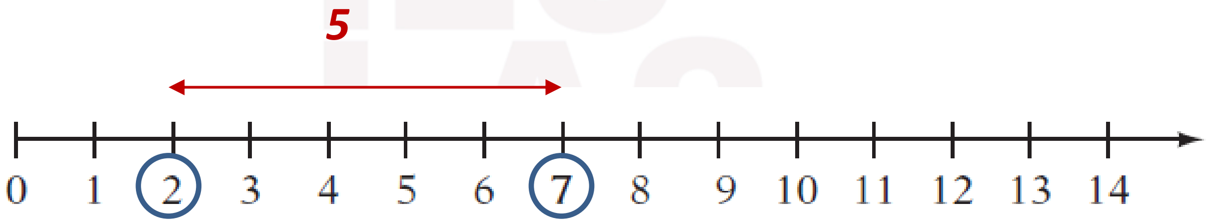


3 < 8

OPERACIONES CON NÚMEROS NATURALES

Suma de números naturales

- La suma de dos números naturales es otro número natural.
- En la recta numérica se puede representar la suma como el desplazamiento hacia la derecha desde la posición del primer sumando tantas unidades como valor tenga el segundo



2 + 5 = 7

Procedimiento para sumar

- Para sumar dos números naturales, se suman las cifras del mismo orden. Si sobrepasa el número 9, entonces se procede a realizar el cambio de orden.

$$\begin{array}{r} 130 \\ +975 \\ \hline 1105 \end{array}$$

0+5=5

3+7=10 1

1+9=10

IES LAS CANTERAS COLLADO VILLALBA

Propiedad asociativa

Si a, b y c son tres números naturales, entonces:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

(Los paréntesis indican qué operación deberá realizarse en primer lugar),

Ejemplo:

$\overset{9}{(2 + 7)} + 5 = 9 + 5 = 14$

$2 + \overset{12}{(7 + 5)} = 2 + 12 = 14$

IES LAS CANTERAS COLLADO VILLALBA

Elemento neutro de la suma

Existe un número (el cero), tal que, para cualquier número natural a:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

IES LAS CANTERAS COLLADO VILLALBA

Propiedad conmutativa

No importa el orden en el que se sumen dos números naturales:

$$\mathbf{a + b = b + a}$$

Ejemplo:

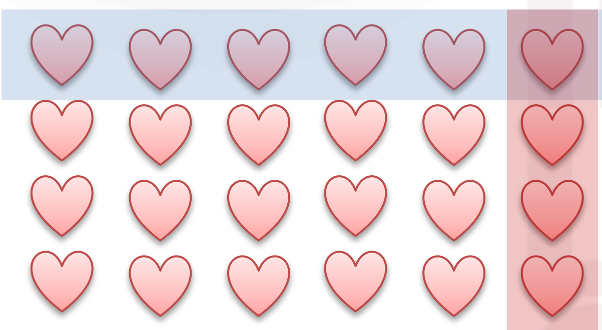
$2 + 7 = 9 = 7 + 2$

IES LAS CANTERAS COLLADO VILLALBA

Producto de números naturales

- El producto de dos números naturales es otro número natural que resulta de sumar tantas veces el primer número como indique el segundo.

Seis corazones por fila



Cuatro filas

$6 + 6 + 6 + 6 = 24$

$6 \times 4 = 24$

IES LAS CANTERAS COLLADO VILLALBA

Propiedad asociativa

Si a, b y c son tres números naturales, entonces:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

(Los paréntesis indican qué operación deberá realizarse en primer lugar),

Ejemplo:

$$\underbrace{(2 \cdot 7)}_{14} \cdot 5 = 14 \cdot 5 = 70 \qquad 2 \cdot \underbrace{(7 \cdot 5)}_{35} = 2 \cdot 35 = 70$$

IES LAS CANTERAS COLLADO VILLALBA

Elemento neutro del producto

Existe un número (el uno), tal que, para cualquier número natural a, salvo para el elemento neutro de la suma:

$$\mathbf{a \cdot 1 = 1 \cdot a = a}$$

Propiedad conmutativa

No importa el orden en el que se multipliquen dos números naturales:

$$\mathbf{a \cdot b = b \cdot a}$$

Ejemplo:

$2 \cdot 7 = 14 = 7 \cdot 2$

La propiedad distributiva

El producto de un número natural por una suma de números naturales, es igual a la suma de los productos de dicho número por cada uno de los sumandos:

a · (b + c) = a · b + a · c

Ejemplo

$$5 \cdot (3+4) = \begin{cases} 5 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 15 + 20 = 35 \\ 5 \cdot 7 = 35 \end{cases}$$

La resta

- La resta de dos números naturales, cuando existe, es otro número natural que indica la distancia entre ambos.
- Los términos de una resta se denominan minuendo (número del que se resta), sustraendo (número que se resta) y resta o diferencia (resultado de la operación).
- Cuando el minuendo es menor que el sustraendo, la resta no se puede realizar, en el conjunto de los números naturales.

345 – 235 = 110

Resta

Sustraendo

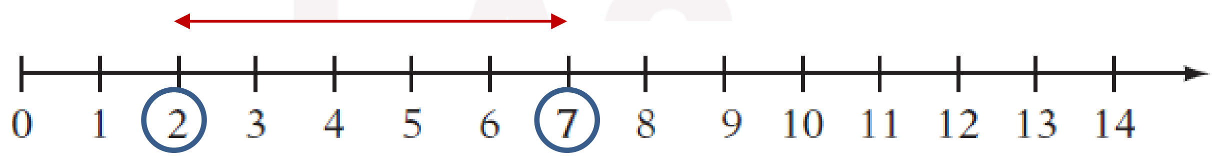
Minuendo

	345	Minuendo
-	235	Sustraendo
	110	Resta

Distancia, diferencia y resta

- La resta de dos números naturales es la cantidad que le falta al sustraendo para ser el minuendo, de esta forma, diferencia y resta son sinónimos.
- También la resta puede ser asociada a la distancia que separa dos números o cantidades.

5 (distancia entre 7 y 2)



7 - 2= 5

Propiedades de la resta

La suma del sustraendo y la resta es igual al minuendo

$345 - 235 = 110$

$235 + 110 = 345$

Si al minuendo y al sustraendo se le suman la misma cantidad la resta no varía.

$345 - 235 = 110$

$345 + 24 - (235 + 24) = 110$

IES LAS CANTERAS COLLADO VILLALBA

División

- La división entre números naturales es una operación matemática que consiste en calcular cuantas veces (**cociente**) un número (**divisor**) se encuentra contenido en otro (**dividendo**).
- La división entre números naturales no siempre proporciona un número natural.

255 : 15 = 17

Cociente

Divisor

Dividendo

Dividendo Divisor

255	15
0	17

Cociente

División exacta

- La división entre números naturales no siempre se puede realizar utilizando únicamente números naturales, en este caso se dice que la división **no es exacta**, obteniéndose un resto que sigue siendo un número natural.
- Una **división es exacta** si su resto es 0.
- El resto de una división expresa el número de elementos del dividendo que no han podido ser agrupados. Por tanto, el resto siempre es menor que el divisor.

Dividendo **Divisor**

$$\begin{array}{r|l} 265 & 15 \\ \hline 10 & 17 \end{array}$$

Resto **Cociente**

Propiedades de la división

El producto del divisor por el cociente mas el resto es siempre igual al divisor.

Dividendo Divisor

265 | 15
10 17

Resto Cociente

265 = 15 x 17 + 10

Si multiplicamos al dividendo y al divisor por el mismo número el cociente de la división no varía.

265 | 15
10 17

10 x x 10

2650 | 150
100 17

Dividendo = Divisor x Cociente + Resto

IES LAS CANTERAS COLLADO VILLALBA

Potencias de base natural y exponente natural

- Una potencia es una expresión de la forma a^n, donde **a** es la base y **n** el exponente. El exponente **n** indica el número de veces que aparece multiplicada por si misma la base **a**.
- a^1 cualquier potencia de exponente 1 es igual a la base.

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{\text{La base a multiplicada n veces}}$$

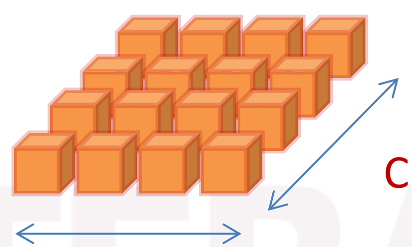
$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

$$6^4 = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$$

$$7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$$

$$12^1 = 12$$

$$4 \cdot 4 = 4^2$$



Cuatro filas

Cuatro elementos por fila

IES LAS CANTERAS COLLADO VILLALBA

Algunas notas para las potencias

- Un número elevado al cuadrado es una potencia de base el número y de exponente 2. Se corresponde con el área de un cuadrado cuyo lado es dicho número.
- Un número elevado al cubo es una potencia de base el número y de exponente 3. Se corresponde con el volumen de un cubo cuya arista es dicho número.
- Podemos leer la potencia **a^n** de dos formas:
  - a elevado a n
  - a elevado a la enésima potencia

5^2 cinco al cuadrado
6^4 seis elevado a 4 o seis elevado a la cuarta potencia
7^3 siete al cubo
8^5 ocho elevado a 5 u ocho elevado a la quinta potencia

Potencias de base 10 de exponente natural

- Una potencia de base 10 es igual a la unidad seguida de tantos ceros como unidades indica el exponente.

  $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$

  $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$

  $10^1 = 10$

- Un número natural puede ser expresado como suma de productos de un dígito y una potencia de 10.

$$28.107 = 2 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 1$$

$$= 20.000 + 8.000 + 100 + 1$$

IES LAS CANTERAS COLLADO VILLALBA

Raíz cuadrada

- La raíz cuadrada de un número es otro número tal que su cuadrado es el número inicial.
- La raíz cuadrada de un número se notará por : $\sqrt{\mathbf{a}}$, al término **a** se le denomina radicando.
- La raíz cuadrada de un número natural es exacta, si existe un número natural que multiplicado por sí mismo da el número inicial.

$\sqrt{\mathbf{25}}$ = 5, pues 5 · 5 = **25**

$\sqrt{\mathbf{4}}$ = 2, pues 2 · 2 = **4**

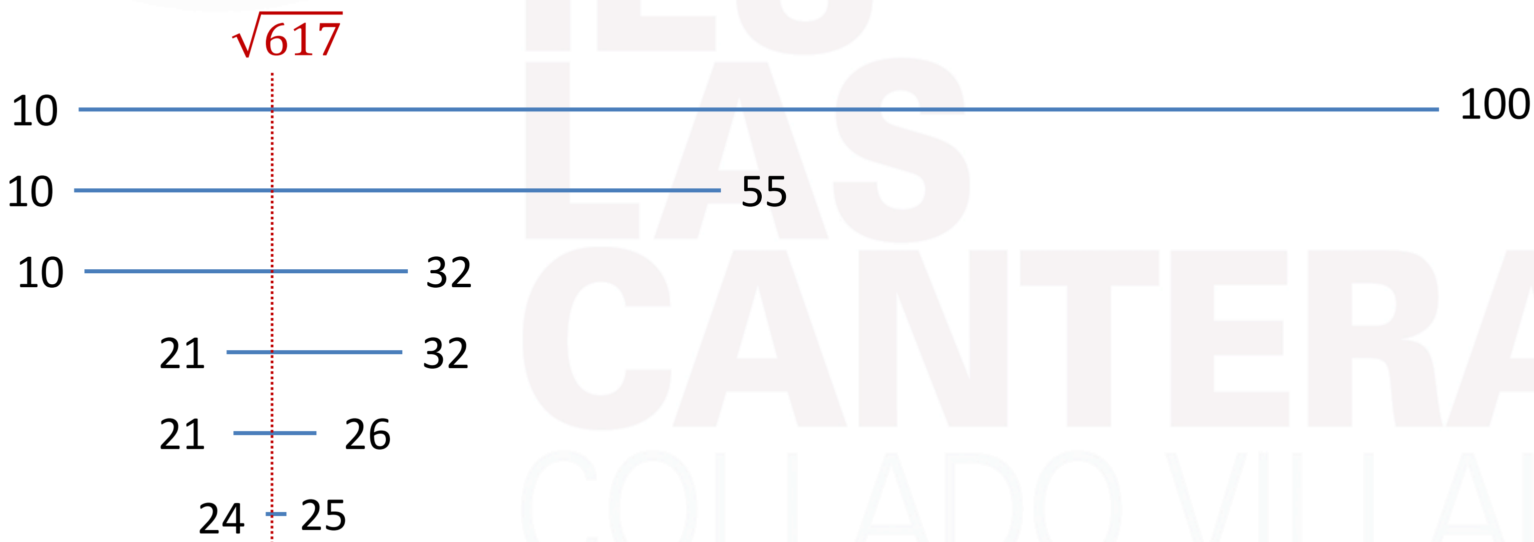
$\sqrt{\mathbf{144}}$ = 12, pues 12 · 12 = **144**

$\sqrt{\mathbf{9}}$ = 3, pues 3 · 3 = **9**

$\sqrt{\mathbf{24}}$ no es una raíz cuadrada exacta

Acotación de la raíz de un número natural

- Cuando la raíz cuadrada de un número natural no es exacta, podemos calcular dos números naturales consecutivos entre los que se encuentra.
- En primer lugar, podemos acotarla entre dos números que estén próximos a la raíz y sea fácil calcular su cuadrado.
- Posteriormente, podremos calcular el número natural que quede en la mitad de los anteriores, decidiendo en que sub-intervalo se encuentra y repitiendo el proceso hasta encontrar los dos números.



IES LAS CANTERAS COLLADO VILLALBA

Ejemplo

$\sqrt{617}$ se encuentra entre 10 y 100 ($10^2 = 100 < 617 < 10000 = 100^2$

El número natural que se encuentra entre 10 y 100 estando cerca de la mitad es: $\frac{10+100}{2} = 55.$

Calculamos $55^2 = 3025$. Por tanto, $10^2 = 100 < 617 < 3025 = 55^2$

El número natural que se encuentra entre 10 y 55 y está cerca de la mitad es: $\frac{10+55}{2} \sim 32.$

Calculamos $32^2 = 1024$. Por tanto, $10^2 = 100 < 617 < 1024 = 32^2$

El número natural que se encuentra entre 10 y 55 y está cerca de la mitad es: $\frac{10+32}{2} = 21.$

Calculamos $21^2 = 441$. Por tanto, $21^2 = 441 < 617 < 1024 = 32^2$.

El número natural que se encuentra entre 21 y 32 y está cerca de la mitad es: $\frac{21+32}{2} \sim 26.$

Calculamos $26^2 = 676$. Por tanto, $21^2 = 441 < 617 < 676 = 26^2$.

Siguiendo el proceso, podemos ver que 24 < $\sqrt{617}$ < 25

IES LAS CANTERAS COLLADO VILLALBA

EVALUACIÓN DE EXPRESIONES NUMÉRICAS

Jerarquía de las operaciones

- Cuando se evalúa una expresión numérica hay que respetar la jerarquía de operaciones que se enumera a continuación:
  1. En primer lugar se evalúan las expresiones entre paréntesis.
  2. A continuación potencias y raíces
  3. A continuación productos y divisiones
  4. Por último, sumas y restas.
- Si hay operaciones de igual prioridad, se realizarán de izquierda a derecha.

IES LAS CANTERAS COLLADO VILLALBA

Ejemplos (I)

Si evaluamos la expresión $81 - 42 - 16 - 6 + 10 - 4$ lo haremos de izquierda a derecha, pues todas las operaciones de la expresión tienen igual prioridad.

$$\overbrace{81 - 42}^{39} - 16 - 6 + 10 - 4 = \overbrace{39 - 16}^{23} - 6 + 10 - 4 = \overbrace{23 - 6}^{17} + 10 - 4$$
$$= \underbrace{17 + 10}_{27} - 4 = 27 - 4 = 23$$

Si evaluamos la expresión $(12 - 7) \cdot 5 - (5 + 3) \cdot 2$ lo haremos de izquierda a derecha, evaluando primero los paréntesis, posteriormente los productos y por último la resta.

$$\overbrace{(12 - 7)}^{5} \cdot 5 - \overbrace{(5 + 3)}^{8} \cdot 2 = \overbrace{5 \cdot 5}^{25} - \overbrace{8 \cdot 2}^{16} = 25 - 16 = 9$$

Ejemplos (II)

Si evaluamos la expresión $20:5\cdot 4-(20-3\cdot 5)$ lo haremos dejando pendiente la resta, hasta evaluar el paréntesis y la división y el producto (en ese orden).

5 15 20 5

$$20:5\cdot 4-(20-3\cdot 5)=5\cdot 4-(20-15)=20-5=15$$

Si evaluamos la expresión$20:5+2\cdot\sqrt{3+6}-4\cdot(3-2)^{2}$ lo haremos dejando pendiente la suma y la resta, evaluando en primer lugar los paréntesis, potencias y raíces.

5 9 1 3 1 6

$$20:5+2\cdot\sqrt{3+6}-4\cdot(3-2)^{2}=4+2\cdot\sqrt{9}-4\cdot 1^{2}=4+2\cdot 3-4$$
$$=4+6-4=6$$

IES LAS CANTERAS COLLADO VILLALBA