Números racionales

Fracciones numéricas enteras

- En matemáticas, una fracción numérica entera expresa la división de un número entero en partes iguales.
- Una fracción numérica consta de dos términos:
  - El numerador (se corresponde con el dividendo de la división)
  - El denominador (se corresponde con el divisor de la división)
- El denominador nunca puede ser cero.

$$\frac{a}{b}$$

Numerador

Denominador

Ejemplos

$$\frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{8}$$

$$\frac{3}{8}$$

1/6 2/6 3/6 4/6 5/6

Fracciones propias e impropias

- Una fracción es propia si el numerador es menor que el denominador, será impropia en caso contrario.

Fracciones propias

$$\frac{3}{8} \qquad \frac{12}{15} \qquad \frac{1}{2}$$

Fracciones impropias

$$\frac{9}{8} \qquad \frac{14}{3} \qquad \frac{31}{2}$$

Descomposición de una fracción impropia

- Una fracción impropia es mayor que la unidad, pues su numerador es mayor que su denominador.
- Podemos expresar una fracción impropia como suma de una parte entera y una fracción propia

Ejemplo:

$$\frac{14}{5} = 2 + \frac{4}{5}$$

$$\begin{array}{r|l} 14 & 5 \\ \hline 4 & 2 \end{array}$$

Interpretando fracciones

- Podemos interpretar una fracción numérica como sigue:
  - El denominador indica el número de partes en que hemos dividido la unidad.
  - El numerador indica el número de partes del tamaño anterior que hemos tomado.

Ejemplos

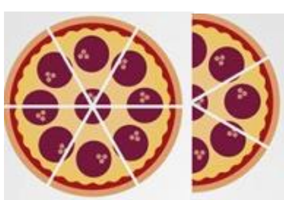
$\frac{7}{8}$

Cada porción es un octavo. Hemos seleccionado 7 porciones

$\frac{2}{5}$

Una moneda de 20 céntimos, representa una quinta parte de un euro, por tanto 40 céntimos de euro son dos quintas partes de un euro.

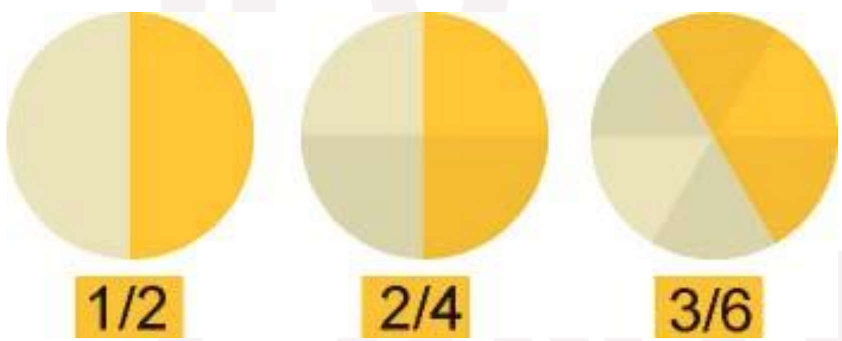
$\frac{9}{6}$



La pizza ha sido dividida en 6 partes iguales, hemos tomado 9 trozos en total.

Fracciones equivalentes

- Distintas fracciones pueden expresar la misma cantidad, en ese caso se dice que son fracciones equivalentes.



Construcción de fracciones equivalentes

- Dada una fracción se pueden construir tantas fracciones equivalentes como queramos multiplicando el numerador y el denominador por el mismo número:

$$\frac{7 \cdot 2}{8 \cdot 2} = \frac{14}{16}$$

$$\frac{7 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{35}{40}$$

$$\frac{7}{8}$$

$$\frac{7 \cdot 4}{8 \cdot 4} = \frac{28}{32}$$

$$\frac{7 \cdot 7}{8 \cdot 7} = \frac{49}{56}$$

Fracción irreducible

- Una fracción se dice **irreducible** cuando el máximo común divisor del numerador y denominador es 1, es decir, el numerador y el denominador no tienen divisores comunes salvo el 1.

$$\frac{3}{8}$$

Fracción irreducible, pues el mcd(3,8) = 1

$$\frac{105}{60}$$

Fracción reducible, pues el mcd(105,60) = 15

Cálculo de la fracción irreducible equivalente

- Cuando una fracción no es irreducible se puede obtener su fracción irreducible equivalente dividiendo el numerador y denominador por el máximo común divisor de ambos.

$$\frac{105}{60}$$

Fracción reducible, pues el mcd(105,60) = 15

105 : 15 = 7

60 : 15 = 4

$$\frac{7}{4}$$

Fracción irreducible equivalente a la anterior (basta multiplicar por 15 el numerador y el denominador para obtener la anterior fracción)

Dos reglas para decidir si dos fracciones son equivalentes

- Dos fracciones son equivalentes si tienen la misma fracción equivalente irreducible.

$\frac{105}{60}$ Es equivalente a la fracción $\frac{21}{12}$ Su fracción equivalente irreducible es $\frac{7}{4}$

- Dos fracciones son equivalentes si al multiplicar el numerador de una por el denominador de la otra y viceversa, se obtiene el mismo número

$\frac{105}{60}$ Es equivalente a la fracción $\frac{21}{12}$

$105 \times 12 = 1260$

$60 \times 21 = 1260$

Orden

- Para poder comparar dos fracciones se hace necesario que ambas tengan el mismo denominador.
- Seleccionaremos fracciones equivalentes a las dadas con igual denominador, aquella que tenga mayor numerador será la mayor.

Ejemplo: $\frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{7}{15}$

$$\Downarrow$$

$\frac{18}{30}, \frac{15}{30}, \frac{14}{30}$

Calculamos fracciones equivalentes a las anteriores con el mismo denominador. Aunque vamos a utilizar el mcm (5,2,15)=30, podríamos utilizar cualquier múltiplo de éste (60,90…)

Por tanto: $\frac{14}{30} < \frac{15}{30} < \frac{18}{30} \Rightarrow \frac{7}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5}$

Fracciones negativas

- Las fracciones también pueden ser negativas y pueden expresarse de tres formas distintas:
  - El numerador negativo y el denominador positivo
  - El numerador positivo y el denominador negativo
  - El signo negativo delante de una fracción con el numerador y el denominador sin signo.

Ejemplo:

$$\frac{-14}{16} = \frac{14}{-16} = -\frac{14}{16}$$

Fracciones y números decimales

- Una fracción puede expresarse en forma decimal, basta con dividir el numerador entre el denominador.
- Al hacer la división puede ocurrir:
  - Uno de los restos parciales es cero: la división termina y la expresión decimal es limitada
  - Ningún resto parcial es cero, la expresión decimal es ilimitada y las cifras decimales se repiten en grupos iguales (se denomina periodo)

Formas decimales periódicas: ejemplos

Exacta	$\mathbf{\frac{3}{4} = 0,75}$ $\mathbf{\frac{142}{25} = 5,68}$	La división es exacta
Puras	$\mathbf{\frac{1}{3} = 0,333 = 0,}\hat{3}$ $\mathbf{\frac{12}{11} = 1,}\widehat{09}$	La fracción periódica pura sucede cuando se repite las cifras del cociente nada más empezar la parte decimal
Mixtas	$\mathbf{\frac{5}{6} = 0,83.. = 0,8}\hat{3}$ $\mathbf{\frac{17}{12} = 1,41666\ldots}$	La fracción periódica mixta sucede cuando se repiten las cifras del cociente pero no desde la coma decimal

Representación en la recta numérica

- A cada fracción le podemos asociar un único punto en la recta numérica.
- Si la fracción es propia, se divide la unidad en tantas partes como indique el denominador, y se toman las que indique el numerador.
- Si la fracción es impropia, se procede a tomar tantas unidades como tenga la parte entera de la fracción y con la siguiente unidad se procede a representar la fracción propia.

Representación en la recta numérica: ejemplos

$$\frac{3}{5}$$

$$\frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}$$

$$\frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5}$$

Números enteros como fracciones

- Un número entero puede ser representado como fracción.
- De hecho el conjunto de los números naturales se encuentra incluido dentro del conjunto de los números enteros.

Ejemplos:

$$\mathbf{7 = \frac{7}{1} = \frac{14}{2} = \frac{35}{5}}$$

Si dividimos el numerador entre el denominador de las fracciones el cociente es el número entero

$$\mathbf{1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{35}{35}}$$

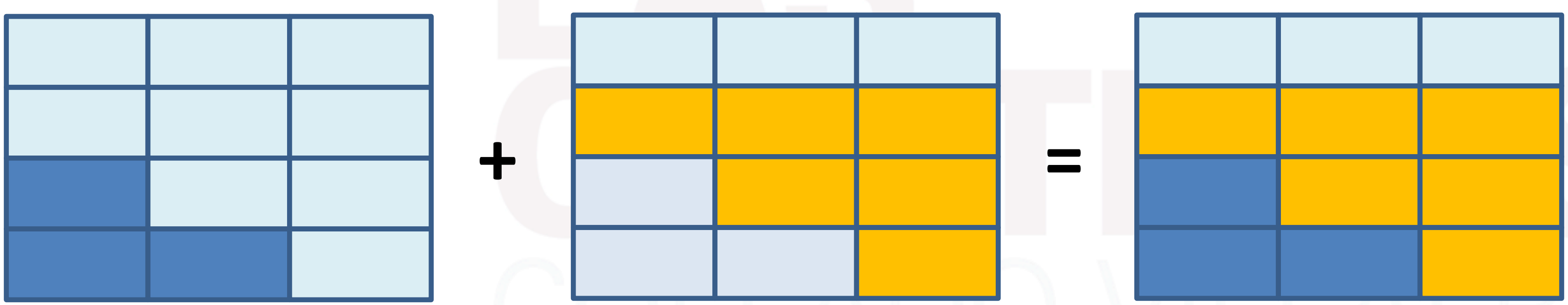
El número entero 1 puede estar representado por cualquier fracción que tenga igual numerador y denominador.

OPERACIONES CON FRACCIONES

Suma de fracciones

- Para poder sumar fracciones éstas tienen que encontrarse en las mismas unidades fraccionarias.
- Si las fracciones no tienen el mismo denominador tendremos que seleccionar fracciones equivalentes con común denominador.
- La fracción que resulta de la suma tiene el mismo denominador siendo el numerador la suma de los numeradores.

$$\frac{3}{12} + \frac{6}{12} = \frac{3+6}{12} = \frac{9}{12}$$



Ejemplos: suma de fracciones

$$\frac{4}{5}+\frac{2}{3}=\frac{4\cdot 3}{5\cdot 3}+\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{12}{15}+\frac{10}{15}=\frac{12+10}{15}=\frac{22}{15}$$

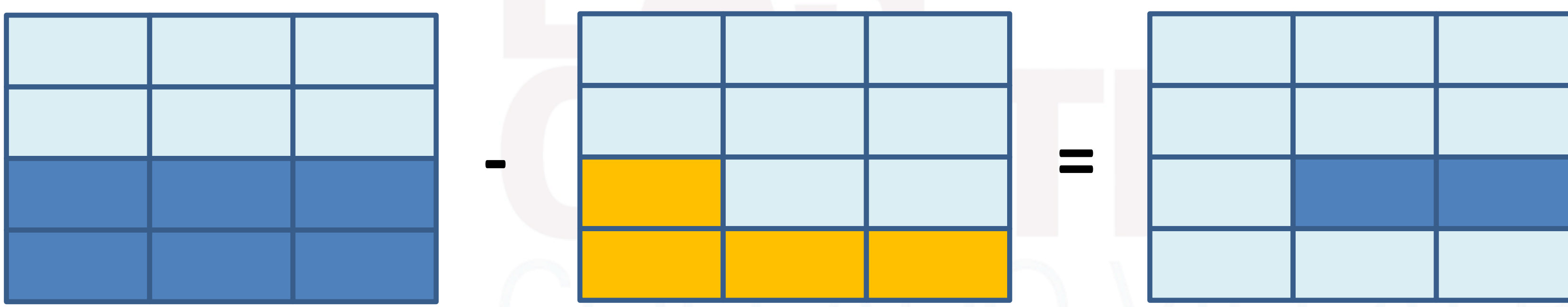
Calculamos fracciones equivalentes a las anteriores con común denominador.

$$3+\frac{1}{4}=\frac{3\cdot 4}{1\cdot 4}+\frac{1}{4}=\frac{12}{4}+\frac{1}{4}=\frac{12+1}{4}=\frac{13}{4}$$

Resta de fracciones

- Para poder restar fracciones éstas tienen que encontrarse en las mismas unidades fraccionarias.
- Si las fracciones no tienen el mismo denominador tendremos que seleccionar fracciones equivalentes con común denominador.
- La fracción que resulta de la resta tiene el mismo denominador siendo el numerador la resta de los numeradores.

$$\frac{6}{12} - \frac{4}{12} = \frac{6-4}{12} = \frac{2}{12}$$



Ejemplos: resta de fracciones

$$\frac{4}{5}-\frac{2}{3}=\frac{4\cdot 3}{5\cdot 3}-\frac{2\cdot 5}{3\cdot 5}=\frac{12}{15}-\frac{10}{15}=\frac{12-10}{15}=\frac{2}{15}$$

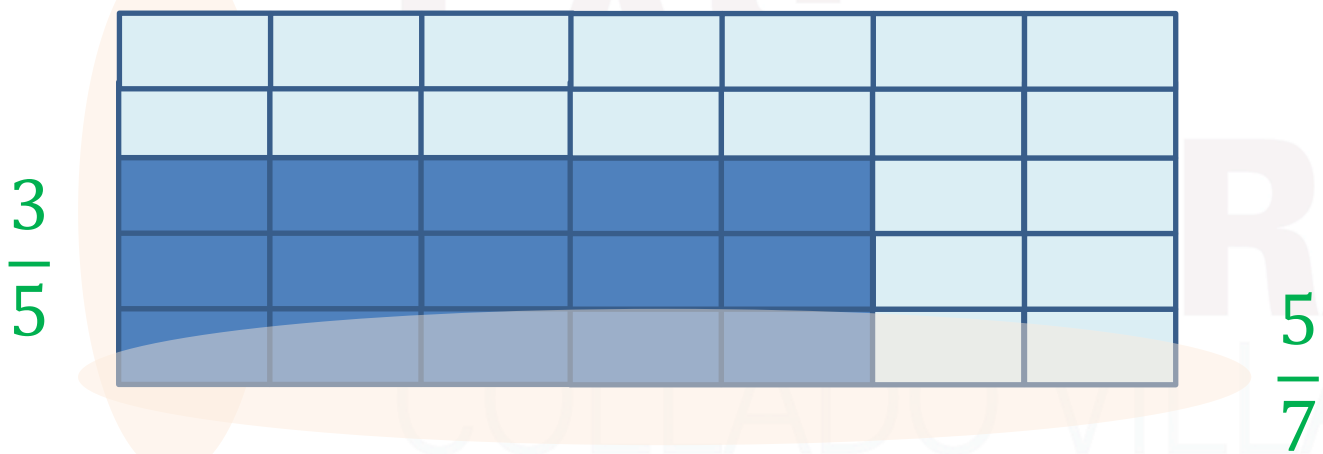
Calculamos fracciones equivalentes a las anteriores con común denominador.

$$3-\frac{1}{4}=\frac{3\cdot 4}{1\cdot 4}-\frac{1}{4}=\frac{12}{4}-\frac{1}{4}=\frac{12-1}{4}=\frac{11}{4}$$

Producto de fracciones

- El producto de dos fracciones es otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores.

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 7} = \frac{15}{35}$$



Ejemplos: producto de fracciones

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}$$

En el producto de fracciones no es necesario que éstas tengan común denominador. Por lo que es buena idea simplificar las fracciones antes de operar

$$3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

Inverso de una fracción

- Se dice que el inverso de un número es otro tal que al multiplicarlos el resultado es 1.
- Todas las fracciones salvo el 0 tiene inverso.

Ejemplos:

$$\text{El inverso de } \frac{3}{5} \text{ es } \frac{5}{3} \text{ pues } \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}=\frac{15}{15}=1$$

$$\text{El inverso de } 5 \text{ es } \frac{1}{5} \text{ pues } 5\cdot\frac{1}{5}=\frac{5}{5}=1$$

$$\text{El inverso de } \frac{1}{5} \text{ es } 5 \text{ pues } \frac{1}{5}\cdot 5=\frac{5}{5}=1$$

División de fracciones

- El cociente (división) de dos fracciones es otra fracción que se obtiene multiplicando el dividendo por el inverso del divisor.

Ejemplos:

$$\frac{3}{5} : \frac{2}{9} = \frac{3}{5} \cdot \frac{9}{2} = \frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 2} = \frac{27}{10}$$

$$\frac{3}{5} : \frac{1}{6} = \frac{3}{5} \cdot 6 = \frac{3 \cdot 6}{5} = \frac{18}{5}$$