Números reales

Números racionales. Expresión decimal

- Una fracción puede expresarse en forma decimal, basta con dividir el numerador entre el denominador.
- Al hacer la división puede ocurrir:
  - Uno de los restos parciales es cero: la división termina y la expresión decimal es limitada.
  - Ningún resto parcial es cero, la expresión decimal es ilimitada y las cifras decimales se repiten en grupos iguales (se denomina **periodo**). La parte decimal inicial puede no pertenecer al periodo (se denomina **anteperiodo**)

Formas decimales periódicas: ejemplos

Exactas	$\frac{3}{4} = 0,75$ $\frac{142}{25} = 5,68$	La división es exacta
Puras	$\frac{1}{3} = 0,333 = 0,\hat{3}$ $\frac{12}{11} = 1,\widehat{09}$	La fracción periódica pura sucede cuando se repite las cifras del cociente nada más empezar la parte decimal
Mixtas	$\frac{5}{6} = 0,83.. = 0,8\hat{3}$ $\frac{17}{12} = 1,41666\ldots$	La fracción periódica mixta sucede cuando se repiten las cifras del cociente pero no desde la coma decimal

Expresión racional de los números decimales periódicos entre 0 y 1 (I)

Si el número tiene un número finito de decimales, la fracción que lo genera será el número natural formado por los dígitos de la parte decimal y como denominador la unidad seguida de tantos cero como dígitos tenga la parte decimal.

EJEMPLO:

0,341 tiene en su parte decimal tres dígitos por tanto la fracción que genera el número decimal tendrá como numerador el número entero 341 y como denominador 1000, pues la parte decimal tiene 3 dígitos.

$$0{,}341 = \frac{341}{1000}$$

Expresión racional de los números decimales periódicos entre 0 y 1 (II)

Si el número tiene su parte decimal periódica pura, entonces la fracción que lo genera tendrá como numerador el número entero formado por su periodo y como denominador el número entero formado por tantos 9 como dígitos tenga el periodo.

EJEMPLO:

0,343434…. tiene su parte decimal periódica pura formada por dos, por tanto la fracción que genera el número decimal tendrá como numerador el número entero 34 y como denominador 99, pues la parte periódica tiene 2 dígitos.

$$0{,}343434\ldots = 0,\widehat{34} = \frac{34}{99}$$

Expresión racional de los números decimales periódicos entre 0 y 1 (III)

Si el número tiene su parte decimal periódica mixta, entonces la fracción que lo genera tendrá como numerador el número entero formado por su anteperiodo y periodo, menos el anteperiodo y como denominador el número entero formado por tantos 9 como dígitos tenga el periodo seguido de tantos ceros como tenga el anteperiodo

EJEMPLO:

0,12341341341…. su parte decimal está formada por el anteperiodo 12 y el periodo 341, por tanto, el numerador será 12341 menos 341 y el denominador por 2 nueves y 3 ceros.

$$0{,}12341341341\ldots = 0{,}12\widehat{341} = \frac{12341 - 341}{99000}$$

Periodo

Anteperiodo

Números racionales entre dos racionales

- Entre dos números racionales hay infinitos números racionales.

EJEMPLO:

Supongamos que deseamos calcular un número racional entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ bastaría con calcular el número racional que se encuentra en el punto medio, es decir:

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{2}=\frac{\frac{5}{6}}{2}=\frac{5}{12}$$

Repitiendo este proceso entre uno de los números originales y el número calculado, podríamos calcular otro nuevo número racional que se encontraría entre los números racionales originales. Este procedimiento se puede realizar tantas veces como se desee.

Representación en la recta numérica

- A cada fracción le podemos asociar un único punto en la recta numérica.
- Si la fracción es propia, se divide la unidad en tantas partes como indique el denominador, y se toman las que indique el numerador.
- Si la fracción es impropia, se procede a tomar tantas unidades como tenga la parte entera de la fracción y con la siguiente unidad se procede a representar la fracción propia.

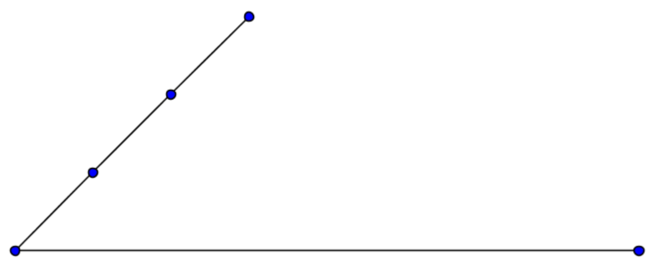
Representación en la recta numérica: ejemplos

$$\frac{3}{5}$$

$$\frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}$$

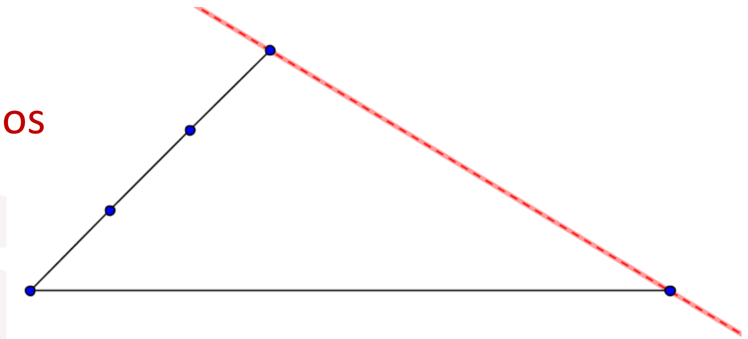
$$\frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5}$$

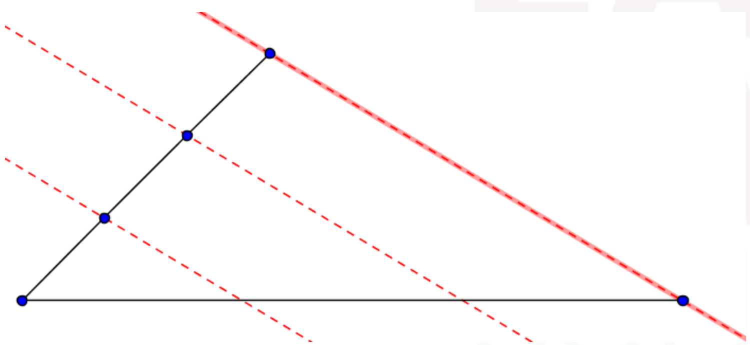
División de un segmento en partes iguales aplicando el teorema de Thales



Se dispone un segmento dividido en tantas partes iguales como se desee dividir el otro segmento sobre uno de los extremos de éste.

Se unen los otros extremos de los segmentos con una línea recta





Se trazan rectas paralelas a la anterior, que pasen por las divisiones del segmento previamente dividido.

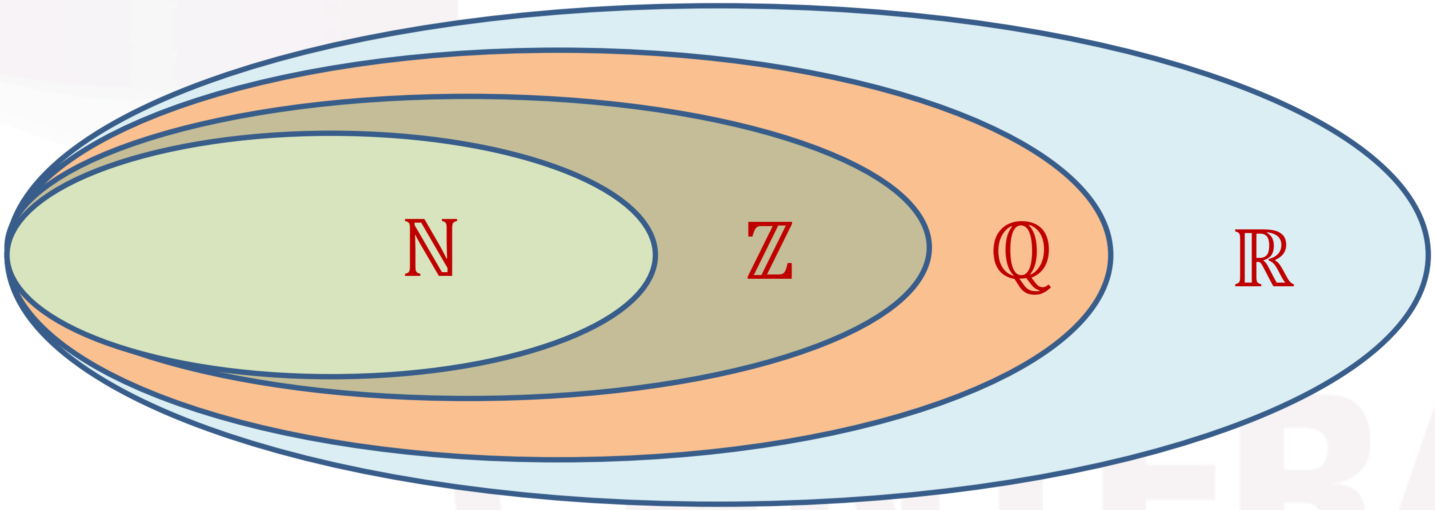
Números con infinitas cifras decimales no periódicas

- Los números con infinitas cifras decimales no periódicas se denominan números **irracionales**.
- Los números irracionales no pueden representarse mediante una fracción.

Ejemplos:
0,1 01 001 0001 00001….
0,2 32 322 3222 32222….

Números reales

- Los números racionales e irracionales forman el conjunto de los **números reales**



Números reales algebraicos y trascendentes

- Los números irracionales pueden clasificarse en:
  - **Algebraicos** (son solución de una ecuación de coeficientes racionales). Por ejemplo, las raíces no exactas ($\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$)
  - **Transcendentes** resto de números irracionales, por ejemplo, el número **e**, $\boldsymbol{\Pi}$

Aproximación a $\sqrt{2}$ (I)

- La raíz de 2 es un **número irracional**, por tanto, su expresión decimal tiene infinitos decimales no periódicos.
- Cuando operamos una expresión que contiene el número $\sqrt{2}$ y lo sustituimos por un número decimal, cometemos un error que puede ser cuantificado.

Aproximación a $\sqrt{2}$ (II)

$\sqrt{2}$ se encuentra entre 1 y 2, pues $1^2 = 1 \; y \; 2^2 = 4$

Podemos continuar con la aproximación calculando el cuadrado desde 1,1 a 1,9.

Cómo $1{,}4^2 = 1{,}96 \;\; y \; 1{,}5^2 = 2{,}25$, sabemos que $1{,}4 < \sqrt{2}$<1,5

Podemos continuar la aproximación calculando el cuadrado desde 1,41 hasta 1,49.

Cómo $1{,}41^2 = 1{,}9881 y \; 1{,}42^2 = 2{,}0164$, sabemos que $1{,}41 < \sqrt{2}$<1,42

Este proceso puede continuar tanto como se desee, cada vez que encontramos un nuevo decimal el error cometido es menor.

Aproximación a $\sqrt{2}$ (III)

- Este pequeño esquema explica visualmente el proceso anterior:

1 — 2 $\qquad 1^2 = 1 \; y \; 2^2 = 4$

1,4 — 1,5 $\qquad 1{,}4^2 = 1{,}96 \; y \; 1{,}5^2 = 2{,}25$

1,41 — 1,42 $\qquad 1{,}41^2 = 1{,}9881 y \; 1{,}42^2 = 2{,}0164$

1,414 — 1,415 $\qquad 1{,}414^2 = 1{,}999396 y \; 1{,}415^2 = 2{,}002225$

1,4142 — 1,4143 $\qquad 1{,}4142^2 = 1{,}99996164 \; y \; 1{,}4143^2 = 2{,}00024449$

$\sqrt{2}$

Relación de orden

- Los números reales pueden ser representados en la recta real, y por tanto, se encuentran ordenados.
- La relación de orden para los números reales se define de la siguiente forma:

$$\mathbf{a < b \iff b - a \text{ es positivo}}$$

- Los símbolos que se utilizan son:

$$< \textit{menor que} \quad \leq \textit{menor o igual que}$$

$$> \textit{mayor que} \quad \geq \textit{mayor o igual que}$$

Propiedades de la relación de orden

$a \leq a$

$a \leq b \; y \; b \leq \text{c} \quad \textbf{entonces} \quad \text{a} \leq c$

$a \leq b \; y \; b \leq \text{a entonces a} = b$

$a < b \quad o \quad b < \text{a} \quad \text{ó} \quad \text{a} = b$

$a < b \Leftrightarrow a \pm c < \text{b} \pm c$

$Si \; c > 0 \; y \; a < b \;\; entonces \quad a \cdot c < b \cdot c$

$Si \; c < 0 \; y \; a < b \;\; entonces \quad a \cdot c > b \cdot c$

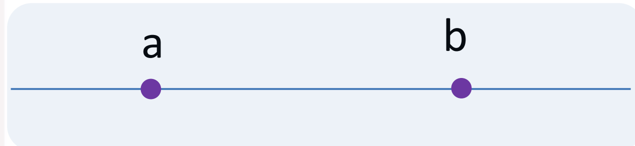
Intervalos

- La relación de orden en $\mathbb{R}$ permite definir algunos subconjuntos:

Intervalo abierto	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}\ / a < x < b\}$
Intervalo cerrado	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}\ / a \leq x \leq b\}$
Intervalo semiabierto o semicerrado	$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}\ / a < x \leq b\}$ $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$
Semirectas	$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}\ / x \leq b\}$ $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$ $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}\ / x < b\}$ $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$

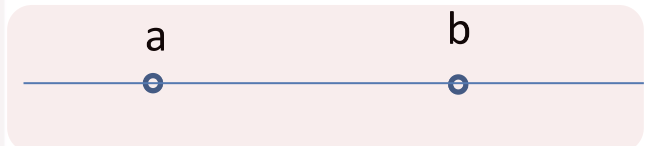
Representación gráfica de intervalos

Intervalo cerrado



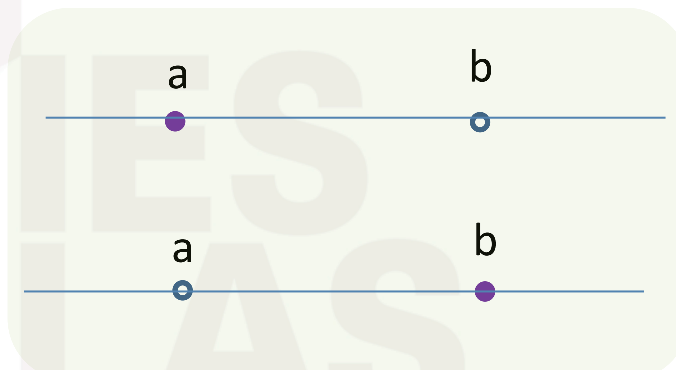
[a,b]

Intervalo abierto



(a,b)

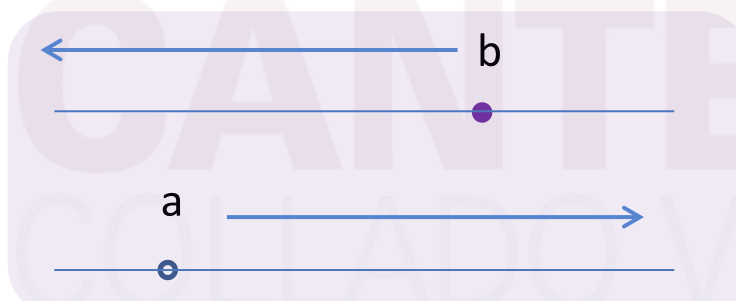
Intervalo semiabierto
o semicerrado



[a,b)

(a,b]

Semirectas



$(-\infty, \boldsymbol{b}]$

$(\mathrm{a}, +\infty)$

Valor absoluto de un número

El valor absoluto de un número n se designa por $|\mathbf{n}|$ y es igual al número si es positivo y con su opuesto si es negativo.

EJEMPLOS: $|\mathbf{0}| = \mathbf{0}$, $|\mathbf{-3}| = \mathbf{3}$, $|\mathbf{3}| = \mathbf{3}$

$|\boldsymbol{x}| = \mathbf{0}$ **La solución es x = 0**

$|\boldsymbol{x}| = \mathbf{7}$ **Las soluciones son x = 7 y x = -7**

$|\boldsymbol{x}| < \mathbf{7}$ **La solución es el intervalo** $(\mathbf{-7}, \mathbf{7})$

$|\boldsymbol{x}| \leq \mathbf{7}$ **La solución es el intervalo** $[\mathbf{-7}, \mathbf{7}]$

$|\boldsymbol{x}| > \mathbf{7}$ **La solución es la unión de las semirrectas** $(-\infty, \mathbf{7}) \cup (\mathbf{7}, +\infty)$

$|\boldsymbol{x}| \geq \mathbf{7}$ **La solución es la unión de las semirrectas** $(-\infty, \mathbf{7}] \cup [\mathbf{7}, +\infty)$

Algunas propiedades del valor absoluto

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

$$|x - y| \geq |x| - |y|$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$|x : y| = |x| : |y|$$