Polinomios

Expresiones algebraicas

Una expresión algebraica es cualquier combinación de números y letras relacionados por operaciones aritméticas: suma, resta, producto, división y potenciación.

Ejemplos

Volumen del cubo de arista ***a*** $\boldsymbol{a^3}$

Área del círculo de radio ***r*** πr^2

Diagonal de un rectángulo de lados ***a*** y ***b*** $\sqrt{a^2 + b^2}$

Cada una de las variables que intervienen en la expresión algebraica se denomina **variable** o **indeterminada**.

Acerca de las expresiones algebraicas

- Cuando en una expresión algebraica no hay operación entre dos letras o un número y una letra, se entenderá que hay una producto.
- Los signos **+** y **–** en una expresión algebraica indican una operación no el signo de la expresión.
- Las propiedades de las operaciones que aparecen en una expresión algebraica tienen las mismas propiedades que las de los números que representan.

Valor numérico

- El valor obtenido al evaluar una expresión numérica al sustituir cada una de sus valores se denomina valor numérico de la expresión para dichos valores.
- Dos expresiones algebraicas son equivalentes cuando tienen el mismo valor numérico para cualquier valor numérico asignado a las variables.

Ejemplos

Volumen del cubo de arista ***2 cm***

Volumen=$\boldsymbol{a^3 = 2^3 = 8\ cm^3}$

Área del círculo de radio ***5 m***

Área = $\pi r^2 = \pi \mathbf{5}^2 = \mathbf{25}\pi\ \boldsymbol{metros\ cuadrados}$

Diagonal de un rectángulo de lados ***2 mm*** y $\boldsymbol{3mm}$

$$\boldsymbol{d} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\mathbf{2}^2 + \mathbf{3}^2} = \sqrt{\mathbf{4 + 9}} = \sqrt{\mathbf{13}}\boldsymbol{mm^2}$$

Monomios

Un monomio es una **expresión algebraica** en el que las **únicas operaciones** con letras que intervienen son el **producto y la potenciación de exponente natural.**

Son monomios:

$$2a^3b^2$$

$$\frac{2}{3}yx^3$$

$$ab$$

No son monomios:

$$\sqrt{2a}$$

$$\frac{2x^3}{3y}$$

$$\sqrt[3]{ab}$$

Elementos de un monomio

- Un monomio está formado por:
  - **Coeficiente** Parte numérica del monomio
  - **Parte literal** formada por las letras junto con sus exponentes.
- El grado de un monomio es la suma de los exponentes de su parte literal.
- El grado de un monomio respecto de una variable es el grado de la variable.

Ejemplos

$$\boldsymbol{2a^3b^2}$$

Coeficiente **2**
Parte literal $\boldsymbol{a^3b^2}$
Grado 5
Grado respecto de la variable a 3
Grado respecto de la variable b 2

$$\boldsymbol{7x^3}$$

Coeficiente **7**
Parte literal $\boldsymbol{x^3}$
Grado 3
Grado respecto de la variable x 3

Monomios semejantes

- Dos monomios son semejantes cuando tienen la misma parte literal.
- Los monomios semejantes que tienen igual coeficiente son iguales.
- Los monomios semejantes que tienen coeficientes opuestos se dicen que son opuestos.

Ejemplos

$2a^3b^2$ y $5a^3b^2$ son semejantes

$2b^2a^3$ y $7a^3b^2$ son semejantes

$2b^3a^2$ y $7a^3b^2$ NO son semejantes

$7x^3$ y $5x^3$ son semejantes

x^3 y $5x^2$ NO son semejantes

Polinomios

Un polinomio es una expresión algebraica compuesta por la suma o diferencia de dos o más monomios.

Ejemplos

$$2a^3b^2 - 5b^2 + 3ab$$

Polinomio compuesto de 3 monomios

$$-2x^3 + 3$$

Polinomio compuesto de 2 monomios

Definiciones

- **Término** cada uno de los monomios que componen un polinomio.
- **Grado** mayor grado de los términos que lo componen.
- **Término independiente** término de grado cero de un polinomio, de existir, se trata de un número.

Si el polinomio únicamente tiene una variable:

- **Término principal** término de mayor grado del polinomio.
- **Coeficiente principal** coeficiente del término de mayor grado.
- **Coeficiente de grado n** número que pertenece al término de grado n del polinomio.

Ejemplos

$$2a^3b^2 - ab + 6$$

Términos :

De grado 5, $2a^3b^2$

De grado 2, $-ab$

De grado 0, 6

Grado **5**

Términos :

De grado 3, $2x^3$

De grado 1, $3x$

De grado 0, 6

Grado **3**

$$2x^3 + 3x + 6$$

$$-4t^4 + 3t^2 + t - 2$$

Términos De grado 4, $-4t^4$

De grado 2, $3t^2$

De grado 1, t

De grado 0, -2

Grado **4**

Valor numérico de un polinomio

- El valor numérico de un polinomio se obtiene al sustituir cada una de sus variables por un valor.

Ejemplo

$$P(t) = -4t^4 + 3t^2 - t - 2$$

$$P(2) = -4 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^2 - 2 - 2 = -64 + 12 - 2 - 2 = -56$$

$$P(-2) = -4 \cdot (-2)^4 + 3 \cdot (-2)^2 - (-2) - 2 = -64 + 12 + 2 - 2 = -52$$

Suma (o resta) de monomios

Son semejantes

La suma (o resta) es otro *monomio* semejante.
El coeficiente del monomio resultante es la suma (o resta) de los coeficientes de los monomios.

Ejemplos

$$\boldsymbol{2a^3b^2 + 5a^3b^2 = (2+5)a^3b^2 = a^3b^2}$$

$$\boldsymbol{2x^3 - 5x^3 = (2-5)x^3 = -3x^3}$$

$$\boldsymbol{-2t^2 + 2t^2 = (-2+2)t^2 = 0t^2 = 0}$$

No son semejantes

La suma (o resta) es un *polinomio* formado por la suma (o resta) de ambos monomios.

Ejemplos

$$\boldsymbol{2a^2b^2 + 5a^3b^3}$$

$$\boldsymbol{2x^3 - 5x^2}$$

Suma (o resta) de polinomios

La suma (o resta) de polinomios, es otro polinomio, formado por los monomios semejantes que han sido reducidos y el resto de monomios no semejantes.

Ejemplo

P(t) = $-4t^4 + 3t^2 - t - 2$

Q(t) = $2t^4 + 3t + 5$

P(t) + Q(t) = $(-4 + 2)t^4 + 3t^2 + (-1 + 3)t - 2 + 5 = -2t^4 + 3t^2 + 2t + 3$

Ejemplos

P(x) = $2x^2 - 5x + 1$

Q(x) = $x^2 - 7x - 3$

P(x) - Q(x) = $x^2 + 2x + 4$

R(x) = $3x^2 - 1$

S(x) = $x^3 - 7x - 5x^2 - 3$

R(x) + S(x) = $x^3 - 2x^2 - 7x - 4$

T(x) = $3x^2 - x^3$

U(x) = $x^3 - 5x^2 + x - 3$

T(x) + U(x) = $-2x^2 + x - 3$

Producto de monomios

El producto de dos monomios es otro monomio que:

- Como coeficiente el producto de los coeficientes
- La parte literal estará compuesto por las partes literales de los monomios, los exponentes de las variables que comparten ambos monomios se habrán sumado.

Ejemplo

$$-2xy^2t^4 \cdot 3xt^2 = -6x^2y^2t^6$$

$$2x^4 \cdot 5x^2 = 10x^6$$

$$\frac{1}{4}xy^2 \cdot \frac{3}{5}x = \frac{3}{20}x^2y^2$$

Producto de polinomios

El producto de dos polinomios es otro polinomio que resulta de multiplicar cada uno de los términos del primero por cada uno de los términos del segundo, reduciendo luego los términos semejante.

Ejemplos

$$\mathbf{3x \cdot (x - 2y) = 3x^2 - 6xy}$$

$$\mathbf{x^2 \cdot (3x - 1) = 3x^3 - x^2}$$

$$\mathbf{\left(2xy - 3x^2\right)(3x + 2y) = 6x^2y + 4xy^2 - 9x^3 - 6x^2y = 4xy^2 - 9x^3}$$

Ejemplos

P(x) = $2x^3 - 5x + 1$

Q(x) = $x^2 - 7x - 3$

Cuando los polinomios tienen muchos términos, podemos realizar el producto utilizando la siguiente disposición.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & 2x^3 & & -5x & +1 \\
 & & & x^2 & -7x & -3 \\
\hline
 & & -6x^3 & & +15x & -3 \\
 & -14x^4 & & +35x^2 & -7x & \\
2x^5 & & -5x^3 & +x^2 & & \\
\hline
2x^5 & -14x^4 & -11x^3 & +36x^2 & +8x & -3
\end{array}
$$

Productos notables

$$\mathbf{(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab}$$

$$(x+2y)^2 = x^2 + 4y^2 + 4xy$$

$$(3x+2y^2)^2 = 9x^2 + 4y^4 + 12xy^4$$

$$\mathbf{(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab}$$

$$(x-2y)^2 = x^2 + 4y^2 - 4xy$$

$$(3x-2y^2)^2 = 9x^2 + 4y^4 - 12xy^4$$

$$\mathbf{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

$$(x+2y)(x-2y) = x^2 - 4y^2$$

$$(3x-2y^2)(3x+2y^2) = 9x^2 - 4y^4$$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS. RAÍCES DE UN POLINOMIO

Cociente de monomios

El cociente de monomios no siempre es un monomio (puede resultar una fracción algebraica).

La división se realiza como un cociente de números y aplicando la propiedad del cociente de potencias de la misma base.

Ejemplos

$$\frac{12x^2y^3}{4xy^2} = \frac{12}{4} \cdot \frac{x^2}{x} \cdot \frac{y^3}{y^2} = 3xy$$

$$\frac{6x^2t^3y}{4xt^5y^2} = \frac{6}{4} \cdot \frac{x^2}{x} \cdot \frac{t^3}{t^5} \cdot \frac{y}{y^2} = \frac{3x}{2t^2y}$$

$$\frac{2t^2y^2}{4y^2} = \frac{2}{4} \cdot t^2 \cdot \frac{y^2}{y^2} = \frac{1}{2}t^2$$

$$\frac{2t^2y^2}{4t^2y^5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{t^2} \cdot \frac{y^2}{y^5} = \frac{1}{2y^3}$$

División de un polinomio por un monomio

El cociente de un polinomio por un monomio, no siempre es un polinomio (puede resultar una fracción algebraica)

La división resulta de aplicar la propiedad distributiva.

Ejemplos

$$\frac{12x^2y^3+4x^2y^2}{4xy^2}=\frac{12x^2y^3}{4xy^2}+\frac{4x^2y^2}{4xy^2}=3xy+x$$

$$\frac{12x^2y^3+4x^2y^2}{4x^2y^3}=\frac{12x^2y^3}{4x^2y^3}+\frac{4x^2y^2}{4x^2y^3}=3+\frac{1}{y}$$

División entera de polinomios en una variable

Dados los polinomios dividendo (D(x)) y divisor (d(x)), se trata de encontrar un polinomio cociente (c(x)) y otro resto (r(x)) de tal forma que cumplan las siguientes condiciones:

$D(x) = d(x) \cdot c(x) + r(x)$ y grado (r(x)) < grado (d(x))

El procedimiento para la división de polinomios es similar al utilizado para dividir números enteros.

Ejemplo

$$
\begin{array}{l|l}
6x^4+5x^3-7x^2+3x+2 & 2x^2+3x-1 \\ \cline{2-2}
6x^4+9x^3-3x^2 & 3x^2-2x+1 \\ \cline{1-1}
\quad -4x^3-4x^2+3x+2 & \\
\quad -4x^3-6x^2+2x & \\ \cline{1-1}
\qquad 2x^2+x+2 & \\
\qquad 2x^2+3x-1 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad -2x+3 &
\end{array}
$$

El procedimiento para determinar cada término del polinomio cociente consiste en conseguir que el término principal de divisor por el término a calcular del cociente sea el término principal de los sucesivos dividendos.

Factorización y teorema del resto

El valor numérico de un polinomio ***P(x)***, para ***x=a*** coincide con el resto de la división del polinomio ***P(x)*** por el binomio ***x – a***.

Las raíces de un polinomio son aquellos valores numéricos para los que el valor numérico del polinomio es ***0***.

Un polinomio tiene como ***factor*** el binomio ***x – a*** si el valor numérico de dicho polinomio para ***x = a*** es cero.

Ejemplo

$$
\begin{array}{l|l}
3x^3 - 4x^2 - 9x + 15 & x - 2 \\ \cline{2-2}
3x^3 - 6x^2 & 3x^2 + 2x - 5 \\ \cline{1-1}
\quad 2x^2 - 9x + 15 & \\
\quad 2x^2 - 4x & \\ \cline{1-1}
\qquad -5x + 15 & \\
\qquad -5x + 10 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad \boxed{5} &
\end{array}
$$

$$P(x) = Q(x)C(x) + R(x) = 3x^3 - 4x^2 - 9x + 15 = (3x^2 + 2x - 5)(x - 2) + \boxed{5}$$

$$P(2) = 3 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 + 15 = 3 \cdot 8 - 4 \cdot 4 - 9 \cdot 2 + 15 = 24 - 16 - 18 + 15 = \boxed{5}$$

Cálculo de las raíces de un polinomio

Cualquier polinomio de grado n tiene n raíces reales o complejas (teorema fundamental del álgebra)

Las raíces de un polinomio de grado 1 o 2 pueden calcularse a partir de la ecuación (de primer o segundo grado) que resulta de igualarlo a cero.

Las raíces enteras de un polinomio son divisores del término independiente.

Las raíces de un polinomio nos permiten factorizarlo.

Ejemplo 1 (raíces)

Cálculo de las raíces de un polinomio de grado 2 y factorización del polinomio:

$$P(x) = x^2 + 5x + 6$$

Calculamos los valores que anulan el polinomio (resolvemos una ecuación de segundo grado):

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Podemos factorizar el polinomio como:

$$P(x) = x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$$

Ejemplo 2 (raíces)

Cálculo de las raíces de un polinomio de grado mayor que 2 y factorización del polinomio:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

Las posibles raíces enteras son los divisores del término independiente, son candidatos los valores $\pm 1\ y\ \pm 2$

$$P(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 - 2 = 0$$

$$P(-1) = (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - (-1) - 2 = 0$$

$$P(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 2 - 2 = 12 \neq 0$$

$$P(-2) = (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - (-2) - 2 = 0$$

Por tanto, las raíces son: 1, -1 y -2 y el polinomio lo podemos factorizar como:

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x+1)(x+2)$$

Ejemplo 3 (raíces)

Cálculo de las raíces de un polinomio de grado mayor que 2 y factorización del polinomio:

$$P(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x$$

Este polinomio no tiene término independiente. Lo igualamos a cero:

$$x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x = 0$$

Sacamos factor común x:

$$(x^3 + 3x^2 - x - 3)x = 0$$

Una raíz es 0, el resto se obtiene de factorizar un polinomio un grado menor

$$(-1)^3 + 3(-1)^2 - (-1) - 3 = 0$$

$$1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1 - 3 = 0$$

$$(-3)^3 + 3(-3)^2 - (-3) - 3 = 0$$

Las raíces del polinomio $\boldsymbol{x^3 + 3x^2 - x - 3}$ son **-1**, **1** y **-3**

El polinomio queda factorizado como: $\boldsymbol{x(x+1)(x-1)(x+3)}$

Regla de Ruffini

Cuando se ha de realizar una división de polinomios en la que el divisor tiene la forma x±a, se puede utilizar la regla de Ruffini.

Ejemplo: $(x^4 - 20x^2 + 64) : (x + 4)$

Coeficientes del polinomio dividendo (0 por cada término que falte)

	1	0	-20	0	64
-4		-4	16	16	-64
	1	-4	-4	16	0

Coeficientes del polinomio cociente en orden decreciente
$x^3 - 4x^2 - 4x + 16$

Resto de la división